Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Lösungen zu den Aufgaben zur Vorbereitung

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 1. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Inzidenzebene, die das Parallelenaxiom erfüllt und sei $\mathcal{E}$ endlich.

(a) Beweisen Sie, dass auf parallelen Geraden $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathcal{G}$ die gleiche Anzahl von Punkten liegt.

(b) Untersuchen Sie, ob $\mathcal{E}$ genau sieben Elemente haben kann.

- Lösung (a):
  - Seien $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathcal{G}$ zwei parallele Geraden. Wenn $\mathbf{g} = \mathbf{h}$ ist nichts zu zeigen. Seien also $\mathbf{g}$ und $\mathbf{h}$ verschieden und parallel, d.h. es gilt $\mathbf{g} \cap \mathbf{h} = \emptyset$.
  - Wir konstruieren eine Bijektion $\beta\colon \mathbf{g} \to \mathbf{h}$ folgendermaßen: Seien $\mathbf{P} \in \mathbf{g}$ und $\mathbf{Q} \in \mathbf{h}$ beliebig gewählt (das ist möglich nach Axiom (I2)). Sei nun $\mathbf{S} \in \mathbf{g}$. Sei $\mathbf{p}$ die eindeutige Parallele zu $\mathbf{PQ}$ durch $\mathbf{S}$. Dann schneidet $\mathbf{p}$ die Gerade $\mathbf{h}$ in genau einem Punkt. Dies sieht man wie folgt:
    - Wenn $\mathbf{p}$ die Gerade $\mathbf{h}$ in mehr als einen Punkt schneidet, gilt $\mathbf{p} = \mathbf{h}$ (nach (I1)), also $\mathbf{S} \in \mathbf{g} \cap \mathbf{h}$ im Widerspruch zu $\mathbf{g} \cap \mathbf{h} = \emptyset$.
    - Wenn $\mathbf{p}$ die Gerade $\mathbf{h}$ nicht schneidet, gilt $\mathbf{p}||\mathbf{h}$. Zusammen mit $\mathbf{p}||\mathbf{PQ}$ folgt dann $\mathbf{h}||\mathbf{PQ}$. im Widerspruch zu $\mathbf{h} \cap \mathbf{PQ} = \{\mathbf{Q}\}$.
  - Diesen eindeutigen Schnittpunkt von $\mathbf{p}$ und $\mathbf{h}$ bezeichnen wir mit $\beta(\mathbf{S})$. Es ist klar, dass man auf genau dieselbe Weise eine inverse Abbildung zu β konstruieren kann, also ist β eine Bijektion. Somit folgt die Behauptung.

- Lösung (b):
  - Wir zeigen allgemein, daß die Zahl $\#\mathcal{E}$ niemals eine Primzahl sein kann (also ist insbesondere $\#\mathcal{E} \neq 7$). Sei dazu $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$ eine Gerade. Wir definieren nun folgende Äquivalenzrelation auf $\mathcal{E}$: Für zwei Punkte $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathcal{E}$ sei $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q} :\Leftrightarrow (\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ oder $\mathbf{PQ}$ ist parallel zu $\mathbf{g})$. Das ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation; nur bei der Transitivität muß etwas gezeigt werden und das folgt sofort aus dem Parallelenaxiom. Da $\mathcal{E}$ endlich ist, zerfällt $\mathcal{E}$ in endlich viele disjunkte Äquivalenzklassen. Jede dieser Äquivalenzklassen ist eine Parallele zu $\mathbf{g}$ und damit gleichmächtig zu $\mathbf{g}$ nach Teil (a). Sei N die Anzahl der Äquivalenzklassen. Dann gilt

    $$\#\mathcal{E} = N \cdot \#\mathbf{g}.$$

    Wäre $\#\mathcal{E}$ nun eine Primzahl, dann wäre entweder $N = 1$ (also $\mathcal{E} = \mathbf{g}$, was Axiom (I3) widerspräche), oder $\#\mathbf{g} = 1$ (was Axiom (I2) widerspräche). Also folgt die Behauptung.

Aufgabe 2. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot)$ eine angeordnete Inzidenzebene und seien $\mathbf{O}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{E}$ drei Punkte in allgemeiner Lage. Seien außerdem $\mathbf{A}' \in \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{O}, \mathbf{A})$ und $\mathbf{B}' \in \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{O}, \mathbf{B})$ Punkte, so dass $\mathbf{O}|\mathbf{A}|\mathbf{A}'$ und $\overline{\mathbf{AB}} \cap \overline{\mathbf{A}'\mathbf{B}'} \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass dann $\mathbf{B}' \in \overline{\mathbf{OB}}$ gilt.

- Lösung:
  - Angenommen, es gilt $\mathbf{B}' \notin \overline{\mathbf{OB}}$. Wegen $\mathbf{B}' \in \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{O},\mathbf{B})$ ist das gleichbedeutend mit $\mathbf{O}|\mathbf{B}|\mathbf{B}'$. Dann schneidet die Gerade $\mathbf{A}'\mathbf{B}'$ weder die Strecke $\overline{\mathbf{OA}}$ noch die Strecke $\overline{\mathbf{OB}}$, denn sonst wären $\mathbf{O}, \mathbf{A}', \mathbf{B}'$ (und somit auch $\mathbf{O}, \mathbf{B}, \mathbf{A}$) kollinear. Daher schneidet die Gerade $\mathbf{A}'\mathbf{B}'$ genau eine Seite des Dreiecks $\Delta_{\mathbf{OAB}}$, was dem Satz von Pasch widerspricht.

Aufgabe 3. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot)$ eine angeordnete Inzidenzebene und sei $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$. Zeigen Sie, dass drei Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{E}$ in allgemeiner Lage existieren, so dass $\mathbf{P} \in \mathrm{Int}(\Delta_{\mathbf{ABC}})$.

- Lösung:
  - Sei $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$ eine Gerade mit $\mathbf{P} \in \mathbf{g}$. Dann wählen wir einen Punkt $\mathbf{B} \in \mathbf{g}$ mit $\mathbf{P} \neq \mathbf{B}$ (möglich nach Axiom (I2)) und einen Punkt $\mathbf{C} \in \mathbf{g}$ mit $\mathbf{B}|\mathbf{P}|\mathbf{C}$ (möglich nach Axiom (A2)). Weiter wählen wir einen Punkt $\mathbf{A} \in \mathcal{E}$ mit $\mathbf{A} \notin \mathbf{g}$ (Axiom (I3)). Nun wählen wir Punkte $\mathbf{B}', \mathbf{C}' \in \mathcal{E}$ mit $\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{B}'$ und $\mathbf{A}|\mathbf{C}|\mathbf{C}'$ (wieder Axiom (A2)). Nun behaupten wir, daß $\mathbf{P} \in \mathrm{Int}_{\Delta_{\mathbf{AB}'\mathbf{C}'}}$. Nach Blatt 4, Aufgabe 3(a) ist auf jeden Fall $\mathbf{P} \in [\mathbf{B}]_{\mathbf{AC}'}$ und $\mathbf{P} \in [\mathbf{C}]_{\mathbf{AB}'}$. Weiter gilt $(\mathbf{B}, \mathbf{C})|_{\mathbf{B}'\mathbf{C}'}$, denn die Strecke $\overline{\mathbf{BC}}$ schneidet die Gerade $\mathbf{B}'\mathbf{C}'$ nicht (Argumentation wie in Aufgabe 2). Nun sagt uns Blatt 4, Aufgabe 3(b), daß $\mathbf{P} \in [\mathbf{B}]_{\mathbf{B}'\mathbf{C}'}$. Da außerdem $[\mathbf{B}]_{\mathbf{B}'\mathbf{C}'} = [\mathbf{A}]_{\mathbf{B}'\mathbf{C}'}$ ist (wieder Blatt 4, Aufgabe 3(a)), folgt

$$\mathbf{P} \in [\mathbf{A}]_{\mathbf{B}'\mathbf{C}'} \cap [\mathbf{B}]_{\mathbf{AC}'} \cap [\mathbf{C}]_{\mathbf{AB}'}.$$

    Nun verwenden wir nochmals Blatt 4, Aufgabe 3(a) um zu sehen, daß $[\mathbf{B}]_{\mathbf{AC}'} = [\mathbf{B}']_{\mathbf{AC}'}$ sowie $[\mathbf{C}]_{\mathbf{AB}'} = [\mathbf{C}']_{\mathbf{AB}'}$ ist. Daraus folgt schlußendlich

$$\mathbf{P} \in [\mathbf{A}]_{\mathbf{B}'\mathbf{C}'} \cap [\mathbf{B}']_{\mathbf{AC}'} \cap [\mathbf{C}']_{\mathbf{AB}'} = \mathrm{Int}(\Delta_{\mathbf{AB}'\mathbf{C}'}).$$

Aufgabe 4. Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ Punkte einer Hilbertebene mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Sowohl die Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ als auch die Punkte $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ sind in allgemeiner Lage.

