Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Lösungen zu Aufgabe 3 und 4 von Übungsblatt 9

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 3. Seien $\mathbf{P}, \mathbf{P}', \mathbf{Q}, \mathbf{Q}', \mathbf{R}, \mathbf{R}'$ Punkte in der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ mit $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}'$, $\mathbf{Q} \neq \mathbf{Q}'$ und $\mathbf{R} \neq \mathbf{R}'$. Außerdem seien die Geraden $\mathbf{PP}'$ und $\mathbf{QQ}'$ nicht parallel. Beweisen Sie, dass der Schnittpunkt $\mathbf{S}$ von $\mathbf{PP}'$ und $\mathbf{QQ}'$ genau dann auch auf der Geraden $\mathbf{RR}'$ liegt, wenn

$$0 = \det(\mathbf{P}, \mathbf{P}')\det(\mathbf{Q}' - \mathbf{Q}, \mathbf{R}' - \mathbf{R}) + \det(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}')\det(\mathbf{R}' - \mathbf{R}, \mathbf{P}' - \mathbf{P}) + \\ + \det(\mathbf{R}, \mathbf{R}')\det(\mathbf{P}' - \mathbf{P}, \mathbf{Q}' - \mathbf{Q}).$$

(10 Punkte)

- Lösung:
  - Vorbemerkung: Wir werden in der Lösung dieser Aufgabe (und auch in der Lösung zur Aufgabe 4) die bekannten Eigenschaften der Determinante benutzen. Hier nochmal eine kurze Zusammenfassung: Für alle $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

    $$\det(\alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = \alpha \det(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{w}}) + \beta \det(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) \quad \text{(Linearität in der ersten Spalte)}$$

    $$\det(\vec{\mathbf{u}}, \alpha\vec{\mathbf{v}} + \beta\vec{\mathbf{w}}) = \alpha \det(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) + \beta \det(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{w}}) \quad \text{(Linearität in der zweiten Spalte)}$$

    sowie

    $$\det(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = -\det(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}}) \quad \text{(Antisymmetrie).}$$

    Beachte außerdem, dass gilt

    $$\det(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) \neq 0 \iff \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \text{ linear unabhängig.}$$

    All diese Aussagen lassen sich im $\mathbb{R}^2$ natürlich auch direkt aus der Definition

    $$\det(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

    folgern (für $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2), \vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$).
  - Im Folgenden benutzen wir außerdem die Schnittpunktformel aus Satz 5.3.13: Seien $\mathbf{g}_{\mathbf{A},\vec{\mathbf{v}}} = \mathbf{A} + \mathbb{R} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ und $\mathbf{g}_{\mathbf{B},\vec{\mathbf{w}}} = \mathbf{B} + \mathbb{R} \cdot \vec{\mathbf{w}}$ zwei nicht-parallele Geraden in $\mathbb{E}^2$ (d.h. $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ sind linear unabhängig) und sei $\mathbf{O} \in \mathbb{E}^2$ ein beliebiger Punkt. Dann ist der Schnittpunkt $\mathbf{S}$ von $\mathbf{g}_{\mathbf{A},\vec{\mathbf{v}}}$ und $\mathbf{g}_{\mathbf{B},\vec{\mathbf{w}}}$ durch die Gleichung

    $$\mathbf{S} = \mathbf{O} + \frac{1}{\det(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})} \left(\det(\overrightarrow{\mathbf{OB}}, \vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{v}} - \det(\overrightarrow{\mathbf{OA}}, \vec{\mathbf{v}})\vec{\mathbf{w}}\right)$$

    gegeben. Beachte, dass in der Vorlesung die Notation $[\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}] := \det(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})$ benutzt wurde. Desweiteren setzen wir $\mathbf{O} = (0, 0)$ und identifizieren jeden Punkt $\mathbf{P} \in \mathbb{E}^2$ mit seinem Verbindungsvektor $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \mathbf{P} - \mathbf{O}$. Obige Formel wird dann zu

    $$\mathbf{S} = \frac{1}{\det(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})} \left(\det(\mathbf{B}, \vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{v}} - \det(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{v}})\vec{\mathbf{w}}\right).$$

- Im Fall, dass $\mathbf{g}_{\mathbf{A},\vec{\mathbf{v}}} = \mathbf{PP'}$, also $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ und $\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{P'} - \mathbf{P}$, und $\mathbf{g}_{\mathbf{B},\vec{\mathbf{w}}} = \mathbf{QQ'}$, also $\mathbf{B} = \mathbf{Q}$ und $\vec{\mathbf{w}} = \mathbf{Q'} - \mathbf{Q}$, erhalten wir für den Schnittpunkt $\mathbf{S}$ von $\mathbf{PP'}$ und $\mathbf{QQ'}$ die Formel

