Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Aufgaben zur Vorbereitung

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 1. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Inzidenzebene, die das Parallelenaxiom erfüllt und sei $\mathcal{E}$ endlich.

(a) Beweisen Sie, dass auf parallelen Geraden $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathcal{G}$ die gleiche Anzahl von Punkten liegt.

(b) Untersuchen Sie, ob $\mathcal{E}$ genau sieben Elemente haben kann.

Aufgabe 2. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot)$ eine angeordnete Inzidenzebene und seien $\mathbf{O}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{E}$ drei Punkte in allgemeiner Lage. Seien außerdem $\mathbf{A}' \in \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{O}, \mathbf{A})$ und $\mathbf{B}' \in \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{O}, \mathbf{B})$ Punkte, so dass $\mathbf{O}|\mathbf{A}|\mathbf{A}'$ und $\overline{\mathbf{AB}} \cap \overline{\mathbf{A'B'}} \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass dann $\mathbf{B}' \in \overline{\mathbf{OB}}$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot)$ eine angeordnete Inzidenzebene und sei $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$. Zeigen Sie, dass drei Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{E}$ in allgemeiner Lage existieren, so dass $\mathbf{P} \in \mathrm{Int}(\Delta_{\mathbf{ABC}})$.

Aufgabe 4. Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ Punkte einer Hilbertebene mit den folgenden Eigenschaften.

(1) Sowohl die Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ als auch die Punkte $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ sind in allgemeiner Lage.

(2) $\mathbf{C} \notin [\mathbf{A}]_{\mathbf{BD}}$.

(3) Die Winkel $\angle_{\mathbf{ABD}}$ und $\angle_{\mathbf{CBD}}$ sind rechte Winkel.

Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{C}$ gilt.

Aufgabe 5. Sei $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ein gleichschenkliges Dreieck in einer Hilbertebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ mit Basis $\overline{\mathbf{BC}}$. Sei $\mathbf{M}$ der Mittelpunkt von $\overline{\mathbf{BC}}$ und seien $\mathbf{D}, \mathbf{E} \in \mathcal{E}$ Punkte mit $\mathbf{A}|\mathbf{D}|\mathbf{B}$, $\mathbf{A}|\mathbf{E}|\mathbf{C}$ und $\overline{\mathbf{AD}} \equiv \overline{\mathbf{AE}}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{M}$ in allgemeiner Lage sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\Delta_{\mathbf{DEM}}$ gleichschenklig ist mit Basis $\overline{\mathbf{DE}}$.

Aufgabe 6. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ eine Hilbertebene. Sei $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$, sei $\mathbf{P} \in \mathcal{E} \setminus \mathbf{g}$ und sei $\mathbf{L_P}$ der Lotfußpunkt von $\mathbf{P}$ auf $\mathbf{g}$. Seien weiter $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{E}$ in allgemeiner Lage mit folgenden Eigenschaften:

- Die Strecken $\overline{\mathbf{AB}}$ und $\overline{\mathbf{PL_P}}$ sind kongruent.
- Der Winkel $\angle_{\mathbf{ABC}}$ ist ein rechter Winkel.

(a) Man beweise, daß mindestens zwei verschiedene Punkte $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbf{g}$ derart existieren, dass $\angle_{\mathbf{L_P Q}_j\mathbf{P}} \equiv \angle_{\mathbf{BCA}}$ für $j = 1, 2$.

(b) Man beweise, dass es genau zwei Punkte $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbf{g}$ wie in Teil (a) gibt.

Aufgabe 7. In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ betrachten wir die Punkte $\mathbf{A} = (-2, 3)$, $\mathbf{B} = (-4, 7)$, $\mathbf{C} = (5, 4)$ und die Gerade $\mathbf{g} = \mathbf{A} + \mathbb{R} \cdot \vec{\mathbf{u}}$ mit $\vec{\mathbf{u}} = \binom{4}{2}$. Außerdem sei $\mathbf{l}$ die Senkrechte zur Geraden $\mathbf{BC}$ durch $\mathbf{A}$.