(2) $\mathbf{C} \notin [\mathbf{A}]_{\mathbf{BD}}$.

(3) Die Winkel $\angle_{\mathbf{ABD}}$ und $\angle_{\mathbf{CBD}}$ sind rechte Winkel.

Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{C}$ gilt.

- Lösung:
  - Es genügt zu zeigen, daß $\mathbf{B} \in \mathbf{AC}$ ist. Aus der Forderung $\mathbf{C} \notin [\mathbf{A}]_{\mathbf{BD}}$ folgt nämlich, daß sich $\mathbf{BD}$ und $\overline{\mathbf{AC}}$ schneiden; außerdem wissen wir, daß es höchstens einen Schnittpunkt zwischen $\mathbf{BD}$ und $\mathbf{AC}$ geben kann, denn sonst wäre $\mathbf{A} \in \mathbf{BD}$. Sei $\mathbf{C}' \in \mathcal{E}$ ein Punkt mit $\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{C}'$. Da $\angle_{\mathbf{ABD}}$ ein rechter Winkel ist, ist $\angle_{\mathbf{DBC}'}$ ebenfalls ein rechter Winkel (per definitionem). Aus der Eindeutigkeit der Winkelabtragung (Axiom (K4)) folgt nun, daß $\vec{S}(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = \vec{S}(\mathbf{B}, \mathbf{C}')$, also sind $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ kollinear, was für den Beweis noch zu zeigen war.

Aufgabe 5. Sei $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ein gleichschenkliges Dreieck in einer Hilbertebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ mit Basis $\overline{\mathbf{BC}}$. Sei $\mathbf{M}$ der Mittelpunkt von $\overline{\mathbf{BC}}$ und seien $\mathbf{D}, \mathbf{E} \in \mathcal{E}$ Punkte mit $\mathbf{A}|\mathbf{D}|\mathbf{B}$, $\mathbf{A}|\mathbf{E}|\mathbf{C}$ und $\overline{\mathbf{AD}} \equiv \overline{\mathbf{AE}}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{M}$ in allgemeiner Lage sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\Delta_{\mathbf{DEM}}$ gleichschenklig ist mit Basis $\overline{\mathbf{DE}}$.

- Lösung (a):
  - Das folgt aus dem Satz von Pasch: Wären die Punkte $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{M}$ nicht in allgemeiner Lage, also kollinear, dann gäbe es eine Gerade, die keinen der Eckpunkte, aber alle Seiten des Dreiecks $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ schneidet.
- Lösung (b):
  - Nach dem Basiswinkelsatz (Satz 3.3.10) gilt

$$\angle_{\mathbf{DBM}} = \angle_{\mathbf{ABC}} \equiv \angle_{\mathbf{BCA}} = \angle_{\mathbf{MCE}}.$$

    Weiter ist nach Annahme und Streckensubtraktion (Korollar 3.2.3) $\overline{\mathbf{DB}} \equiv \overline{\mathbf{EC}}$. Die Kongruenz $\overline{\mathbf{BM}} \equiv \overline{\mathbf{MC}}$ folgt aus der Annahme, daß $\mathbf{M}$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{\mathbf{BC}}$ ist. Aus dem Kongruenzsatz SWS folgt nun, daß auch $\overline{\mathbf{DM}} \equiv \overline{\mathbf{EM}}$ ist, was zu zeigen war.

Aufgabe 6. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ eine Hilbertebene. Sei $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$, sei $\mathbf{P} \in \mathcal{E} \setminus \mathbf{g}$ und sei $\mathbf{L_P}$ der Lotfußpunkt von $\mathbf{P}$ auf $\mathbf{g}$. Seien weiter $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{E}$ in allgemeiner Lage mit folgenden Eigenschaften:

- Die Strecken $\overline{\mathbf{AB}}$ und $\overline{\mathbf{PL_P}}$ sind kongruent.
- Der Winkel $\angle_{\mathbf{ABC}}$ ist ein rechter Winkel.

(a) Man beweise, daß mindestens zwei verschiedene Punkte $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbf{g}$ derart existieren, dass $\angle_{\mathbf{L_P Q}_j\mathbf{P}} \equiv \angle_{\mathbf{BCA}}$ für $j = 1, 2$.

(b) Man beweise, dass es genau zwei Punkte $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbf{g}$ wie in Teil (a) gibt.

- Lösung (a):
  - Seien $\mathbf{H}_1$ und $\mathbf{H}_2$ Punkte auf $\mathbf{g}$ mit $\mathbf{H}_1|\mathbf{L_P}|\mathbf{H}_2$. Für $j = 1, 2$ gibt es dann genau ein $\mathbf{Q}_j \in \vec{S}(\mathbf{L_P}, \mathbf{H}_j)$ mit der Eigenschaft, daß $\overline{\mathbf{L_P Q}_j} \equiv \overline{\mathbf{BC}}$ ist (eindeutige Streckenabtragung an Strahlen, Axiom (K1)). Da $\vec{S}(\mathbf{L_P}, \mathbf{H}_1) \cap \vec{S}(\mathbf{L_P}, \mathbf{H}_2) = \{\mathbf{L_p}\}$ ist und die $\mathbf{Q}_j$ jeweils verschieden von $\mathbf{L_P}$ sind, folgt $\mathbf{Q}_1 \neq \mathbf{Q}_2$. Für $j = 1, 2$ ist dann das Dreieck $\Delta_{\mathbf{PL_P Q}_j}$ nach dem Kongruenzsatz SWS zum Dreieck $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ kongruent. Daraus folgt insbesondere die geforderte Kongruenz von Winkeln.
- Lösung (b):
  - Es genügt zu zeigen, daß für fest gewähltes $j \in \{1, 2\}$ genau ein $\mathbf{Q} \in \vec{S}(\mathbf{L_P}, \mathbf{H}_j)$ mit den gewünschten Eigenschaften existiert. Existenz ist bereits aus Teil (a) bekannt. Seien also $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \in \vec{S}(\mathbf{L_P}, \mathbf{H}_j)$ zwei solche Punkte. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $\mathbf{L_P}|\mathbf{Q}|\mathbf{Q}'$ ist. Im Dreieck $\Delta_{\mathbf{PQQ}'}$ ist dann der Winkel $\angle_{\mathbf{PQQ}'}$ zum Nebenwinkel des Winkels $\angle_{\mathbf{PQ}'\mathbf{Q}}$ kongruent, was Satz 3.5.2 widerspräche.

Aufgabe 7. In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ betrachten wir die Punkte $\mathbf{A} = (-2, 3)$, $\mathbf{B} = (-4, 7)$, $\mathbf{C} = (5, 4)$ und die Gerade $\mathbf{g} = \mathbf{A} + \mathbb{R} \cdot \vec{\mathbf{u}}$ mit $\vec{\mathbf{u}} = \binom{4}{2}$. Außerdem sei $\mathbf{l}$ die Senkrechte zur Geraden $\mathbf{BC}$ durch $\mathbf{A}$.

(a) Überprüfen Sie, dass die Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ nicht kollinear sind, und untersuchen Sie, ob $\mathbf{B}$ auf $\mathbf{g}$ liegt.

