Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Übungsblatt 1

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 1. Betrachten Sie die folgenden Mengen $\mathcal{E}$ und Teilmengen $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{E})$.

(a) $\mathcal{E} = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{G} = \{\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{0,4\},\{0,5\},\{0,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$.

(b) $\mathcal{E} = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{G} = \{\{1,2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{1,5\}\}$.

(c) $\mathcal{E} = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{G} = \{X \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) :\ X$ enthält genau 3 Elemente$\}$.

(d) $\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$, $\mathcal{G} = \{\mathbf{g} \cap \mathcal{E} : \mathbf{g}$ ist eine euklidische Gerade$\}$.

(e) $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{G} = \{\mathbf{g} \subseteq \mathcal{E} : \mathbf{g}$ ist eine euklidische Gerade mit $(0,0) \in \mathbf{g}\}$.

Entscheiden Sie jeweils, ob es sich bei $(\mathcal{E},\mathcal{G})$ um eine Inzidenzebene handelt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. Zur Erinnerung: Eine *euklidische Gerade* (wie in (d) und (e)) ist eine Teilmenge $\mathbf{g} \subseteq \mathbb{R}^2$ der Form $\mathbf{g} = \{\mathbf{A} + t\vec{u} : t \in \mathbb{R}\}$ mit $\mathbf{A}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} \neq (0,0)$. (je 2 Punkte)

Aufgabe 2. Es sei $\mathcal{E}$ die Menge aller 1-dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{G}$ die Menge aller 2-dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$. Wir sagen, dass $U \in \mathcal{E}$ auf $E \in \mathcal{G}$ liegt, wenn der Untervektorraum U im Untervektorraum E enthalten ist. Untersuchen Sie, welche der Inzidenzaxiome **(I1)**, **(I2)** und **(I3)** von $(\mathcal{E},\mathcal{G})$ erfüllt werden. (10 Punkte)

Aufgabe 3. Zur Erinnerung: Ein *euklidischer Kreis* ist eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ der Form $K = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2 : ||\mathbf{P} - \mathbf{M}|| = r\}$, wobei $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$ den Mittelpunkt bzw. Radius des Kreises bezeichnen. Hier ist $||\mathbf{P} - \mathbf{M}|| = \sqrt{(p_1 - m_1)^2 + (p_2 - m_2)^2}$ der euklidische Abstand der Punkte $\mathbf{P} = (p_1, p_2)$ und $\mathbf{M} = (m_1, m_2)$.

(a) Seien K_1, K_2 zwei euklidische Kreise und $\mathbf{g}$ eine euklidische Gerade. Zeigen Sie, dass $K_1 \cap \mathbf{g}$ höchstens zwei Punkte enthält. Zeigen Sie, dass $K_1 \cap K_2$ höchstens zwei Punkte enthält, außer es gilt $K_1 = K_2$.

(b) Sei $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\mathcal{G} = \{K \cap \mathcal{E} : K \subseteq \mathbb{R}^2$ ist ein euklidischer Kreis mit $(0,0) \in K\} \cup \{\mathbf{g} \cap \mathcal{E} : \mathbf{g} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine euklidische Gerade mit $(0,0) \in \mathbf{g}\}$. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{E},\mathcal{G})$ eine Inzidenzebene ist.

(je 5 Punkte)

Aufgabe 4. (a) Sei $(\mathcal{E},\mathcal{G})$ eine Inzidenzebene. Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ mindestens drei verschiedene Elemente enthält.

(b) Es sei $(\mathcal{E},\mathcal{G})$ eine Inzidenzebene und enthalte $\mathcal{E}$ mindestens vier verschiedene Elemente. Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ mindestens vier verschiedene Elemente enthält.

(je 5 Punkte)

BITTE DIE HINWEISE AUF DER RÜCKSEITE BEACHTEN!

- Abgabe der Lösungen bis Donnerstag, 18.04.2019, um 8 Uhr in das Fach 170 im Lichthof neben dem Haupteingang.
- Bitte versehen Sie jedes Blatt Ihrer Lösung mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer, dem Termin und den Namen des Tutors der Übungsgruppe in der Ihre Lösungen zurückgegeben werden sollen.
- Gruppenabgaben von maximal drei Studierenden sind möglich.
- Bitte tackern Sie Ihre abgegebenen Lösungen zusammen.
- Die erste Klausur findet am Donnerstag, 25.07.2019, zwischen 13 und 15:30 Uhr statt.
- Die Studienleistung erbringen Sie
  - durch regelmäßige und aktive Teilnahme an den Übungen,
  - durch erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.