(a) Überprüfen Sie, dass die Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ nicht kollinear sind, und untersuchen Sie, ob $\mathbf{B}$ auf $\mathbf{g}$ liegt.

(b) Bestimmen Sie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ derart, dass $\mathbf{BC} = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : \lambda x + \mu y = 1\}$

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbf{g}$ und $\mathbf{BC}$ nicht parallel sind, und bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $\mathbf{g}$ und $\mathbf{BC}$ und den Schnittpunkt der Geraden $\mathbf{l}$ und $\mathbf{BC}$.

(d) Berechnen Sie den Lotfußpunkt des senkrechten Lotes von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{AB}$ und den Radius des Umkreises des Dreiecks $\Delta_{\mathbf{ABC}}$.

Aufgabe 8. Sei $K = K(\mathbf{M}_{\text{um}}, r_{\text{um}})$ der Umkreis des Dreiecks in $\mathbb{E}^2$ mit den Eckpunkten $\mathbf{A} = (-7, -11)$, $\mathbf{B} = (16, 12)$ und $\mathbf{C} = (-7, 19)$.

(a) Bestimmen Sie den Umkreismittelpunkt $\mathbf{M}_{\text{um}}$, indem Sie den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten $\mathbf{m}_a$ und $\mathbf{m}_c$ berechnen.

(b) Seien $\mathbf{t_A}, \mathbf{t_B}$ und $\mathbf{t_C}$ die Tangenten von K durch $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{C}$. Berechnen Sie die durch $\{\mathbf{D}\} = \mathbf{t_A} \cap \mathbf{t_B}, \{\mathbf{E}\} = \mathbf{t_B} \cap \mathbf{t_C}, \{\mathbf{F}\} = \mathbf{t_A} \cap \mathbf{t_C}$ gegebenen Punkte $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$.

(c) Berechnen Sie den Inkreisradius des Dreiecks $\Delta_{\mathbf{DEF}}$.

(d) Finden Sie alle Tangenten von K, die parallel zur x-Achse sind.

Aufgabe 9. In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ betrachten wir die Punkte $\mathbf{A} = (-5, -2)$, $\mathbf{B} = (7, 6)$ und $\mathbf{C} = (-3, 8)$. Berechnen Sie

(a) den Schnittpunkt des Lotes $\mathbf{h}_c$ von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{AB}$ und der Mittelsenkrechten $\mathbf{m}_a$ der Strecke $\overline{\mathbf{BC}}$,

(b) den Lotfußpunkt $\mathbf{H}_c \in \mathbf{AB}$ des Lotes $\mathbf{h}_c$.

Aufgabe 10. Sei $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ das Dreieck in $\mathbb{E}^2$ mit den Eckpunkten

$$\mathbf{A} = (1, -\sqrt{3}), \quad \mathbf{B} = (7, -\sqrt{3}) \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = (7, 5\sqrt{3}).$$

(a) Berechnen Sie für $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ den Schnittpunkt der Höhen, den Mittelpunkt des Umkreises und den Schwerpunkt und überprüfen Sie die Gültigkeit der Euler-Gleichung.

(b) Bestimmen Sie eine Hessesche Normalform der Euler-Geraden von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$.

(c) Bestimmen Sie für das Dreieck $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ den Mittelpunkt und den Radius des Feuerbach-Kreises.

(d) Berechnen Sie die Höhenfußpunkte von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ und überprüfen Sie, dass diese Punkte auf dem Feuerbach-Kreis liegen.

Aufgabe 11. Sei $\mathbf{D}$ der Mittelpunkt der Seite $\overline{\mathbf{AB}}$ und $\mathbf{E}$ der Mittelpunkt der Seite $\overline{\mathbf{BC}}$ eines Dreiecks $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ in $\mathbb{E}^2$. Außerdem sei $\mathbf{P}$ ein Punkt auf der Seite $\overline{\mathbf{AC}}$ und $\mathbf{Q}$ der Schnittpunkt der Geraden $\mathbf{BP}$ und $\mathbf{DE}$. Dabei ist $|\overline{\mathbf{AC}}| = 10$ und $|\overline{\mathbf{DQ}}| = 3$.