(b) Bestimmen Sie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ derart, dass $\mathbf{BC} = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : \lambda x + \mu y = 1\}$

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbf{g}$ und $\mathbf{BC}$ nicht parallel sind, und bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $\mathbf{g}$ und $\mathbf{BC}$ und den Schnittpunkt der Geraden $\mathbf{l}$ und $\mathbf{BC}$.

(d) Berechnen Sie den Lotfußpunkt des senkrechten Lotes von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{AB}$ und den Radius des Umkreises des Dreiecks $\Delta_{\mathbf{ABC}}$.

- Lösung (a):
  - Die Gerade durch die Punkte $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ist $\{(-2, 3) + t(-2, 4) \colon t \in \mathbb{R}\}$. Man überprüft leicht, daß die Gleichung $(-2, 3) + t(-2, 4) = (5, 4)$ nicht lösbar ist, also gilt $\mathbf{C} \notin \mathbf{AB}$ und $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sind nicht kollinear. Genauso sieht man, daß die Gleichung $(-2, 3) + t(4, 2) = (-4, 7)$ nicht lösbar ist, also liegt $\mathbf{B}$ nicht auf $\mathbf{g}$.
- Lösung (b):
  - Es muß gelten $-4\lambda + 7\mu = 1$ und $5\lambda + 4\mu = 1$. Dieses lineare Gleichungssystem löst man (z. B. mit dem Gauß-Verfahren); es ergibt sich die eindeutige Lösung $\mu = \frac{3}{17}$ und $\lambda = \frac{1}{17}$.
  - Alternativ hat man $(\overrightarrow{\mathbf{BC}})^\perp = \binom{3}{9}$. Dann ist die Gerade $\{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : 3x + 9y = c\}$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ parallel zu $\mathbf{BC}$ und die Bedingung, dass $\mathbf{B}$ darauf liegen soll liefert $c = -12 + 63 = 51$. Dann haben wir
  $$\begin{aligned}\mathbf{BC} &= \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : 3x + 9y = 51\} = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x + 3y = 17\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : \frac{1}{17}x + \frac{3}{17}y = 1\}.\end{aligned}$$
  Somit leistet $(\lambda, \mu) = (\frac{1}{17}, \frac{3}{17})$ das Gewünschte.
- Lösung (c):
  - Da die Richtungvektoren $\vec{\mathbf{u}} = \binom{4}{2}$ und $\overrightarrow{\mathbf{BC}} = \binom{9}{-3}$ von $\mathbf{g} = (-2, 3) + \mathbb{R} \cdot \binom{4}{2}$ bzw. $\mathbf{BC} = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x + 3y = 17\}$ linear unabhängig sind, sind $\mathbf{g}$ und $\mathbf{BC}$ nicht parallel.
  - Um einen Schnittpunkt der Geraden $\mathbf{BC}$ und $\mathbf{g}$ zu finden, müssen wir $t \in \mathbb{R}$ finden, so daß
  $$-2 + 4t + 3(3 + 2t) = 17$$
  ist. Auflösen nach t liefert $t = 1$. Damit ergibt sich der Schnittpunkt zu $(-2, 3) + 1 \cdot \binom{4}{2} = (2, 5)$.
  Der Schnittpunkt von $\mathbf{l}$ und $\mathbf{BC}$ kann wie folgt berechnet werden: Zunächst bestimmen wir eine Gleichung für $\mathbf{l}$. Der Vektor $\binom{3}{-1}$ ist ein Richtungsvektor der

Geraden **BC**. Entsprechend ist die Gerade **l** senkrecht zu **BC** durch den Punkt $\mathbf{A} = (-2, 3)$ durch die Gleichung

$$\langle (x, y), (3, -1) \rangle = \langle (-2, 3), (3, -1) \rangle$$

gegeben, welche sich zu $3x - y = -9$ vereinfacht. Wir haben bereits die Gleichung $x + 3y = 17$ für **BC** bestimmt (Teil (b)). Die eindeutige Lösung des aus diesen beiden Gleichungen bestehenden Gleichungssystems ist $(-1, 6)$; dies ist der Schnittpunkt der Geraden **l** und **BC**.

- Lösung (d):
  - Der Vektor $(-1, 2)$ ist ein Richtungsvektor der Geraden **AB**. Also ist eine Gleichung des gesuchten senkrechten Lotes gegeben durch

    $$\langle (x, y), (-1, 2) \rangle = \langle (5, 4), (-1, 2) \rangle.$$

    Diese vereinfacht sich zu $-x + 2y = 3$. Zur Berechnung des Schnittpunktes müssen wir also ein $t \in \mathbb{R}$ finden, so daß $-(-2 - t) + 2(3 + 2t) = 3$, also $5t + 8 = 3$, also $t = -1$. Der Schnittpunkt ist also $(-1, 1)$.
    Zur Berechnung des Umkreismittelpunktes berechnen wir die Mittelsenkrechten von $\overline{\mathbf{AB}}$ und $\overline{\mathbf{BC}}$. Diese sind durch die Gleichungen

    $$(x+2)^2 + (y-3)^2 = (x+4)^2 + (y-7)^2 \quad \text{bzw.} \quad (x+4)^2 + (y-7)^2 = (x-5)^2 + (y-4)^2$$

    gegeben. Zusammen ergeben diese Gleichungen (nach Vereinfachung) das Gleichungssystem

    $$-x + 2y = 13, \quad 3x - y = -4.$$

    Dieses löst man und erhält den Schnittpunkt $(1, 7)$; dieser Punkt ist somit auch der Umkreismittelpunkt. Der Radius des Umkreises ist gleich dem Abstand zwischen $(1, 7)$ und **A**; dieser beträgt 5.

Aufgabe 8. Sei $K = K(\mathbf{M}_{\mathrm{um}}, r_{\mathrm{um}})$ der Umkreis des Dreiecks in $\mathbb{E}^2$ mit den Eckpunkten $\mathbf{A} = (-7, -11)$, $\mathbf{B} = (16, 12)$ und $\mathbf{C} = (-7, 19)$.

(a) Bestimmen Sie den Umkreismittelpunkt $\mathbf{M}_{\mathrm{um}}$, indem Sie den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten $\mathbf{m}_a$ und $\mathbf{m}_c$ berechnen.

(b) Seien $\mathbf{t_A}, \mathbf{t_B}$ und $\mathbf{t_C}$ die Tangenten von K durch $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{C}$. Berechnen Sie die durch $\{\mathbf{D}\} = \mathbf{t_A} \cap \mathbf{t_B}, \{\mathbf{E}\} = \mathbf{t_B} \cap \mathbf{t_C}, \{\mathbf{F}\} = \mathbf{t_A} \cap \mathbf{t_C}$ gegebenen Punkte $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$.

(c) Berechnen Sie den Inkreisradius des Dreiecks $\Delta_{\mathbf{DEF}}$.

(d) Finden Sie alle Tangenten von K, die parallel zur x-Achse sind.

- Lösung (a):
  - Wir können die Mittelsenkrechten wir in Aufgabe 7(d) berechnen. Hier wählen wir aber die Parameterdarstellung: Die Mittelsenkrechte $\mathbf{m}_a$ von $\overline{\mathbf{BC}}$ ist in Parameterdarstellung gegeben durch

    $$\mathbf{m}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) + \mathbb{R} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{BC}})^{\perp} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 \\ 31 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Analog folgt für die Mittelsenkrechte $\mathbf{m}_c$ von $\overline{\mathbf{AB}}$, dass

$$\mathbf{m}_c = \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) + \mathbb{R}\cdot(\overrightarrow{\mathbf{AB}})^{\perp} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

Für den Schnittpunkt $\mathbf{M}_{\text{um}} = \frac{1}{2}\binom{9}{31}+r\binom{7}{23} = \frac{1}{2}\binom{9}{1}+s\binom{-1}{1}$ von $\mathbf{m}_a$ und $\mathbf{m}_c$ erhalten wir somit das Gleichungssystem

$$\frac{9}{2}+7r = \frac{9}{2}-s, \quad \frac{31}{2}+23r = \frac{1}{2}+s,$$

dessen Lösung durch $(r,s) = (-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ gegeben ist. Das liefert $\mathbf{M}_{\text{um}} = (1,4)$.

