Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Lösungen zu Aufgabe 5 und 6 von Übungsblatt 8

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 5. (a) In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ betrachten wir die Punkte $\mathbf{M} = (3, 5)$, $\mathbf{A} = (15, 10)$ und den Kreis $K = K(\mathbf{M}, \overline{\mathbf{MA}})$. Zeigen Sie, dass durch den Punkt $\mathbf{C} = (15, 15)$ genau zwei Tangenten von K verlaufen, und berechnen Sie die Berührpunkte dieser beiden Tangenten mit K. (4 Punkte)

(b) Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ eine Hilbertebene. Zeigen Sie, dass zu jeder Geraden $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$ und jedem Punkt $\mathbf{A} \in \mathcal{G}$ mit $\mathbf{A} \notin \mathbf{g}$ genau ein Kreis mit Mittelpunkt $\mathbf{A}$ existiert, der $\mathbf{g}$ als Tangente hat. (2 Punkte)

(c) Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ eine Hilbertebene. Zeigen Sie, dass jeder Kreis $K \subseteq \mathcal{E}$ unendlich viele Punkte enthält. (2 Punkte)

- Lösung (a):
  - Der Kreis K ist durch
  $$K = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2 : ||\mathbf{P} - \mathbf{M}||^2 = 169\}$$
  gegeben. Wegen $||\mathbf{C} - \mathbf{M}||^2 = 244 > 169$ liegt $\mathbf{C}$ im Äusseren von K, so dass genau zwei Tangenten von K durch C existieren.
  - Aus Symmetriegründen bietet es sich an einen Tangentenberührpunkt $\mathbf{B}$ als Linearkombination der Basisvektoren
  $$\mathbf{C} - \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\mathbf{C} - \mathbf{M})^\perp = \begin{pmatrix} -10 \\ 12 \end{pmatrix}$$
  zu schreiben: Setze
  $$\mathbf{B} = \mathbf{M} + \alpha(\mathbf{C} - \mathbf{M}) + \beta(\mathbf{C} - \mathbf{M})^\perp.$$
  - Setzen wir diese Darstellung von $\mathbf{B}$ in die Gleichungen
  $$||\mathbf{B} - \mathbf{M}||^2 = 169 \quad \text{und}$$
  $$\langle \mathbf{B} - \mathbf{M}, \mathbf{B} - \mathbf{C} \rangle = 0$$
  ein, welche die beiden Tangentenberührpunkte charakterisieren, so bekommen wir die Gleichungen
  $$169 = (\alpha^2 + \beta^2)||\mathbf{C} - \mathbf{M}||^2 = 244(\alpha^2 + \beta^2) \quad \text{und}$$
  $$0 = \langle \alpha(\mathbf{C} - \mathbf{M}) + \beta(\mathbf{C} - \mathbf{M})^\perp, (\alpha - 1)(\mathbf{C} - \mathbf{M}) + \beta(\mathbf{C} - \mathbf{M})^\perp \rangle = 244(\alpha(\alpha - 1) + \beta^2).$$
  Also muss gelten
  $$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{169}{244} \quad \text{und} \quad \alpha(\alpha - 1) + \beta^2 = 0.$$

– Es folgt

$$\alpha = \frac{169}{244} \quad \text{und} \quad \beta = \pm\sqrt{\frac{169}{244} - \frac{169^2}{244^2}}$$

und die beiden Tangentenberührpunkte ergeben sich zu

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{169}{244}\begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{169}{244} - \frac{169^2}{244^2}}\begin{pmatrix} -10 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

- Lösung (b):

  – Sei $\mathbf{l}$ das senkrechte Lot von $\mathbf{A}$ auf $\mathbf{g}$ und sei $\mathbf{L_A} \in \mathbf{g}$ der zugehörige Lotfußpunkt.

  – Zur Existenz: Betrachte den Kreis $K = K(\mathbf{A}, \overline{\mathbf{AL_A}})$. Da nach Konstruktion $\mathbf{g}$ senkrecht zu $\mathbf{l} = \mathbf{AL_A}$ im Punkt $\mathbf{L_A} \in K$ ist, ist nach Satz 3.6.5 die Gerade $\mathbf{g}$ die Tangente zu K durch $\mathbf{L_A}$.

  – Zur Eindeutigkeit: Sei K' ein weiterer Kreis mit Mittelpunkt $\mathbf{A}$ und Tangente $\mathbf{g}$. Sei $\mathbf{P} \in K' \cap \mathbf{g}$ der Tangentenberührpunkt. Dann ist nach Satz 3.6.5 $\mathbf{g}$ die Senkrechte zu $\mathbf{AP}$ im Punkt $\mathbf{P}$.

  – Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{L_A}$ folgt $K = K'$ und wir sind fertig. Wenn $\mathbf{P} \neq \mathbf{L_A}$ hätte das Dreieck $\Delta_{\mathbf{PL_AA}}$ zwei rechte Winkel $\angle_{\mathbf{APL_A}}$ und $\angle_{\mathbf{AL_AP}}$ – ein Widerspruch.

- Lösung (c):

  – Sei $\mathbf{P} \in K$ und $\mathbf{g}$ die Tangente an K durch $\mathbf{P}$ (Existenz nach Satz 3.6.5).

  – Zu jedem $\mathbf{X} \in \mathbf{g}$ betrachten wir den Strahl $\vec{S}(\mathbf{M}, \mathbf{X})$, wobei $\mathbf{M}$ der Mittelpunkt von K ist. Sei $f(\mathbf{X}) \in K$ der eindeutige Schnittpunkt von K und $\vec{S}(\mathbf{M}, \mathbf{X})$. Wir haben also eine Abbildung $f : \mathbf{g} \to K$ definiert.

