Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Übungsblatt 3

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass in jeder angeordneten Inzidenzebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot)$ die folgenden Aussagen gelten.

(a) Gelten für $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E} \in \mathcal{E}$ die Beziehungen $\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{C}$, $\mathbf{A}|\mathbf{D}|\mathbf{E}$ und $\mathbf{AB} \neq \mathbf{AD}$, so schneiden sich die Strecken $\overline{\mathbf{CD}}$ und $\overline{\mathbf{BE}}$ in einem Punkt $\mathbf{S}$. (5 Punkte)

(b) Zu $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{E}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$, gibt es keine Punkte $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in \overline{\mathbf{AB}}$ mit $\mathbf{C}|\mathbf{A}|\mathbf{D}$. (5 Punkte)

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Punkte $\mathbf{A} = 2 + 2i$, $\mathbf{B} = 7 + 3i$ im Halbebenenmodell $\mathbb{H}^2$ der hyperbolischen Ebene.

(a) Zeigen Sie, dass die Punkte $\mathbf{C} = 1 + i$, $\mathbf{D} = 4 + 2i$ und $\mathbf{E} = 4 + 6i$ nicht auf der (hyperbolischen) Geraden $\mathbf{g} = \mathbf{AB}$ liegen und untersuchen Sie, welche der Aussagen $(\mathbf{C}, \mathbf{D})|_{\mathbf{g}}$, $(\mathbf{C}, \mathbf{E})|_{\mathbf{g}}$ und $(\mathbf{D}, \mathbf{E})|_{\mathbf{g}}$ gelten. Berechnen Sie im Fall, dass die beiden Punkte nicht auf derselben Seite von $\mathbf{g}$ liegen, den Schnittpunkt der Verbindungsstrecke der Punkte mit $\mathbf{g}$. (7 Punkte)

(b) Untersuchen Sie, ob die Punkte $\mathbf{C}' = 3 + 3i$, $\mathbf{D}' = 2 + 3i$ und $\mathbf{E}' = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ auf dem Strahl $\vec{\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ oder auf dem Strahl $\vec{\mathbf{S}}(\mathbf{B}, \mathbf{A})$ liegen. (3 Punkte)

Aufgabe 3. In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ betrachten wir die Punkte $\mathbf{A} = (2, 3)$, $\mathbf{B} = (10, 19)$, $\mathbf{C} = (16, 1)$ und eine Gerade $\mathbf{g}$, auf der keiner der Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ liegt. Da $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ in allgemeiner Lage sind, schneidet $\mathbf{g}$ nach dem Satz von Pasch keine oder genau zwei der Strecken $\overline{\mathbf{AB}}$, $\overline{\mathbf{BC}}$, $\overline{\mathbf{CA}}$. Untersuchen Sie, welcher dieser Fälle für $\mathbf{g} = \{\mathbf{S} + t\vec{\mathbf{v}} : t \in \mathbb{R}\}$ mit

(a) $\mathbf{S} = (-1, 12)$, $\vec{\mathbf{v}} = (7, -1)$, (5 Punkte)

(b) $\mathbf{S} = (1, 2)$, $\vec{\mathbf{v}} = (3, 6)$, (5 Punkte)

eintritt, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Schnittpunkte der Strecken mit $\mathbf{g}$.

Aufgabe 4. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot)$ eine angeordnete Inzidenzebene, sei $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$ und seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathbf{g}$ paarweise verschiedene Punkte.

(a) Beweisen Sie die Implikation

$$\mathbf{B} \in \overline{\mathbf{AC}} \text{ und } \mathbf{C} \in \overline{\mathbf{BD}} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\mathbf{AB}} \cup \overline{\mathbf{BC}} \cup \overline{\mathbf{CD}} = \overline{\mathbf{AD}}.$$

(4 Punkte)

(b) Untersuchen Sie, ob auch die Umkehrung der Implikation aus (a) gilt. (3 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass von $\mathbf{A}$ verschiedene Punkte $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathbf{g}$ existieren, so dass gilt

$$\vec{\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{S}) \cap \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{T}) = \{\mathbf{A}\} \quad \text{und} \quad \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{S}) \cup \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{T}) = \mathbf{g}.$$

(3 Punkte)

BITTE DIE HINWEISE AUF DER RÜCKSEITE BEACHTEN!

- Abgabe der Lösungen bis Donnerstag, 02.05.2019, um 08:10 Uhr in das Fach 170 im Lichthof neben dem Haupteingang.
- Bitte versehen Sie jedes Blatt Ihrer Lösung mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer, dem Termin und den Namen des Tutors der Übungsgruppe in der Ihre Lösungen zurückgegeben werden sollen.
- Gruppenabgaben von maximal drei Studierenden sind möglich.
- Bitte tackern Sie Ihre abgegebenen Lösungen zusammen.
- Die Studienleistung erbringen Sie
  - durch regelmäßige und aktive Teilnahme an den Übungen,
  - durch erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.