- Lösung (b):
  - Die Tangente durch den Punkt $\mathbf{A}$ besteht aus allen Punkten $\mathbf{P}$, für die

    $$\langle \mathbf{P}, \mathbf{A}-\mathbf{M}\rangle = \langle \mathbf{A}, \mathbf{A}-\mathbf{M}\rangle$$

    ist. Schreibt man nun $\mathbf{P} = (x,y)$ und verwendet die bereits bekannten Werte für $\mathbf{A}$ und $\mathbf{M}$, so ergibt sich die Gleichung

    $$8x+15y = -221.$$

    Analog sind die Tangenten durch $\mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{C}$ durch die Gleichungen $15x+8y = 336$ bzw. $-8x+15y = 341$ gegeben. Zur Berechnung der Schnittpunkte löst man die entsprechenden Gleichungssysteme; es ergeben sich die Werte $\mathbf{D} = (\frac{296}{7}, -\frac{261}{7})$, $\mathbf{E} = (8,27)$ und $\mathbf{F} = (-\frac{281}{8}, 4)$.

- Lösung (c):
  - Der Inkreis des Dreiecks $\Delta_{\mathbf{DEF}}$ ist gleich K (nach Konstruktion der Punkte $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$). Entsprechend ist der Radius des Inkreises gleich dem Radius von K; dieser beträgt $||\mathbf{A}-\mathbf{M}_{\text{um}}|| = \sqrt{289} = 17$.

- Lösung (d):
  - K ist der Kreis durch $\mathbf{M}_{\text{um}} = (1,4)$ vom Radius $r_{\text{um}} = 17$. “Nordpol” bzw. “Südpol” von K sind also die Punkte $(1,21)$ bzw. $(1,-13)$. Die Tangenten in diesen Punkten sind gerade die Tangenten von K parallel zur x-Achse. Sie sind durch die Geradengleichungen $y = 21$ bzw. $y = -13$ gegeben.

Aufgabe 9. In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ betrachten wir die Punkte $\mathbf{A} = (-5,-2)$, $\mathbf{B} = (7,6)$ und $\mathbf{C} = (-3,8)$. Berechnen Sie

(a) den Schnittpunkt des Lotes $\mathbf{h}_c$ von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{AB}$ und der Mittelsenkrechten $\mathbf{m}_a$ der Strecke $\overline{\mathbf{BC}}$,

(b) den Lotfußpunkt $\mathbf{H}_c \in \mathbf{AB}$ des Lotes $\mathbf{h}_c$.

- Lösung (a):

– Wir haben
$$\mathbf{h}_c = \mathbf{C} + \mathbb{R} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{AB}})^{\perp} = (-3, 8) + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
und
$$\mathbf{m}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) + \mathbb{R} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{BC}})^{\perp} = (2, 7) + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
Der Schnittpunkt $\mathbf{S} = (-3, 8) + r\binom{-2}{3} = (2, 7) + s\binom{1}{5}$ beider Geraden erfüllt also die Gleichungen
$$-3 - 2r = 2 + s \quad \text{und} \quad 8 + 3r = 7 + 5s$$
deren Lösung $(r, s) = (-2, -1)$ ist. Somit ergibt sich $\mathbf{S} = (1, 2)$.

- Lösung (b):

– Da
$$\mathbf{AB} = \mathbf{A} + \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AB}} = (-5, -2) + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
gibt es $r, s \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{H}_c = (-3, 8) + r\binom{-2}{3} = (-5, -2) + s\binom{3}{2}$. D.h. (r, s) erfüllt die Gleichungen
$$-3 - 2r = -5 + 3s \quad \text{und} \quad 8 + 3r = -2 + 2s$$
deren Lösung $(r, s) = (-2, 2)$ ist. Damit ergibt sich $\mathbf{H}_c = (1, 2) = \mathbf{S}$.

Aufgabe 10. Sei $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ das Dreieck in $\mathbb{E}^2$ mit den Eckpunkten
$$\mathbf{A} = (1, -\sqrt{3}), \quad \mathbf{B} = (7, -\sqrt{3}) \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = (7, 5\sqrt{3}).$$

(a) Berechnen Sie für $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ den Schnittpunkt der Höhen, den Mittelpunkt des Umkreises und den Schwerpunkt und überprüfen Sie die Gültigkeit der Euler-Gleichung.

(b) Bestimmen Sie eine Hessesche Normalform der Euler-Geraden von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$.

(c) Bestimmen Sie für das Dreieck $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ den Mittelpunkt und den Radius des Feuerbach-Kreises.

(d) Berechnen Sie die Höhenfußpunkte von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ und überprüfen Sie, dass diese Punkte auf dem Feuerbach-Kreis liegen.

- Lösung (a):

– Beobachtung: Man sieht, dass $\mathbf{BC}$ parallel zur y-Achse ist (die x-Koordinaten von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ stimmen überein) und $\mathbf{AB}$ parallel zur x-Achse ist (die y-Koordinaten von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ stimmen überein). Im Eckpunkt $\mathbf{B}$ liegt also insbesondere ein rechter Winkel vor. Damit ist $\mathbf{H} = \mathbf{B} = (7, -\sqrt{3})$ der Höhenschnittpunkt, $\mathbf{M}_{\text{um}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{C}) = (4, 2\sqrt{3})$ der Umkreismittelpunkt (nach Satz des Thales) und der Schwerpunkt berechnet sich nach Vorlesung zu
$$\mathbf{S} = \frac{1}{3}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) = (5, \sqrt{3}).$$

- Aus unseren berechneten Punkten $\mathbf{H}, \mathbf{M}_{\text{um}}, \mathbf{S}$ erhalten wir

  $$\mathbf{H} + 2\mathbf{M}_{\text{um}} = (7, -\sqrt{3}) + (8, 4\sqrt{3}) = (15, 3\sqrt{3}) = 3\mathbf{S}.$$

  Dies ist die Euler-Gleichung.

- Ohne obige Beobachtung ist die Lösung der Aufgabe etwas mühsam: Wir haben

  $$\mathbf{h}_a = \mathbf{A} + \mathbb{R} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{BC}})^{\perp} = (1, -\sqrt{3}) + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  und

  $$\mathbf{h}_c = \mathbf{C} + \mathbb{R} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{AB}})^{\perp} = (7, 5\sqrt{3}) + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Der Höhenschnittpunkt $\mathbf{H} = (1, -\sqrt{3}) + r\binom{1}{0} = (7, 5\sqrt{3}) + s\binom{0}{1}$ ist also durch die Gleichungen

  $$1 + r = 7 \quad \text{und} \quad -\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + s$$

  charakterisiert, deren Lösung $(r, s) = (6, -6\sqrt{3})$ ist. Damit erhalten wir $\mathbf{H} = (7, -\sqrt{3})$.

- Für die Mittelsenkrechten berechnen wir

  $$\mathbf{m}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) + \mathbb{R} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{BC}})^{\perp} = (7, 2\sqrt{3}) + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  und

  $$\mathbf{m}_c = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbb{R} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{AB}})^{\perp} = (4, -\sqrt{3}) + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Der Schnittpunkt $\mathbf{M}_{\text{um}} = (7, 2\sqrt{3}) + r\binom{1}{0} = (4, -\sqrt{3}) + s\binom{0}{1}$ ist dann durch die Gleichungen

  $$7 + r = 4 \quad \text{und} \quad 2\sqrt{3} = -\sqrt{3} + s$$

  charakterisiert, deren Lösung $(r, s) = (-3, 3\sqrt{3})$ ist. Damit erhalten wir $\mathbf{M}_{\text{um}} = (4, 2\sqrt{3})$.

