Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Übungsblatt 9

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 1. In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ seien eine Gerade $\mathbf{g} \subseteq \mathbb{E}^2$ und Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{E}^2 \setminus \mathbf{g}$ gegeben, so dass $[\mathbf{A}]_\mathbf{g} = [\mathbf{B}]_\mathbf{g}$ und die Lotfußpunkte $\mathbf{L_A}, \mathbf{L_B} \in \mathbf{g}$ von $\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{B}$ auf $\mathbf{g}$ verschieden voneinander sind. Sei $\mathbf{C}$ der Schnittpunkt von $\overline{\mathbf{AL_B}}$ und $\overline{\mathbf{BL_A}}$ und $\mathbf{L_C}$ der Lotfußpunkt von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{g}$. Es gelte $|\overline{\mathbf{AL_A}}| = 3$ und $|\overline{\mathbf{BL_B}}| = 5$. Berechnen Sie $|\overline{\mathbf{CL_C}}|$.
(10 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $\phi_{\mathbf{Z},\lambda} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ die in der Vorlesung eingeführte zentrische Streckung mit Streckzentrum $\mathbf{Z} \in \mathbb{E}^2$ und Streckfaktor $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $\phi_{\mathbf{Z},\lambda}(\mathbf{P}) = \mathbf{Z} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{ZP}}$ für alle $\mathbf{P} \in \mathbb{E}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass $\phi_{\mathbf{Z},\lambda} \circ \phi_{\mathbf{Z},\mu} = \phi_{\mathbf{Z},\lambda\mu}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sowie $\phi^{-1}_{\mathbf{Z},\lambda} = \phi_{\mathbf{Z},1/\lambda}$ für $\lambda \neq 0$.
(2 Punkte)

Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{E}^2$ und bezeichne $\mathbf{A}' = \phi_{\mathbf{Z},\lambda}(\mathbf{A})$, $\mathbf{B}' = \phi_{\mathbf{Z},\lambda}(\mathbf{B})$ und $\mathbf{C}' = \phi_{\mathbf{Z},\lambda}(\mathbf{C})$.

(b) Zeigen Sie $\overrightarrow{\mathbf{A'B'}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, $\langle\overrightarrow{\mathbf{B'A'}}, \overrightarrow{\mathbf{B'C'}}\rangle = \lambda^2\langle\overrightarrow{\mathbf{BA}}, \overrightarrow{\mathbf{BC}}\rangle$ und $|\overline{\mathbf{A'B'}}| = |\lambda||\overline{\mathbf{AB}}|$ (falls $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ und $\lambda \neq 0$).
(2 Punkte)

(c) Sei $\lambda \neq 0$ und $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ nicht kollinear. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$ nicht kollinear sind und $\angle_{\mathbf{A'B'C'}} \equiv \angle_{\mathbf{ABC}}$.
(3 Punkte)

(d) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ nicht kollinear und $\Delta_{\mathbf{A''B''C''}}$ ein Dreieck mit $\angle_{\mathbf{ABC}} \equiv \angle_{\mathbf{A''B''C''}}$, $\angle_{\mathbf{BCA}} \equiv \angle_{\mathbf{B''C''A''}}$ und $\angle_{\mathbf{CAB}} \equiv \angle_{\mathbf{C''A''B''}}$. Beweisen Sie, dass $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ und $\Delta_{\mathbf{A''B''C''}}$ ähnlich sind (d.h. beweisen Sie den Ähnlichkeitssatz 5.3.6), indem Sie den Streckfaktor λ geeignet wählen, so dass $\Delta_{\mathbf{A'B'C'}}$ und $\Delta_{\mathbf{A''B''C''}}$ kongruent sind.
(3 Punkte)

Aufgabe 3. Seien $\mathbf{P}, \mathbf{P}', \mathbf{Q}, \mathbf{Q}', \mathbf{R}, \mathbf{R}'$ Punkte in der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ mit $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}'$, $\mathbf{Q} \neq \mathbf{Q}'$ und $\mathbf{R} \neq \mathbf{R}'$. Außerdem seien die Geraden $\mathbf{PP}'$ und $\mathbf{QQ}'$ nicht parallel. Beweisen Sie, dass der Schnittpunkt $\mathbf{S}$ von $\mathbf{PP}'$ und $\mathbf{QQ}'$ genau dann auch auf der Geraden $\mathbf{RR}'$ liegt, wenn

$$0 = \det(\mathbf{P}, \mathbf{P}')\det(\mathbf{Q}' - \mathbf{Q}, \mathbf{R}' - \mathbf{R}) + \det(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}')\det(\mathbf{R}' - \mathbf{R}, \mathbf{P}' - \mathbf{P}) +$$
$$+\det(\mathbf{R}, \mathbf{R}')\det(\mathbf{P}' - \mathbf{P}, \mathbf{Q}' - \mathbf{Q}).$$

(10 Punkte)

Aufgabe 4. Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{E}^2$ drei Punkte in allgemeiner Lage, sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und sei

$$\mathbf{D} = \lambda\mathbf{B} + (1-\lambda)\mathbf{C}, \quad \mathbf{E} = \lambda\mathbf{C} + (1-\lambda)\mathbf{A}, \quad \mathbf{F} = \lambda\mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{B}.$$

(a) Zeigen Sie, dass keine zwei der Geraden $\mathbf{AD}$, $\mathbf{BE}$ und $\mathbf{CF}$ parallel sind.
(5 Punkte)

(b) Untersuchen Sie, für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sich die Geraden $\mathbf{AD}, \mathbf{BE}$ und $\mathbf{CF}$ in einem Punkt schneiden.
(5 Punkte)

BITTE DIE HINWEISE AUF DER RÜCKSEITE BEACHTEN!

- Abgabe der Lösungen bis Montag, 24.06.2019, um 10:00 Uhr in das Fach 170 im Lichthof neben dem Haupteingang.
- Bitte versehen Sie jedes Blatt Ihrer Lösung mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer, dem Termin und den Namen des Tutors der Übungsgruppe in der Ihre Lösungen zurückgegeben werden sollen.
- Gruppenabgaben von maximal drei Studierenden sind möglich.
- Bitte tackern Sie Ihre abgegebenen Lösungen zusammen.
- Die erste Klausur findet am Montag, 29.07.2019, zwischen 12:00 und 14:00 Uhr statt.
- Die Studienleistung erbringen Sie
  - durch regelmäßige und aktive Teilnahme an den Übungen,
  - durch erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.