  – Wir zeigen, dass f injektiv ist: Angenommen es gilt $f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}')$ für $\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in \mathbf{g}$, $\mathbf{X} \neq \mathbf{X}'$. Dann gilt

  $$\mathbf{MX} = \mathbf{M}f(\mathbf{X}) = \mathbf{M}f(\mathbf{X}') = \mathbf{MX}'$$

  und somit $\mathbf{M} \in \mathbf{XX}' = \mathbf{g}$. Das ist ein Widerspruch. Damit folgt, dass f injektiv ist.

  – Weil $\mathbf{g}$ unendlich viele Punkte enthält, enthält dann auch K unendlich viele Punkte was zu zeigen war.

Aufgabe 6. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ eine Hilbertebene.

(a) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1 \in \mathcal{E}$ mit $\mathbf{B}_0$ der Mittelpunkt von $\overline{\mathbf{AB}_1}$, $\mathbf{C}_1$ der Mittelpunkt von $\overline{\mathbf{AC}_0}$ und $\mathbf{B}_0|\mathbf{C}_0|\mathbf{B}_1$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}|\mathbf{C}_1|\mathbf{B}_0$. (3 Punkte)

Sei nun $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ sogar eine absolute Geometrie (d.h. es gelten zusätzlich die Vollständigkeitsaxiome **(V1)** und **(V2)**). Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{E}$ mit $\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{C}$. Betrachten Sie die Folge $(\mathbf{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}$, iterativ definiert durch die Bedingungen, dass $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}$ und $\mathbf{C}_{n+1}$ der Mittelpunkt von $\overline{\mathbf{AC}_n}$ ist. Sei $(\mathbf{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge aus $\mathcal{E}$, iterativ definiert durch die Bedingungen $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}$, $\mathbf{A}|\mathbf{B}_n|\mathbf{B}_{n+1}$ und $\overline{\mathbf{B}_n\mathbf{B}_{n+1}} \equiv \overline{\mathbf{AB}}$.

(b) Zeigen Sie, dass es eine kleinste Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, mit der Eigenschaft, dass $\mathbf{A}|\mathbf{C}|\mathbf{B}_{n_0}$. (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie (z.B. durch Induktion über die Zahl n_0 aus (b)), dass ein $m_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $\mathbf{A}|\mathbf{C}_{m_0}|\mathbf{B}$. (3 Punkte)

- Lösung (a):
  - Aus der Viererrelation folgt sofort $\mathbf{A}|\mathbf{C_1}|\mathbf{B_1}$. Insbesondere gilt genau eine der Aussagen $\mathbf{A}|\mathbf{C_1}|\mathbf{B_0}$, $\mathbf{A}|\mathbf{B_0}|\mathbf{C_1}$ oder $\mathbf{C_1} = \mathbf{B_0}$. Im letzten Falle tragen wir die Strecke $\overline{\mathbf{AC_1}}$ am Strahle $\vec{S}(\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1)$ kongruent ab. Aus der Eindeutigkeit der Streckenabtragung erhalten wir den Widerspruch $\mathbf{C_0} = \mathbf{B_1}$. Im Falle $\mathbf{A}|\mathbf{B_0}|\mathbf{C_1}$ gilt offenbar $\overline{\mathbf{C_1C_0}} \prec \overline{\mathbf{B_0B_1}}$. Daraus folgt

    $$\overline{\mathbf{AC_1}} \equiv \overline{\mathbf{C_1C_0}} \prec \overline{\mathbf{B_0B_1}} \equiv \overline{\mathbf{AB_0}},$$

    also $\mathbf{A}|\mathbf{C_1}|\mathbf{B_0}$. Dies widerspricht unserer Annahme $\mathbf{A}|\mathbf{B_0}|\mathbf{C_1}$. Also bleibt nur die Möglichkeit $\mathbf{A}|\mathbf{C_1}|\mathbf{B_0}$ übrig.

- Lösung (b):
  - Diese Aussage ist eine direkte Konsequenz des Archimedischen Axioms.

- Lösung (c):
  - Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ definiert wie in Aufgabenteil (b). Ist $n_0 = 1$, so folgt die Aussage sofort aus Teil (a). Angenommen, wir haben die Aussage für alle $n < n_0$ bereits bewiesen. Wir behaupten nun, daß die kleinste Zahl $n_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit der Eigenschaft, daß $\mathbf{A}|\mathbf{C_1}|\mathbf{B}_{n_1}$ gilt, echt kleiner als n_0 ist. Das stimmt auf jeden Fall falls $\mathbf{A}|\mathbf{C_1}|\mathbf{B}$ (also $n_1 = 0$) gilt. Nun nehmen wir $n_1 > 0$ an. Wegen $\mathbf{A}|\mathbf{C}_1|\mathbf{C}$ gilt auf jeden Fall $n_1 \leq n_0$. Angenommen, $n_0 = n_1$. Dann folgt $\overline{\mathbf{AC_1}} \equiv \overline{\mathbf{C_1C}} \prec \overline{\mathbf{B}_{n_0-1}\mathbf{B}_{n_0}} \equiv \overline{\mathbf{AB_0}}$, also auch $\mathbf{A}|\mathbf{C_1}|\mathbf{B}$, was $n_1 = 0$ bedeuten würde. Also muß $n_1 < n_0$ sein; somit folgt die Behauptung mit starker Induktion.