• Lösung (b):

  - Die Euler-Gerade ist gegeben durch

    $$\mathbf{SH} = \mathbf{S} + \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{\mathbf{SH}} = (5, \sqrt{3}) + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

    Der Vektor $\binom{\sqrt{3}}{1}$ steht zum Beispiel senkrecht auf der Richtung von $\mathbf{SH}$. Wegen $\langle \mathbf{S}, \binom{\sqrt{3}}{1} \rangle = 6\sqrt{3}$ ist dann

    $$\mathbf{SH} = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : \sqrt{3}x + y = 6\sqrt{3}\}$$

    eine Hessesche Normalform für die Euler-Gerade.

• Lösung (c):

- Der Mittelpunkt $\mathbf{F}$ des Feuerbach-Kreises ist durch die Feuerbach-Gleichung gegeben:
  $$2\mathbf{F} = 3\mathbf{S} - \mathbf{M}_{\text{um}} = (15, 3\sqrt{3}) - (4, 2\sqrt{3}) = (11, \sqrt{3}).$$
  Also gilt $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(11, \sqrt{3})$.
- Da der Feuerbach-Kreis der Kreis durch die Seitenmittelpunkte von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ist, erhalten wir für seinen Radius r, dass
  $$r = ||\tfrac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \mathbf{F}|| = ||(4, -\sqrt{3}) - \frac{1}{2}(11, \sqrt{3})|| = 3.$$

• Lösung (d):

- Wir haben bereits in (a) gesehen, dass $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BC}$ senkrecht aufeinander stehen, dass heisst im Eckpunkt $\mathbf{B}$ liegt ein rechter Winkel vor. Das liefert sofort
  $$\mathbf{H}_a = \mathbf{H}_c = \mathbf{B} = (7, -\sqrt{3}).$$
  Wenn man nicht gesehen hat, dass in $\mathbf{B}$ ein rechter Winkel vorliegt, rechnet man $\mathbf{H}_a$ und $\mathbf{H}_c$ genauso wie $\mathbf{H}_b$ aus: Der Lotfußpunkt $\mathbf{H}_b$ ist durch die Bedingungen
  $$\mathbf{H}_b = (x_b, y_b) = \mathbf{A} + \frac{r}{6}\overrightarrow{\mathbf{AC}} = (1, -\sqrt{3}) + r\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (\text{d.h. } \mathbf{H}_b \in \mathbf{AC})$$
  und
  $$0 = \langle \mathbf{H}_b - \mathbf{B}, \mathbf{C} - \mathbf{A} \rangle = \langle \begin{pmatrix} x_b - 7 \\ y_b + \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \rangle = x_b + \sqrt{3}y_b - 4$$
  charakterisiert. Durch einsetzen von $x_b = 1 + r$ und $y_b = -\sqrt{3} + \sqrt{3}r$ in die zweite Gleichung, erhalten wir $0 = 4r - 6$, also $r = \frac{3}{2}$. Damit ergibt sich
  $$\mathbf{H}_b = \frac{1}{2}(5, \sqrt{3}).$$
- Nun berechnen wir
  $$||\mathbf{F} - \mathbf{H}_b|| = \frac{1}{2}||(6, 0)|| = 3,$$
  $$||\mathbf{F} - \mathbf{H}_a|| = ||\mathbf{F} - \mathbf{H}_c|| = \frac{1}{2}||(-3, 3\sqrt{3})|| = 3.$$
  Damit liegen $\mathbf{H}_a, \mathbf{H}_b, \mathbf{H}_c$ alle auf dem Feuerbachkreis.

Aufgabe 11. Sei $\mathbf{D}$ der Mittelpunkt der Seite $\overline{\mathbf{AB}}$ und $\mathbf{E}$ der Mittelpunkt der Seite $\overline{\mathbf{BC}}$ eines Dreiecks $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ in $\mathbb{E}^2$. Außerdem sei $\mathbf{P}$ ein Punkt auf der Seite $\overline{\mathbf{AC}}$ und $\mathbf{Q}$ der Schnittpunkt der Geraden $\mathbf{BP}$ und $\mathbf{DE}$. Dabei ist $|\overline{\mathbf{AC}}| = 10$ und $|\overline{\mathbf{DQ}}| = 3$.

(a) Zeigen Sie, dass die Geraden $\mathbf{AC}$ und $\mathbf{DE}$ parallel sind.

(b) Berechnen Sie $|\overline{\mathbf{EQ}}|$.

• Lösung (a):

– Wegen
$$\frac{|\overline{\mathbf{BA}}|}{|\overline{\mathbf{BD}}|} = 2 = \frac{|\overline{\mathbf{BC}}|}{|\overline{\mathbf{BE}}|} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}|\mathbf{D}|\mathbf{A} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{B}|\mathbf{E}|\mathbf{C}$$
folgt aus dem 1. Strahlensatz, dass $\mathbf{AC} \,||\, \mathbf{DE}$.

– Alternativ kann man auch berechnen
$$\overrightarrow{\mathbf{DE}} = \mathbf{E} - \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) - \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{AC}}.$$
Da die Richtungsvektoren von $\mathbf{DE}$ und $\mathbf{AC}$ folglich linear abhängig sind, gilt $\mathbf{AC} \,||\, \mathbf{DE}$.

- Lösung (b):

– Der Strahlensatz liefert
$$2 = \frac{|\overline{\mathbf{BA}}|}{|\overline{\mathbf{BD}}|} = \frac{|\overline{\mathbf{AP}}|}{|\overline{\mathbf{DQ}}|} = \frac{1}{3}|\overline{\mathbf{AP}}|,$$
also $|\overline{\mathbf{AP}}| = 6$ und folglich $|\overline{\mathbf{CP}}| = 4$. Damit folgt wieder aus dem Strahlensatz
$$2 = \frac{|\overline{\mathbf{BC}}|}{|\overline{\mathbf{BE}}|} = \frac{|\overline{\mathbf{CP}}|}{|\overline{\mathbf{EQ}}|} = \frac{4}{|\overline{\mathbf{EQ}}|},$$
also $|\overline{\mathbf{EQ}}| = 2$.

Aufgabe 12. (a) Seien $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ und $\Delta_{\mathbf{A'B'C'}}$ zwei Dreiecke in $\mathbb{E}^2$ mit
$$\alpha = \alpha' \quad \text{und} \quad \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$
Zeigen Sie, dass $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ und $\Delta_{\mathbf{A'B'C'}}$ ähnlich sind.

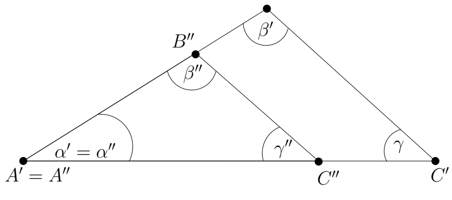
(b) Sei $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ein Dreieck in $\mathbb{E}^2$. Sei $\mathbf{F}$ der Mittelpunkt von $\overline{\mathbf{BC}}$ und seien $\mathbf{D}, \mathbf{E} \in \mathbb{E}^2$ Punkte im Äusseren von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$, so dass $\Delta_{\mathbf{ABD}}$ und $\Delta_{\mathbf{ACE}}$ gleichschenklige Dreiecke sind, mit rechten Winkeln in $\mathbf{D}$ bzw. $\mathbf{E}$. Zeigen Sie, dass $\Delta_{\mathbf{DEF}}$ gleichschenklig ist, mit rechten Winkel in $\mathbf{F}$.

Hinweis: Zeigen Sie (z.B. mit Teil (a)), dass das Dreieck $\Delta_{\boldsymbol{EAD}}$ ähnlich ist zum Dreieck $\Delta_{\boldsymbol{FMD}}$ (falls diese existieren), wobei $\boldsymbol{M}$ der Seitenmittelpunkt von $\overline{\boldsymbol{AB}}$ ist.