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\det(\mathbf{P'}-\mathbf{P},\mathbf{Q'}-\mathbf{Q})}\big(\det(\mathbf{Q},\mathbf{Q'}-\mathbf{Q})(\mathbf{P'}-\mathbf{P}) - \det(\mathbf{P},\mathbf{P'}-\mathbf{P})(\mathbf{Q'}-\mathbf{Q})\big)$$
$$= \frac{1}{\det(\mathbf{P'}-\mathbf{P},\mathbf{Q'}-\mathbf{Q})}\big(\det(\mathbf{Q},\mathbf{Q'})(\mathbf{P'}-\mathbf{P}) - \det(\mathbf{P},\mathbf{P'})(\mathbf{Q'}-\mathbf{Q})\big).$$

- Dieser liegt auf $\mathbf{RR'}$ genau dann, wenn

$$\det(\mathbf{S},\mathbf{R'}-\mathbf{R}) = \det(\mathbf{R},\mathbf{R'}-\mathbf{R}) = \det(\mathbf{R},\mathbf{R'}).$$

Setzt man $\mathbf{S}$ aus obiger Gleichung ein, erhalten wir, dass $\mathbf{S}$ auf $\mathbf{RR'}$ liegt, genau dann, wenn

$$\det(\mathbf{R},\mathbf{R'}) =$$
$$= \frac{1}{\det(\mathbf{P'}-\mathbf{P},\mathbf{Q'}-\mathbf{Q})}\big(\det(\mathbf{Q},\mathbf{Q'})\det(\mathbf{P'}-\mathbf{P},\mathbf{R'}-\mathbf{R}) - \det(\mathbf{P},\mathbf{P'})\det(\mathbf{Q'}-\mathbf{Q},\mathbf{R'}-\mathbf{R})\big).$$

- Multipliziert man diese Gleichung noch mit $\det(\mathbf{P'}-\mathbf{P},\mathbf{Q'}-\mathbf{Q})$, ergibt sich nach umstellen der Terme die zu zeigende Gleichung.

Aufgabe 4. Seien $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C} \in \mathbb{E}^2$ drei Punkte in allgemeiner Lage, sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und sei

$$\mathbf{D} = \lambda\mathbf{B} + (1-\lambda)\mathbf{C}, \quad \mathbf{E} = \lambda\mathbf{C} + (1-\lambda)\mathbf{A}, \quad \mathbf{F} = \lambda\mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{B}.$$

(a) Zeigen Sie, dass keine zwei der Geraden **AD**, **BE** und **CF** parallel sind. (5 Punkte)

(b) Untersuchen Sie, für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sich die Geraden $\mathbf{AD}, \mathbf{BE}$ und **CF** in einem Punkt schneiden. (5 Punkte)

- Lösung (a):
  - Es gilt

$$\overrightarrow{\mathbf{AD}} = \mathbf{D} - \mathbf{A} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{AB}} + (1-\lambda)\overrightarrow{\mathbf{AC}},$$
$$\overrightarrow{\mathbf{BE}} = \mathbf{E} - \mathbf{B} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{BC}} + (1-\lambda)\overrightarrow{\mathbf{BA}},$$
$$\overrightarrow{\mathbf{CF}} = \mathbf{F} - \mathbf{C} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{CA}} + (1-\lambda)\overrightarrow{\mathbf{CB}}.$$

bzw. (mit $\overrightarrow{\mathbf{BC}} = \overrightarrow{\mathbf{AC}} - \overrightarrow{\mathbf{AB}}$, $\overrightarrow{\mathbf{BA}} = -\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, $\overrightarrow{\mathbf{CA}} = -\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ und $\overrightarrow{\mathbf{CB}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} - \overrightarrow{\mathbf{AC}}$)

$$\overrightarrow{\mathbf{BE}} = \mathbf{E} - \mathbf{B} = -\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{AC}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{CF}} = \mathbf{F} - \mathbf{C} = (1-\lambda)\overrightarrow{\mathbf{AB}} - \overrightarrow{\mathbf{AC}}.$$

  - Die Parallelität von **AD** und **BE** ist gleichbedeutend mit der linearen Abhängigkeit von den Richtungsvektoren $\overrightarrow{\mathbf{AD}}$ und $\overrightarrow{\mathbf{BE}}$. Weil beide Vektoren verschieden vom Nullvektor sind (da $\overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{AC}}$ bzw. $\overrightarrow{\mathbf{BC}}, \overrightarrow{\mathbf{BA}}$ jeweils linear unabhängig sind), bedeutet linear abhängig in dem Fall, dass ein $c \neq 0$ existiert mit

$$\overrightarrow{\mathbf{AD}} = c\overrightarrow{\mathbf{BE}},$$

also

$$\lambda\overrightarrow{\mathbf{AB}} + (1-\lambda)\overrightarrow{\mathbf{AC}} = -c\overrightarrow{\mathbf{AB}} + c\lambda\overrightarrow{\mathbf{AC}}.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $c = -\lambda$ und $c\lambda = 1-\lambda$, also, $-\lambda^2 = 1-\lambda$. Die Gleichung $0 = \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ hat allerdings keine reelle Lösungen. Dementsprechend sind $\mathbf{AD}$ und $\mathbf{BE}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ nicht parallel. Analog argumentiert man für die anderen Geradenpaare.

