Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Übungsblatt 6

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 1. In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ betrachten wir die Punkte

$$\mathbf{A}_1 = (-2,-2),\ \mathbf{B}_1 = (1,2),\ \mathbf{C}_1 = (2,-5),\ \mathbf{A}_2 = (6,9),\ \mathbf{B}_2 = (3,5),$$

$$\mathbf{C}_2 = (7,2),\ \mathbf{A}_3 = (-1,-2),\ \mathbf{B}_3 = (1,-1),\ \mathbf{C}_3 = (1,1).$$

Untersuchen Sie, ob

(a) die Dreiecke $\Delta_{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1}$ und $\Delta_{\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2}$, (5 Punkte)

(b) die Dreiecke $\Delta_{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1}$ und $\Delta_{\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3}$ (5 Punkte)

kongruent sind.

Aufgabe 2. Sei $(\mathcal{E},\mathcal{G},\cdot|\cdot|\cdot),\equiv)$ eine Hilbert-Ebene und $\mathbf{S}\in\mathcal{E}$. Wir definieren die *Punktspiegelung* $\Phi_\mathbf{S}:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ wie folgt: Es gelte

$$\Phi_\mathbf{S}(\mathbf{S}) = \mathbf{S} \quad \text{und} \quad \Phi_\mathbf{S}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}' \quad \text{für } \mathbf{P}\neq\mathbf{S},$$

wobei $\mathbf{P}'$ der (nach **(K1)** und Satz 3.2.2) eindeutig bestimmte Punkt mit $\mathbf{P}|\mathbf{S}|\mathbf{P}'$ und $\overline{\mathbf{SP}}\equiv\overline{\mathbf{SP'}}$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi_\mathbf{S}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$ genau dann, wenn $\mathbf{P} = \mathbf{S}$. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $\Phi_\mathbf{S}(\Phi_\mathbf{S}(\mathbf{P})) = \mathbf{P}$ für alle $\mathbf{P}\in\mathcal{E}$. (2 Punkte)

(c) Seien $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{E}$ verschiedene Punkte. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathbf{A}' = \Phi_\mathbf{S}(\mathbf{A})$ und $\mathbf{B}' = \Phi_\mathbf{S}(\mathbf{B})$ verschieden sind und $\overline{\mathbf{A'B'}}\equiv\overline{\mathbf{AB}}$ gilt. (3 Punkte)

(d) Seien $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in\mathcal{E}$ in allgemeiner Lage. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathbf{A}' = \Phi_\mathbf{S}(\mathbf{A})$, $\mathbf{B}' = \Phi_\mathbf{S}(\mathbf{B})$ und $\mathbf{C}' = \Phi_\mathbf{S}(\mathbf{C})$ in allgemeiner Lage sind und $\angle_{\mathbf{ABC}}\equiv\angle_{\mathbf{A'B'C'}}$ gilt. (3 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ein Dreieck in einer Hilbert-Ebene $(\mathcal{E},\mathcal{G},\cdot|\cdot|\cdot),\equiv)$ mit $\angle_{\mathbf{CAB}}\equiv\angle_{\mathbf{CBA}}$. Zeigen Sie, dass $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ gleichschenklig mit Basis $\overline{\mathbf{AB}}$ ist. (10 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $(\mathcal{E},\mathcal{G},\cdot|\cdot|\cdot),\equiv)$ eine Hilbert-Ebene.

(a) Seien $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{E}$ verschiedene Punkte. Zeigen Sie, dass es einen eindeutig bestimmten Punkt $\mathbf{M}\in\mathcal{E}$ gibt mit $\mathbf{A}|\mathbf{M}|\mathbf{B}$ und $\overline{\mathbf{AM}}\equiv\overline{\mathbf{BM}}$. (5 Punkte)

(b) Sei $\angle_{\mathbf{ABC}}$ ein Winkel. Zeigen Sie, dass es einen eindeutig bestimmten Strahl $\vec{\mathbf{S}}(\mathbf{B},\mathbf{P})$ mit $\mathbf{P}\in\operatorname{Int}(\angle_{\mathbf{ABC}})$ gibt, so dass $\angle_{\mathbf{ABP}}\equiv\angle_{\mathbf{PBC}}$. (5 Punkte)

BITTE DIE HINWEISE AUF DER RÜCKSEITE BEACHTEN!

- Abgabe der Lösungen bis Donnerstag, 23.05.2019, um 08:10 Uhr in das Fach 170 im Lichthof neben dem Haupteingang.
- Bitte versehen Sie jedes Blatt Ihrer Lösung mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer, dem Termin und den Namen des Tutors der Übungsgruppe in der Ihre Lösungen zurückgegeben werden sollen.
- Gruppenabgaben von maximal drei Studierenden sind möglich.
- Bitte tackern Sie Ihre abgegebenen Lösungen zusammen.
- Die Studienleistung erbringen Sie
  - durch regelmäßige und aktive Teilnahme an den Übungen,
  - durch erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.