(a) Zeigen Sie, dass die Geraden $\mathbf{AC}$ und $\mathbf{DE}$ parallel sind.

(b) Berechnen Sie $|\overline{\mathbf{EQ}}|$.

Aufgabe 12. (a) Seien $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ und $\Delta_{\mathbf{A'B'C'}}$ zwei Dreiecke in $\mathbb{E}^2$ mit

$$\alpha = \alpha' \quad \text{und} \quad \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

Zeigen Sie, dass $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ und $\Delta_{\mathbf{A'B'C'}}$ ähnlich sind.

(b) Sei $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ein Dreieck in $\mathbb{E}^2$. Sei $\mathbf{F}$ der Mittelpunkt von $\overline{\mathbf{BC}}$ und seien $\mathbf{D}, \mathbf{E} \in \mathbb{E}^2$ Punkte im Äusseren von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$, so dass $\Delta_{\mathbf{ABD}}$ und $\Delta_{\mathbf{ACE}}$ gleichschenklige Dreiecke sind, mit rechten Winkeln in $\mathbf{D}$ bzw. $\mathbf{E}$. Zeigen Sie, dass $\Delta_{\mathbf{DEF}}$ gleichschenklig ist, mit rechten Winkel in $\mathbf{F}$.

Hinweis: Zeigen Sie (z.B. mit Teil (a)), dass das Dreieck $\Delta_{\boldsymbol{EAD}}$ ähnlich ist zum Dreieck $\Delta_{\boldsymbol{FMD}}$ (falls diese existieren), wobei $\boldsymbol{M}$ der Seitenmittelpunkt von $\overline{\boldsymbol{AB}}$ ist.

Aufgabe 13. Sei $\square_{\mathbf{ABCD}}$ ein Parallelogramm. Zeigen Sie, dass die Summe der Quadrate der Längen der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der Längen der beiden Diagonalen ist, d.h. zeigen Sie

$$|\overline{\mathbf{AB}}|^2 + |\overline{\mathbf{BC}}|^2 + |\overline{\mathbf{CD}}|^2 + |\overline{\mathbf{AD}}|^2 = |\overline{\mathbf{AC}}|^2 + |\overline{\mathbf{BD}}|^2.$$

Aufgabe 14. In $\mathbb{E}^2$ betrachten wir die Punkte $\mathbf{A} = (-4, 7)$ und $\mathbf{B} = (6, -3)$. Berechnen Sie alle Punkte $\mathbf{C}$, für die $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ein Dreieck in $\mathbb{E}^2$ mit den folgenden beiden Eigenschaften ist.

(1) Der Innenwinkel in $\mathbf{C}$ ist ein rechter Winkel.

(2) Für den Fußpunkt $\mathbf{D} \in \mathbf{AB}$ der Höhe von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{AB}$ gilt $|\overline{\mathbf{AD}}| = 4|\overline{\mathbf{BD}}|$.

Aufgabe 15. Seien $\mathbf{F}$, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}_{\mathrm{um}}$ der Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises, der Schnittpunkt der Höhen bzw. der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ in $\mathbb{E}^2$. Beweisen Sie:

(a) Ist $\mathbf{M}_{\mathrm{um}} = (0, 0)$, so ist $\mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ und $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})$.

(b) Ist die Gerade $\mathbf{AB}$ eine Tangente des Feuerbach-Kreises von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$, so ist $|\overline{\mathbf{AC}}| = |\overline{\mathbf{BC}}|$.

Aufgabe 16. Sei $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ein nicht gleichseitiges Dreieck in $\mathbb{E}^2$. Beweisen Sie, dass die Euler-Gerade von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ genau dann

(a) zu einer Seite orthogonal ist, wenn $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ gleichschenklig ist.

(b) durch einen Eckpunkt geht, wenn $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ rechtwinklig oder gleichschenklig ist.