- Lösung (b):
  - Nach Aufgabe 3 schneiden sich die drei Geraden $\mathbf{AD}, \mathbf{BE}$ und $\mathbf{CF}$ genau dann in einem Punkt, wenn

    $$0 = \det(\mathbf{A},\mathbf{D})\det(\overrightarrow{\mathbf{BE}},\overrightarrow{\mathbf{CF}}) + \det(\mathbf{B},\mathbf{E})\det(\overrightarrow{\mathbf{CF}},\overrightarrow{\mathbf{AD}}) + +\det(\mathbf{C},\mathbf{F})\det(\overrightarrow{\mathbf{AD}},\overrightarrow{\mathbf{BE}}).$$

  - Mit

    $$\det(\overrightarrow{\mathbf{BE}},\overrightarrow{\mathbf{CF}}) = \det(-\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{AC}}, (1-\lambda)\overrightarrow{\mathbf{AB}} - \overrightarrow{\mathbf{AC}}) = (\lambda^2 - \lambda + 1)\det(\overrightarrow{\mathbf{AB}},\overrightarrow{\mathbf{AC}}),$$

    $$\det(\overrightarrow{\mathbf{CF}},\overrightarrow{\mathbf{AD}}) = \det((1-\lambda)\overrightarrow{\mathbf{AB}} - \overrightarrow{\mathbf{AC}}, \lambda\overrightarrow{\mathbf{AB}} + (1-\lambda)\overrightarrow{\mathbf{AC}}) = (\lambda^2 - \lambda + 1)\det(\overrightarrow{\mathbf{AB}},\overrightarrow{\mathbf{AC}}),$$
    $$\det(\overrightarrow{\mathbf{AD}},\overrightarrow{\mathbf{BE}}) = \det(\lambda\overrightarrow{\mathbf{AB}} + (1-\lambda)\overrightarrow{\mathbf{AC}}, -\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{AC}}) = (\lambda^2 - \lambda + 1)\det(\overrightarrow{\mathbf{AB}},\overrightarrow{\mathbf{AC}})$$

    erhalten wir, dass sich die drei Geraden $\mathbf{AD}, \mathbf{BE}$ und $\mathbf{CF}$ genau dann in einem Punkt schneiden, wenn

    $$0 = (\lambda^2 - \lambda + 1)\det(\overrightarrow{\mathbf{AB}},\overrightarrow{\mathbf{AC}})(\det(\mathbf{A},\mathbf{D}) + \det(\mathbf{B},\mathbf{E}) + \det(\mathbf{C},\mathbf{F})).$$

  - Benutzen wir nun noch

    $$\det(\mathbf{A},\mathbf{D}) = \lambda\det(\mathbf{A},\mathbf{B}) + (1-\lambda)\det(\mathbf{A},\mathbf{C}),$$

    $$\det(\mathbf{B},\mathbf{E}) = \lambda\det(\mathbf{B},\mathbf{C}) - (1-\lambda)\det(\mathbf{A},\mathbf{B}),$$
    $$\det(\mathbf{C},\mathbf{F}) = -\lambda\det(\mathbf{A},\mathbf{C}) - (1-\lambda)\det(\mathbf{B},\mathbf{C}),$$

    also

    $$\det(\mathbf{A},\mathbf{D}) + \det(\mathbf{B},\mathbf{E}) + \det(\mathbf{C},\mathbf{F}) = (2\lambda - 1)(\det(\mathbf{A},\mathbf{B}) + \det(\mathbf{B},\mathbf{C}) + \det(\mathbf{C},\mathbf{A})),$$

    erhalten wir, dass sich die drei Geraden $\mathbf{AD}, \mathbf{BE}$ und $\mathbf{CF}$ genau dann in einem Punkt schneiden, wenn

    $$\begin{aligned} 0 &= (2\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)\det(\overrightarrow{\mathbf{AB}},\overrightarrow{\mathbf{AC}})(\det(\mathbf{A},\mathbf{B}) + \det(\mathbf{B},\mathbf{C}) + \det(\mathbf{C},\mathbf{A})) \\ &= (2\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)\det(\overrightarrow{\mathbf{AB}},\overrightarrow{\mathbf{AC}})(-\det(\mathbf{B}-\mathbf{A},\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B}-\mathbf{A},\mathbf{C})) \\ &= (2\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)\det(\overrightarrow{\mathbf{AB}},\overrightarrow{\mathbf{AC}})^2. \end{aligned}$$

  - Da $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ keine reellen Lösungen hat und $\det(\overrightarrow{\mathbf{AB}},\overrightarrow{\mathbf{AC}}) \neq 0$, ist obige Gleichung genau dann erfüllt, wenn $\lambda = \frac{1}{2}$.