Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Übungsblatt 4

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 1. (a) Beweisen Sie, dass im affinen Modell der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ jede Gerade, die das Innere eines Winkels schneidet, auch den Winkel selbst schneidet. (5 Punkte)

(b) Geben Sie im Halbebenenmodell $\mathbb{H}^2$ der hyperbolischen Ebene drei nicht kollineare Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ und eine Gerade $\mathbf{g}$ mit $\mathbf{g} \subseteq \text{Int}(\angle_{\mathbf{ABC}})$ an. (5 Punkte)

Aufgabe 2. (a) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ drei nicht kollineare Punkte einer angeordneten Inzidenzebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot)$. Beweisen Sie, dass das Innere $\text{Int}(\Delta_{\mathbf{ABC}})$ des Dreiecks $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ nicht leer ist. (5 Punkte)

(b) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ drei nicht kollineare Punkte der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ und sei $\mathbf{P} \in \mathbb{E}^2$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{P} \in \text{Int}(\Delta_{\mathbf{ABC}})$ genau dann, wenn es positive reelle Zahlen $p_{\mathbf{A}}, p_{\mathbf{B}}, p_{\mathbf{C}}$ gibt mit $p_{\mathbf{A}} + p_{\mathbf{B}} + p_{\mathbf{C}} = 1$ und

$$\mathbf{P} = p_{\mathbf{A}}\mathbf{A} + p_{\mathbf{B}}\mathbf{B} + p_{\mathbf{C}}\mathbf{C}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot)$ eine angeordnete Inzidenzebene und $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist $\mathbf{A} \in \mathcal{E} \setminus \mathbf{g}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{g}$ und $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ ein Punkt mit $\mathbf{A}|\mathbf{P}|\mathbf{B}$, so gilt $(\mathbf{A}, \mathbf{P})|_{\mathbf{g}}$. (5 Punkte)

(b) Sind $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{E} \setminus \mathbf{g}$ verschieden und gilt $\mathbf{A} \in [\mathbf{B}]_{\mathbf{g}}$, so ist $\overline{\mathbf{AB}} \subseteq [\mathbf{B}]_{\mathbf{g}}$. (5 Punkte)

Aufgabe 4. Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ drei nicht kollineare Punkte einer angeordneten Inzidenzebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot)$.

(a) Seien $\mathbf{A}^*, \mathbf{C}^* \in \mathcal{E}$ mit $\mathbf{A}^*|\mathbf{B}|\mathbf{A}$ sowie $\mathbf{C}^*|\mathbf{B}|\mathbf{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\text{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}}) = [\mathbf{A}^*]_{\mathbf{BC}} \cup [\mathbf{C}^*]_{\mathbf{BA}}.$$

(5 Punkte)

(b) Seien $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \text{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}})$, $\mathbf{P} \neq \mathbf{Q}$. Zeigen Sie, dass ein Punkt $\mathbf{R} \in \mathcal{E}$ existiert, so dass $\overline{\mathbf{PR}} \cup \overline{\mathbf{RQ}} \subseteq \text{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}})$. (5 Punkte)

BITTE DIE HINWEISE AUF DER RÜCKSEITE BEACHTEN!

- Abgabe der Lösungen bis Donnerstag, 09.05.2019, um 08:10 Uhr in das Fach 170 im Lichthof neben dem Haupteingang.
- Bitte versehen Sie jedes Blatt Ihrer Lösung mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer, dem Termin und den Namen des Tutors der Übungsgruppe in der Ihre Lösungen zurückgegeben werden sollen.
- Gruppenabgaben von maximal drei Studierenden sind möglich.
- Bitte tackern Sie Ihre abgegebenen Lösungen zusammen.
- Die Studienleistung erbringen Sie
  - durch regelmäßige und aktive Teilnahme an den Übungen,
  - durch erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.