Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Lösung zur Aufgabe 4 von Übungsblatt 2

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 4. Wir betrachten den Restklassenkörper $\mathbb{F}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ als eine Gerade auf der die Punkte $0,1,2,3,4$ liegen. Wir definieren eine dreistellige Relation $\cdot|\cdot|\cdot$ auf $\mathbb{F}_5$: Für $a,b,c \in \mathbb{F}_5$ gelte $a|b|c$ genau dann, wenn $a \neq c$ und $b = 3(a+c)$.

(a) Überprüfen Sie, dass $\cdot|\cdot|\cdot$ den Anordnungsaxiomen **(A1)–(A3)** genügt.

(b) Finden Sie $a,b,c,d \in \mathbb{F}_5$ derart, dass $a|b|c$ und $b|c|d$ gilt, aber nicht $a|b|d$.

(je 5 Punkte)

- Lösung (a):
  - **(A1)**: Die Punkte mit $a|b|c$ sollen nach Voraussetzung kollinear sein und es gilt $a \neq c$. Angenommen es gilt $a = b$. Dann folgt aus $b = 3(a+c)$, dass $a = 3a + 3c$, was auf $a = c$ führt – ein Widerspruch. Wir erhalten $a \neq b$ und analog auch $c \neq b$, so dass die Punkte a, b, c paarweise verschieden sind. Offensichtlich gilt wegen $a + c = c + a$ auch $b = 3(c + a)$, also $c|b|a$.
  - **(A2)**: Seien $a, c \in \mathbb{F}_5$ gegeben, $a \neq c$. Setze $b = 3(a+c)$. Dann gilt nach Definition $a|b|c$. Setze $d = 4a + 2c$. Wir berechen

    $$3(a + d) = 3a + 12a + 6c = c.$$

    Also gilt $a|c|d$.
  - **(A3)**: Seien $a, b, c \in \mathbb{F}_5$ paarweise verschieden. Es gibt zum Glück nur 10 solcher Tripel und wir können die Aussagen $a|b|c$, $b|c|a$, $c|a|b$ tabelarisch listen:

(a,b,c)	$a\|b\|c$	$b\|c\|a$	$c\|a\|b$
(0,1,2)	ja	nein	nein
(0,1,3)	nein	ja	nein
(0,1,4)	nein	nein	ja
(0,2,3)	nein	nein	ja
(0,2,4)	ja	nein	nein
(0,3,4)	nein	ja	nein
(1,2,3)	ja	nein	nein
(1,2,4)	nein	ja	nein
(1,3,4)	nein	nein	ja
(2,3,4)	ja	nein	nein

    Da in jeder Zeile genau ein “ja” steht, d.h. für jedes Tripel (a, b, c) von paarweise verschiedenen Punkten genau eine der Aussagen $a|b|c$, $b|c|a$, $c|a|b$ gilt, ist **(A3)** erfüllt.

- Lösung (b):
  - Wir schauen uns die Tabelle aus (a) an und sehen: es gilt $0|1|2$ und $1|2|3$ aber nicht $0|1|3$.