- Lösung (a):

– Wir betrachten das Dreieck $\Delta_{\mathbf{A''B''C''}}$ charakterisiert durch die Bedingungen

  * $\mathbf{A''} = \mathbf{A'}$,
  * $\mathbf{B''} \in \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{A'}, \mathbf{B'})$ und $\mathbf{C''} \in \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{A'}, \mathbf{C'})$,
  * $\overline{\mathbf{A''B''}} \equiv \overline{\mathbf{AB}}$ und $\overline{\mathbf{A''C''}} \equiv \overline{\mathbf{AC}}$.



- Es gilt also

$$\alpha'' = \alpha' = \alpha, \quad b'' = b, \quad c'' = c$$

und nach dem SWS-Kongruenzsatz sind $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ und $\Delta_{\mathbf{A''B''C''}}$ kongruent. Insbesondere gilt also $\beta'' = \beta$ und $\gamma'' = \gamma$.

- Andererseits folgt aus

$$\frac{b'}{b''} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{c'}{c''}$$

und dem 1. Strahlensatz, dass $\mathbf{BC} \,||\, \mathbf{B''C''}$.

- Aus dem Stufenwinkelsatz folgt somit

$$\beta'' = \beta' \quad \text{und} \quad \gamma'' = \gamma',$$

siehe obiges Bild.

- Wir erhalten also insgesamt

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta' \quad \text{und} \quad \gamma = \gamma'.$$

Nach dem Ähnlichkeitssatz aus der Vorlesung sind also $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ und $\Delta_{\mathbf{A'B'C'}}$ zueinander ähnlich.

- Lösung (b) (elementargeometrisch):
  - Bezeichne $\mathbf{M}$ bzw. $\mathbf{M'}$ den Mittelpunkt von $\overline{\mathbf{AB}}$ bzw. $\overline{\mathbf{AC}}$. Wegen den Voraussetzungen ist dann $\mathbf{M}$ auch der Höhenfußpunkt von $\mathbf{D}$ auf $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{M'}$ auch der Höhenfußpunkt von $\mathbf{E}$ auf $\mathbf{AC}$.
  - Nach dem Winkelsummensatz und den Voraussetzungen gilt

$$\measuredangle_{\mathbf{ACE}} = \measuredangle_{\mathbf{CAE}} = \measuredangle_{\mathbf{BAD}} = \measuredangle_{\mathbf{ABD}} = 45^\circ$$

und auch

$$\measuredangle_{\mathbf{ADM}} = \measuredangle_{\mathbf{BDM}} = \measuredangle_{\mathbf{AEM'}} = \measuredangle_{\mathbf{CEM'}} = 45^\circ.$$

  - Weil $\mathbf{M}$ bzw. $\mathbf{F}$ die Mittelpunkte von $\overline{\mathbf{AB}}$ bzw. $\overline{\mathbf{BC}}$ sind, gilt

$$\overrightarrow{\mathbf{MF}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{AC}} \tag{1}$$

(Beweis wie in Aufgabe 11(a)).

  - Der Satz des Pythagoras im gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck $\Delta_{\mathbf{AMD}}$ liefert

$$\sqrt{2} = \frac{|\overline{\mathbf{DA}}|}{|\overline{\mathbf{DM}}|}. \tag{2}$$

  - Wenn $\mathbf{M'}$ den Mittelpunkt von $\overline{\mathbf{AC}}$ bezeichnet, liefert genauso der Satz des Pythagoras im gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck $\Delta_{\mathbf{AM'E}}$ zusammen mit Gleichung (1), dass

$$\sqrt{2} = \frac{|\overline{\mathbf{AE}}|}{|\overline{\mathbf{AM'}}|} = \frac{|\overline{\mathbf{AE}}|}{|\overline{\mathbf{MF}}|}. \tag{3}$$

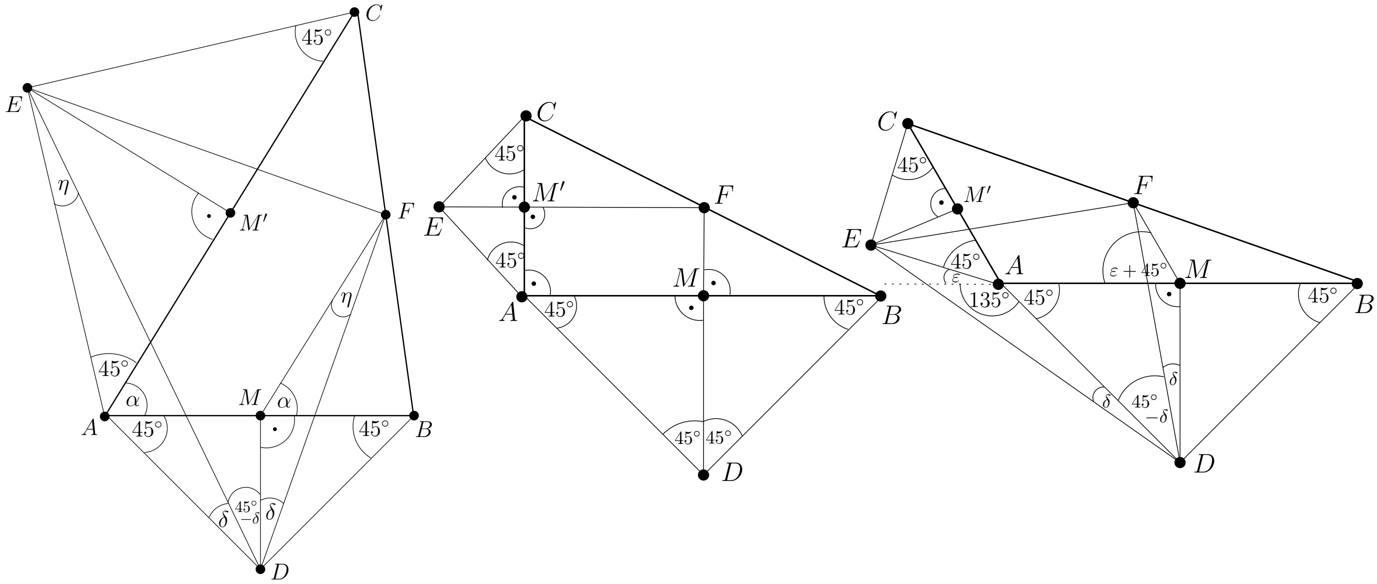
– Aus der Parallelität von **MF** und **AC** (Gleichung (1)) und dem Stufenwinkelsatz folgt

$$\measuredangle_{\mathbf{FMB}} = \measuredangle_{\mathbf{CAB}}$$

bzw. für die entsprechenden Nebenwinkel

$$\measuredangle_{\mathbf{FMA}} = 180^\circ - \measuredangle_{\mathbf{CAB}}.$$

– Es gibt nun formal drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob der Innenwinkel $\alpha = \angle_{\mathbf{CAB}}$ im Eckpunkt **A** von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ spitz, rechtwinklig oder stumpf ist. Diese drei Fälle sind in dieser Reihenfolge in den Bildern unten dargestellt.



– In der Situation, dass $\alpha = 90^\circ$ oder äquivalent, $\mathbf{F} \in \mathbf{DM}$ (das mittlere Bild), sieht man recht schnell, dass $\Delta_{\mathbf{EFD}}$ gleichschenklig mit rechtem Winkel im Eckpunkt **F** ist.

– In der Situation, dass $\alpha \neq 90^\circ$ oder äquivalent, $\mathbf{F} \notin \mathbf{DM}$ (die Bilder links und rechts) folgt ebenfalls

$$\measuredangle_{\mathbf{DAE}} = \measuredangle_{\mathbf{DMF}}. \tag{4}$$

– Aus (2), (3), (4) und Teil (a) folgt, dass $\Delta_{\mathbf{EAD}}$ und $\Delta_{\mathbf{FMD}}$ ähnlich sind. Insbesondere gilt

$$\measuredangle_{\mathbf{ADE}} = \measuredangle_{\mathbf{MDF}}.$$

– Daraus folgt nun aber $\measuredangle_{\mathbf{EDF}} = 45^\circ$. Durch analoge Betrachtungen erhält man $\measuredangle_{\mathbf{DEF}} = 45^\circ$. Da zeigt, dass $\Delta_{\mathbf{DEF}}$ gleichschenklig ist mit Basis $\overline{\mathbf{DE}}$ und in **F** ein rechter Winkel vorliegt.

