Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Übungsblatt 7

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 1. In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ betrachten wir die Punkte $\mathbf{A} = (5, 2)$, $\mathbf{B} = (-3, 6)$ und $\mathbf{C} = (6, 9)$.

(a) Bestimmen Sie $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \kappa_1 x + \kappa_2 y + \kappa_3 = 0\}$$

das senkrechte Lot von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{AB}$ ist. (3 Punkte)

(b) Berechnen Sie den Lotfußpunkt des senkrechten Lots von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{AB}$. (2 Punkte)

Aufgabe 2. Im Halbebenenmodell $\mathbb{H}^2$ der hyperbolischen Ebene betrachten wir die Punkte $\mathbf{A} = -2 + 12i$, $\mathbf{B} = 15 + 5i$, $\mathbf{C} = 15 + 11i$, $\mathbf{D} = 13 + 2i$. Berechnen Sie

(a) den Mittelpunkt und den Radius des Orthokreises, der die Senkrechte zu $\mathbf{AB}$ durch $\mathbf{A}$ ist, (3 Punkte)

(b) den Lotfußpunkt des senkrechten Lots von $\mathbf{D}$ auf $\mathbf{BC}$. (2 Punkte)

Aufgabe 3. (a) Sei $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^2$ mit $||\vec{\mathbf{v}}|| = 1$, $c \in \mathbb{R}$ und $s_{\mathbf{g}} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ die Spiegelung in der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ an der Geraden $\mathbf{g} = \{\mathbf{P} \in \mathbb{E}^2 : \langle \mathbf{P}, \vec{\mathbf{v}} \rangle = c\}$. Für alle $\mathbf{X} \in \mathbb{E}^2$ ist also $s_{\mathbf{g}}(\mathbf{X})$ der Spiegelungspunkt von $\mathbf{X}$ an $\mathbf{g}$. Zeigen Sie, dass

$$s_{\mathbf{g}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - 2(\langle \mathbf{X}, \vec{\mathbf{v}} \rangle - c)\vec{\mathbf{v}}.$$

(5 Punkte)

(b) Sei $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$ und $\tau_{\vec{\mathbf{u}}} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ die *Translation* um $\vec{\mathbf{u}}$, d.h. $\tau_{\vec{\mathbf{u}}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \vec{\mathbf{u}}$ für alle $\mathbf{X} \in \mathbb{E}^2$. Zeigen Sie, dass es zwei euklidische Geraden $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \subseteq \mathbb{E}^2$ gibt, so dass $\tau_{\vec{\mathbf{u}}} = s_{\mathbf{g}_1} \circ s_{\mathbf{g}_2}$. (5 Punkte)

Aufgabe 4. In einer Hilbertebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ seien eine Gerade $\mathbf{g}$ und zwei Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{E} \setminus \{\mathbf{g}\}$ mit $(\mathbf{A}, \mathbf{B})|_{\mathbf{g}}$ gegeben. Für die Lotfußpunkte $\mathbf{L_A}$ und $\mathbf{L_B}$ von $\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{B}$ auf $\mathbf{g}$ gelte $\mathbf{L_A} \neq \mathbf{L_B}$. Die Spiegelungspunkte von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ an $\mathbf{g}$ seien $\mathbf{A}'$ bzw. $\mathbf{B}'$. Außerdem sei $\mathbf{S}$ der Schnittpunkt der Geraden $\mathbf{AL_B}$ und $\mathbf{BL_A}$ und $\mathbf{S}'$ der Schnittpunkt der Geraden $\mathbf{A'L_B}$ und $\mathbf{B'L_A}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Strecken $\overline{\mathbf{AB}}$ und $\overline{\mathbf{A'B'}}$ sind kongruent. (5 Punkte)

(b) Der Punkt $\mathbf{S}'$ ist der Spiegelungspunkt von $\mathbf{S}$ an $\mathbf{g}$. (5 Punkte)

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass in einer Hilbertebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ die folgenden Aussagen gelten.

(a) Sei $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$ eine Gerade und $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{E} \setminus \mathbf{g}$ zwei Punkte mit $\mathbf{B} \notin [\mathbf{A}]_{\mathbf{g}}$. Außerdem sei $\mathbf{h} \in \mathcal{G}$ eine Parallele zu $\mathbf{g}$ durch $\mathbf{B}$. Dann ist $\mathbf{C} \in [\mathbf{A}]_{\mathbf{h}}$ für jeden Punkt $\mathbf{C} \in \mathbf{g}$. (5 Punkte)

(b) Zu endlich vielen Punkten $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n \in \mathcal{E}$ exisitert eine Gerade $\mathbf{g}$ derart, dass $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ auf derselben Seite von $\mathbf{g}$ liegen. (5 Punkte)

BITTE DIE HINWEISE AUF DER RÜCKSEITE BEACHTEN!

- Abgabe der Lösungen bis **Montag, 03.06.2019, um 10:00 Uhr** in das Fach 170 im Lichthof neben dem Haupteingang.
- Bitte versehen Sie jedes Blatt Ihrer Lösung mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer, dem Termin und den Namen des Tutors der Übungsgruppe in der Ihre Lösungen zurückgegeben werden sollen.
- Gruppenabgaben von maximal drei Studierenden sind möglich.
- Bitte tackern Sie Ihre abgegebenen Lösungen zusammen.
- Die Studienleistung erbringen Sie
  - durch regelmäßige und aktive Teilnahme an den Übungen,
  - durch erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.