Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Benedict Meinke, Dr. Stefan Rosemann, Dr. Norman Zergänge

Übungsblatt 7

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2020

Aufgabe 7.1. Seien $\Delta_{\mathbf{ABC}}$, $\Delta_{\mathbf{A'B'C'}}$ zwei Dreiecke in einer Hilbertebene.

(a) Es gelte $\angle_{\mathbf{ACB}} \equiv \angle_{\mathbf{A'C'B'}}$, $\angle_{\mathbf{BAC}} \equiv \angle_{\mathbf{B'A'C'}}$ und $\overline{\mathbf{AB}} \equiv \overline{\mathbf{A'B'}}$. Zeigen Sie, dass $\overline{\mathbf{AC}} \equiv \overline{\mathbf{A'C'}}$, $\overline{\mathbf{BC}} \equiv \overline{\mathbf{B'C'}}$ und $\angle_{\mathbf{ABC}} \equiv \angle_{\mathbf{A'B'C'}}$. (5 Punkte)

(b) Es gelte $\overline{\mathbf{AB}} \equiv \overline{\mathbf{A'B'}}$, $\overline{\mathbf{BC}} \equiv \overline{\mathbf{B'C'}}$ und dass $\angle_{\mathbf{BAC}}$ und $\angle_{\mathbf{B'A'C'}}$ beides rechte Winkel sind. Zeigen Sie, dass $\overline{\mathbf{AC}} \equiv \overline{\mathbf{A'C'}}$, $\angle_{\mathbf{ABC}} \equiv \angle_{\mathbf{A'B'C'}}$ und $\angle_{\mathbf{ACB}} \equiv \angle_{\mathbf{A'C'B'}}$. (5 Punkte)

Aufgabe 7.2. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot), \equiv)$ eine Hilbertebene.

(a) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{E}$ verschiedene Punkte. Zeigen Sie, dass es einen eindeutig bestimmten Punkt $\mathbf{M} \in \mathcal{E}$ gibt mit $\mathbf{A}|\mathbf{M}|\mathbf{B}$ und $\overline{\mathbf{AM}} \equiv \overline{\mathbf{BM}}$. (5 Punkte)

(b) Sei $\angle_{\mathbf{ABC}}$ ein Winkel. Zeigen Sie, dass es einen eindeutig bestimmten Strahl $\vec{S}(\mathbf{B}, \mathbf{P})$ mit $\mathbf{P} \in \operatorname{Int}(\angle_{\mathbf{ABC}})$ gibt, so dass $\angle_{\mathbf{ABP}} \equiv \angle_{\mathbf{PBC}}$. (5 Punkte)

Aufgabe 7.3. (a) In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ betrachten wir die Punkte $\mathbf{A} = (5, 2)$, $\mathbf{B} = (-3, 6)$ und $\mathbf{C} = (6, 9)$. Bestimmen Sie $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \kappa_1 x + \kappa_2 y + \kappa_3 = 0\}$$

das senkrechte Lot auf $\mathbf{AB}$ durch $\mathbf{C}$ ist und berechnen Sie den Lotfußpunkt. (5 Punkte)

(b) Im Halbebenenmodell $\mathbb{H}^2$ der hyperbolischen Ebene betrachten wir die Punkte $\mathbf{A} = -2 + 12i$, $\mathbf{B} = 15 + 5i$, $\mathbf{C} = 15 + 11i$, $\mathbf{D} = 13 + 2i$. Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Orthokreises, der die Senkrechte von $\mathbf{AB}$ durch $\mathbf{A}$ ist, sowie den Lotfußpunkt von $\mathbf{D}$ auf $\mathbf{BC}$. (5 Punkte)

Aufgabe 7.4. In einer Hilbertebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ seien eine Gerade $\mathbf{g}$ und zwei Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{E} \setminus \mathbf{g}$ mit $(\mathbf{A}, \mathbf{B})|_{\mathbf{g}}$ gegeben. Für die Lotfußpunkte $\mathbf{L_A}$ und $\mathbf{L_B}$ von $\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{B}$ auf $\mathbf{g}$ gelte $\mathbf{L_A} \neq \mathbf{L_B}$. Die Spiegelpunkte von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ an $\mathbf{g}$ seien $\mathbf{A'}$ bzw. $\mathbf{B'}$. Außerdem sei $\mathbf{S}$ der Schnittpunkt der Strecken $\overline{\mathbf{AL_B}}$ und $\overline{\mathbf{BL_A}}$ und $\mathbf{S'}$ der Schnittpunkt der Strecken $\overline{\mathbf{A'L_B}}$ und $\overline{\mathbf{B'L_A}}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Strecken $\overline{\mathbf{AB}}$ und $\overline{\mathbf{A'B'}}$ sind kongruent. (5 Punkte)

(b) Der Punkt $\mathbf{S'}$ ist der Spiegelpunkt von $\mathbf{S}$ an $\mathbf{g}$. (5 Punkte)

BITTE DIE HINWEISE AUF DER RÜCKSEITE BEACHTEN!

- Es sind Gruppenabgaben von bis zu 3 Studierenden erlaubt.
- Versehen Sie jede Ihrer Abgaben mit Name, Vorname, Matrikelnummer und E-Mail-Adresse aller an der Abgabe Beteiligten.
- Die Einreichung erfolgt bitte nur in Form einer einzelnen PDF-Datei durch eine der an der Abgabe beteiligten Personen.
- Als Dateinamen ihrer Abgabe wählen Sie bitte **07-Matrikelnummer**, wobei „**Matrikelnummer**“ die Matrikelnummer der/des Einreichenden ist.
- Bitte reichen Sie Ihre Lösungen bis spätestens **08:00 am Montag, 22.06.2020**, unter dem im Stud.IP zu findenden Upload-Link ein.
- Die Studienleistung erbringen Sie durch erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.