- Lösung (b) (rechnerisch):

  – Man kann eine solche Aufgabe auch versuchen rechnerisch zu lösen. O.B.d.A. ist unser Dreieck (bis auf Drehung und Verschiebung) von der Gestalt

$$\mathbf{A} = (0,0), \quad \mathbf{B} = (c,0) \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = (b\cos(\alpha), b\sin(\alpha)).$$

– Für **D**, **E**, **F** erhalten wir nach den Voraussetzungen

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(c, -c),$$

$$\mathbf{E} = \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\cos(\alpha + 45°), \frac{b}{\sqrt{2}}\sin(\alpha + 45°)\right) = \frac{1}{2}\left(b(\cos(\alpha) - \sin(\alpha)), b(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))\right)$$

(denn $|\overline{\mathbf{AE}}| = \frac{b}{\sqrt{2}}$ und der Winkel den $\overrightarrow{\mathbf{AE}}$ mit $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ einschließt ist gleich $\alpha + 45°$) und

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \frac{1}{2}(b\cos(\alpha) + c, b\sin(\alpha))$$

– Es reicht zu zeigen, dass $\measuredangle_{\mathbf{FDE}} = 45°$. Wir berechnen

$$\mathbf{F} - \mathbf{D} = \frac{1}{2}(b\cos(\alpha), b\sin(\alpha) + c)$$

und

$$\mathbf{E} - \mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(b(\cos(\alpha) - \sin(\alpha)) - c, b(\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) + c\right)$$

und daraus

$$\langle \mathbf{F} - \mathbf{D}, \mathbf{E} - \mathbf{D}\rangle = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2bc\sin(\alpha)),$$

$$||\mathbf{F} - \mathbf{D}|| = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\sin(\alpha)},$$

$$||\mathbf{E} - \mathbf{D}|| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\sin(\alpha)}.$$

– Damit ergibt sich

$$\cos(\measuredangle_{\mathbf{FDE}}) = \frac{\langle \mathbf{F} - \mathbf{D}, \mathbf{E} - \mathbf{D}\rangle}{||\mathbf{F} - \mathbf{D}||||\mathbf{E} - \mathbf{D}||} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

woraus wie gewünscht $\measuredangle_{\mathbf{FDE}} = 45°$ folgt.

Aufgabe 13. Sei $\square_{\mathbf{ABCD}}$ ein Parallelogramm. Zeigen Sie, dass die Summe der Quadrate der Längen der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der Längen der beiden Diagonalen ist, d.h. zeigen Sie

$$|\overline{\mathbf{AB}}|^2 + |\overline{\mathbf{BC}}|^2 + |\overline{\mathbf{CD}}|^2 + |\overline{\mathbf{AD}}|^2 = |\overline{\mathbf{AC}}|^2 + |\overline{\mathbf{BD}}|^2.$$

- 1. Lösung:
  – Wir setzen $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{DC}}$, $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{AD}} = \overrightarrow{\mathbf{BC}}$, so dass

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \vec{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} + \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{A} + \vec{\mathbf{v}}.$$

  – Damit berechnen wir

$$|\overline{\mathbf{AB}}|^2 + |\overline{\mathbf{BC}}|^2 + |\overline{\mathbf{CD}}|^2 + |\overline{\mathbf{AD}}|^2$$

$$= ||\mathbf{B} - \mathbf{A}||^2 + ||\mathbf{C} - \mathbf{B}||^2 + ||\mathbf{D} - \mathbf{C}||^2 + ||\mathbf{D} - \mathbf{A}||^2$$

$$= ||\vec{\mathbf{u}}||^2 + ||\vec{\mathbf{v}}||^2 + ||\vec{\mathbf{u}}||^2 + ||\vec{\mathbf{v}}||^2 = 2||\vec{\mathbf{u}}||^2 + 2||\vec{\mathbf{v}}||^2.$$

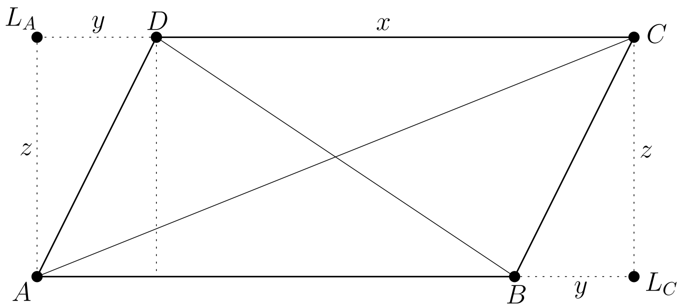
Andererseits gilt

$$|\overline{\mathbf{AC}}|^2 + |\overline{\mathbf{BD}}|^2 = ||\mathbf{C} - \mathbf{A}||^2 + ||\mathbf{D} - \mathbf{B}||^2 = ||\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}||^2 + ||\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}||^2$$

$$= ||\vec{\mathbf{u}}||^2 + 2\langle\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\rangle + ||\vec{\mathbf{v}}||^2 + ||\vec{\mathbf{u}}||^2 - 2\langle\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\rangle + ||\vec{\mathbf{v}}||^2 = 2||\vec{\mathbf{u}}||^2 + 2||\vec{\mathbf{v}}||^2.$$

Beide Rechnungen führen auf dasselbe Resultat. Dies zeigt die behauptete Gleichung.

- 2. Lösung:

  - Sei wie im Bild eingezeichnet

    $$x = |\overline{\mathbf{AB}}| = |\overline{\mathbf{CD}}|, \; y = |\overline{\mathbf{BL_C}}| = |\overline{\mathbf{DL_A}}|$$

    und $z = |\overline{\mathbf{AL_A}}| = |\overline{\mathbf{CL_C}}|$, wobei $\mathbf{L_A}$ bzw. $\mathbf{L_C}$ der Lotfußpunkt von $\mathbf{A}$ auf $\mathbf{CD}$ bzw. von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{AB}$ ist.

  - Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras

    $$|\overline{\mathbf{AB}}|^2 = x^2, \quad |\overline{\mathbf{BC}}|^2 = y^2 + z^2, \quad |\overline{\mathbf{DC}}|^2 = x^2, \quad |\overline{\mathbf{AD}}|^2 = y^2 + z^2,$$

    also

    $$|\overline{\mathbf{AB}}|^2 + |\overline{\mathbf{BC}}|^2 + |\overline{\mathbf{CD}}|^2 + |\overline{\mathbf{AD}}|^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2.$$

    Andererseits folgt wieder mit dem Satz des Pythagoras

    $$|\overline{\mathbf{AC}}|^2 = (x+y)^2+z^2 = x^2+y^2+z^2+2xy, \quad |\overline{\mathbf{BD}}|^2 = (x-y)^2+z^2 = x^2+y^2+z^2-2xy,$$

    also wieder

    $$|\overline{\mathbf{AC}}|^2 + |\overline{\mathbf{BD}}|^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2.$$

    Beide Rechnungen führen auf dasselbe Resultat. Dies zeigt die behauptete Gleichung.

Aufgabe 14. In $\mathbb{E}^2$ betrachten wir die Punkte $\mathbf{A} = (-4, 7)$ und $\mathbf{B} = (6, -3)$. Berechnen Sie alle Punkte $\mathbf{C}$, für die $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ein Dreieck in $\mathbb{E}^2$ mit den folgenden beiden Eigenschaften ist.

(1) Der Innenwinkel in $\mathbf{C}$ ist ein rechter Winkel.

(2) Für den Fußpunkt $\mathbf{D} \in \mathbf{AB}$ der Höhe von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{AB}$ gilt $|\overline{\mathbf{AD}}| = 4|\overline{\mathbf{BD}}|$.

- Lösung

  - Nach dem Satz des Thales liegt $\mathbf{C} = (c_x, c_y)$ auf dem Thales-Kreis über $\overline{\mathbf{AB}}$. Dieser hat Mittelpunkt $\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (1, 2)$ und Radius $\frac{1}{2}|\overline{\mathbf{AB}}| = 5\sqrt{2}$. Es gilt also

    $$50 = (c_x - 1)^2 + (c_y - 2)^2 = c_x^2 + c_y^2 - 2c_x - 4c_y + 5.$$

    Ohne den Satz des Thales zu verwenden, führt die Bedingung $0 = \langle\mathbf{C} - \mathbf{A}, \mathbf{C} - \mathbf{B}\rangle$ auf dieselbe Gleichung.

- Aus der Bedingung $|\overline{\mathbf{AD}}| = 4|\overline{\mathbf{BD}}|$ folgt für den Höhenfußpunkt $\mathbf{D}$ von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{AB}$, dass
$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \frac{4}{5}(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = (-4, 7) + \frac{4}{5}(10, -10) = (4, -1).$$
- Weil $\mathbf{C} - \mathbf{D}$ senkrecht zu $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ stehen muss, folgt also noch die Gleichung
$$0 = \langle \mathbf{C} - \mathbf{D}, \mathbf{B} - \mathbf{A} \rangle = \langle (c_x - 4, c_y + 1), (10, -10) \rangle$$
$$= 10(c_x - 4) - 10(c_y + 1) = 10c_x - 10c_y - 50$$
erfüllt sein, d.h. wir haben
$$0 = c_x - c_y - 5.$$
- Setzt man dann $c_y = c_x - 5$ in die erste Gleichung $0 = c_x^2 + c_y^2 - 2c_x - 4c_y - 45$ ein, erhält man
$$0 = c_x^2 + (c_x - 5)^2 - 2c_x - 4(c_x - 5) - 45 = c_x^2 + c_x^2 - 10c_x + 25 - 2c_x - 4c_x + 20 - 45 = 2c_x^2 - 16c_x.$$
Dies liefert die Lösungen
$$c_x = 0 \quad \text{also} \quad c_y = -5$$
oder
$$c_x = 8 \quad \text{also} \quad c_y = 3.$$
Wir erhalten
$$\mathbf{C} = (0, -5) \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = (8, 3)$$
als mögliche Lösungen der Aufgabenstellung.

Aufgabe 15. Seien $\mathbf{F}$, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}_{\text{um}}$ der Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises, der Schnittpunkt der Höhen bzw. der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ in $\mathbb{E}^2$. Beweisen Sie:

(a) Ist $\mathbf{M}_{\text{um}} = (0, 0)$, so ist $\mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ und $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})$.

(b) Ist die Gerade $\mathbf{AB}$ eine Tangente des Feuerbach-Kreises von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$, so ist $|\overline{\mathbf{AC}}| = |\overline{\mathbf{BC}}|$.

- Lösung (a):
  - Sei im Folgenden $\mathbf{M}_{\text{um}} = (0, 0)$.
  - Die Euler-Gleichung lautet
  $$3\mathbf{S} = \mathbf{H} + 2\mathbf{M}_{\text{um}} = \mathbf{H}.$$
  Mit $\mathbf{S} = \frac{1}{3}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})$ folgt $\mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$.
  - Die Feuerbachgleichung lautet
  $$2\mathbf{F} = 3\mathbf{S} - \mathbf{M}_{\text{um}} = 3\mathbf{S}.$$
  Mit $\mathbf{S} = \frac{1}{3}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})$ folgt $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})$.
- Lösung (b):

- Der Feuerbach-Kreis K ist per Definition der Kreis durch die Seitenmittelpunkte von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$. Der Mittelpunkt $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ von $\overline{\mathbf{AB}}$ ist in der vorliegenden Situation also der Berührpunkt der Tangenten $\mathbf{AB}$ mit K.
- Andererseits enthält der Feuerbach-Kreis nach dem Satz von Feuerbach auch die Höhenfußpunkte. Dann muss $\mathbf{D}$ auch der Höhenfußpunkt von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{AB}$ sein.
- Nach dem SWS-Kongruenzsatz ist $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ dann gleichschenklig mit Basis $\overline{\mathbf{AB}}$.

Aufgabe 16. Sei $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ein nicht gleichseitiges Dreieck in $\mathbb{E}^2$. Beweisen Sie, dass die Euler-Gerade von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ genau dann

(a) zu einer Seite orthogonal ist, wenn $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ gleichschenklig ist.

(b) durch einen Eckpunkt geht, wenn $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ rechtwinklig oder gleichschenklig ist.

- Sei $\mathbf{g}$ die Euler-Gerade von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$.
- Lösung (a):
  - Sei zunächst $\mathbf{g}$ senkrecht zu einer Seite von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$, gelte also o.B.d.A. $\mathbf{g} \perp \mathbf{AB}$. Da $\mathbf{g}$ den Höhenschnittpunkt $\mathbf{H}$ enthält, aber $\mathbf{H}$ auch auf der Höhenlinie $\mathbf{h}_c$ durch $\mathbf{C}$ liegt und $\mathbf{h}_c$ ebenfalls senkrecht auf $\mathbf{AB}$ steht, folgt $\mathbf{g} = \mathbf{h}_c$. Insbesondere gilt $\mathbf{C}, \mathbf{H}_c \in \mathbf{g}$. Da auch der Schwerpunkt $\mathbf{S}$ (d.h. der Schnittpunkt der Seitenhalbierdenden) auf $\mathbf{g}$ liegt, folgt, dass $\mathbf{g}$ die Seitenhalbierende der Seite $\overline{\mathbf{AB}}$ ist. Insbesondere ist der Schnittpunkt von $\mathbf{g}$ mit $\overline{\mathbf{AB}}$, also der Höhenfußpunkt $\mathbf{H}_c$, der Seitenmittelpunkt von $\overline{\mathbf{AB}}$. Nach dem SWS-Kongruenzsatz folgt dann aber, dass $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ gleichschenklig mit Basis $\overline{\mathbf{AB}}$ ist.
  - Wenn umgekehrt $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ gleichschenklig mit Basis $\overline{\mathbf{AB}}$ ist, ist die Seitenhalbierende der Seite $\overline{\mathbf{AB}}$ nach dem Basiswinkelsatz und dem SWS-Kongruenzsatz auch die Höhe von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{AB}$. Diese Gerade steht also senkrecht auf $\mathbf{AB}$ und auf ihr liegen die paarweise verschiedenen Punkte $\mathbf{H}$ und $\mathbf{S}$. Dann muss sie aber mit der Euler-Geraden $\mathbf{g}$ übereinstimmen. Somit steht $\mathbf{g}$ senkrecht auf $\mathbf{AB}$.
- Lösung (b):
  - Sei $\mathbf{C} \in \mathbf{g}$. Da auch der Schwerpunkt $\mathbf{S}$ auf $\mathbf{g}$ liegt, erhalten wir, dass $\mathbf{g}$ die Seitenhalbierende der Seite $\overline{\mathbf{AB}}$ ist. Angenommen $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ist *nicht* gleichschenklig mit Basis $\overline{\mathbf{AB}}$. Dann ist die Seitenhalbierende $\mathbf{g}$ ungleich der Höhenlinie $\mathbf{h}_c$ von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{AB}$ und der Höhenschnittpunkt $\mathbf{H}$ der eindeutige Schnittpunkt von $\mathbf{g}$ und $\mathbf{h}_c$. Damit folgt $\mathbf{H} = \mathbf{C}$, also liegt in $\mathbf{C}$ ein rechter Winkel vor.
  - Es liege nun umgekehrt ein rechter Winkel in $\mathbf{C}$ vor. Dann ist $\mathbf{C} = \mathbf{H}$ und die Euler-Gerade $\mathbf{g}$ geht durch den Eckpunkt $\mathbf{C}$. Ist andererseits $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ gleichschenklig mit Basis $\overline{\mathbf{AB}}$, so haben wir bereits im Beweis der zweiten Richtung von Teil (a) gesehen, dass $\mathbf{g}$ den Eckpunkt $\mathbf{C}$ enthält.