Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2002/2003

Lutz Habermann

2. Juli 2003

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Banach- und Hilbert-Räume

1.1 Normierte Räume

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 1.1.1 (i) *Eine* **Norm** *auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine Abbildung*

$$v \in V \mapsto \|v\| \in \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(a) *Für alle $v \in V$ ist*

$$\|v\| \geq 0$$

und

$$\|v\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v = 0\ .$$

(b) *Für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ ist*

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|\ .$$

(b) *Dreiecksungleichung: Für alle $v, w \in V$ ist*

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|\ .$$

(ii) *Ein* **normierter Raum** *ist ein Paar $(V, \|\ \|)$ bestehend aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V und einer Norm $\|\ \|$ auf V.*

Ist keine Verwechslung möglich, so schreiben wir statt $(V, \|\ \|)$ auch einfach nur V.

Beispiel 1.1.2 Durch

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \text{für} \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

und

$$\|z\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2} \quad \text{für} \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

sind Normen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ definiert. Diese Normen werden **Euklidische Normen** genannt. $\square$

Beispiel 1.1.3 Sei M irgendeine nichtleere Menge und sei $B(M,\mathbb{K})$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum der beschränkten Abbildungen $f : M \to \mathbb{K}$. Dann ist

$$f \in B(M,\mathbb{K}) \mapsto \|f\|_\infty := \sup_{x\in M} |f(x)| \in \mathbb{R}$$

eine Norm auf $B(M,\mathbb{K})$. Diese Norm wird **Supremumsnorm** genannt. Im weiteren sei $B(M,\mathbb{K})$ stets mit dieser Norm versehen. □

Beispiel 1.1.4 Auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $C([a,b],\mathbb{K})$ der stetigen Abbildungen $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ ist durch

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

eine Norm definiert. □

Satz 1.1.5 *Ist* $(V, \|\ \|)$ *ein normierter Raum, so ist durch*

$$d_{\|\ \|}(v,w) := \|v-w\|$$

eine Metrik $d_{\|\ \|}$ *auf* V *definiert.*

Beweis. Übung. □

Beispiel 1.1.6 (i) Ist $\|\ \|$ wie in Beispiel 1.1.2, so ist $d_{\|\ \|}$ die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$.

(ii) Im metrischen Raum $\big(B(M,\mathbb{K}), d_{\|\ \|_\infty}\big)$ ist eine Folge genau dann konvergent, wenn sie gleichmäßig konvergent ist. □

Einen normierten Raum $(V, \|\ \|)$ werden wir stets auch als metrischen Raum $\big(V, d_{\|\ \|}\big)$ ansehen.

Satz 1.1.7 *Für jeden normierten Raum* V *gilt:*

(i) *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} v \in V &\mapsto \|v\| \in \mathbb{R}\,, \\ (v,w) \in V \times V &\mapsto v + w \in V \quad \textit{und} \\ v \in V &\mapsto \lambda v \in V \quad \textit{für} \quad \lambda \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

sind Lipschitz-stetig.

(ii) *Die Abbildung*

$$(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V \mapsto \lambda v \in V$$

ist stetig.

Beweis. (i) Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \big|\|v\| - \|v_0\|\big| &\le \|v - v_0\|\,, \\ \|(v+w) - (v_0 + w_0)\| &\le \|v - v_0\| + \|w - w_0\| \le \sqrt{2}\sqrt{\|v-v_0\| + \|w-w_0\|} \quad \text{und} \\ \|\lambda v - \lambda v_0\| &= |\lambda| \cdot \|v - v_0\|\,. \end{aligned}$$

(ii) Das ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \|\lambda v - \lambda v_0\| &= \|\lambda_0(v - v_0) + (\lambda - \lambda_0)v_0 + (\lambda - \lambda_0)(v - v_0)\| \\ &\le |\lambda_0| \cdot \|v - v_0\| + |\lambda - \lambda_0| \cdot \|v_0\| + |\lambda - \lambda_0| \cdot \|v - v_0\|\,. \end{aligned}$$

□

Definition 1.1.8 *Ein vollständiger normierter Raum heißt* **Banach-Raum***.*

Beispiel 1.1.9 $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind nach Beispiel 1.1.6(i) mit den Euklidischen Normen Banach-Räume. $\square$

Satz 1.1.10 $B(M, \mathbb{K})$ *ist ein Banach-Raum.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $B(M, \mathbb{K})$ vollständig ist. Sei (f_k) eine Cauchy-Folge in $B(M, \mathbb{K})$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_0 \in \mathbb{N} \, \forall k, l \geq k_0 : \|f_k - f_l\|_\infty \leq \varepsilon \, .$$

Nach Definition von $\| \ \|_\infty$ folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_0 \in \mathbb{N} \, \forall k, l \geq k_0 \, \forall x \in M : |f_k(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon \, . \tag{1.1.1}$$

Also ist $(f_k(x))$ für jedes $x \in M$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ und somit konvergent. Wir definieren $f : M \to \mathbb{K}$ durch

$$f(x) := \lim_{k \to \infty} f_k(x) \, .$$

Indem wir in (1.1.1) den Grenzwert $l \to \infty$ bilden, erhalten wir

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_0 \in \mathbb{N} \, \forall k \geq k_0 \, \forall x \in M : |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon \, . \tag{1.1.2}$$

Insbesondere gilt für $k \geq k_0$ und alle $x \in M$

$$|f(x)| = |f_k(x) - (f_k(x) - f(x))| \leq |f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| \leq \|f_k\|_\infty + \varepsilon \, .$$

Folglich ist $f \in B(M, \mathbb{K})$. Nach (1.1.2) haben wir nun

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_0 \in \mathbb{N} \, \forall k \geq k_0 : \|f_k - f\|_\infty \leq \varepsilon \, ,$$

d.h. (f_k) konvergiert gegen f. $\square$

Beispiel 1.1.11 Wir zeigen, dass der normierte Raum aus Beispiel 1.1.4 kein Banach-Raum ist. Sei o.B.d.A. $[a, b] = [0, 1]$ und seien $f_k \in C([0, 1], \mathbb{K})$, $k \in \mathbb{N}$, durch

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ -kx + k/2 + 1 & \text{für} \quad 1/2 < x < 1/2 + 1/k \\ 0 & \text{für} \quad 1/2 + 1/k \leq x \leq 1 \end{cases}$$

definiert. Da für $k \leq l$

$$\begin{aligned} \|f_k - f_l\|_1 &= \int_0^{1/2} |f_k(x) - f_l(x)| \, \mathrm{d}x + \int_{1/2}^{1/2+1/k} |f_k(x) - f_l(x)| \, \mathrm{d}x + \int_{1/2+1/k}^{1} |f_k(x) - f_l(x)| \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{1/2}^{1/2+1/k} |f_k(x) - f_l(x)| \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{k} \, , \end{aligned}$$

ist (f_k) eine Cauchy-Folge. Angenommen, es gäbe ein $f \in C([0, 1], \mathbb{K})$ mit

$$\lim_{k \to \infty} f_k = f \, ,$$

d.h. mit

$$\lim_{k \to \infty} \|f - f_k\|_1 = 0 \, . \tag{1.1.3}$$

Sei $\varepsilon \in]0, 1/2[$. Für alle $k \geq 1/\varepsilon$ ist

$$\|f - f_k\|_1 = \int_0^{1/2} |f(x) - 1| \, \mathrm{d}x + \int_{1/2}^{1/2+\varepsilon} |f(x) - f_k(x)| \, \mathrm{d}x + \int_{1/2+\varepsilon}^{1} |f(x)| \, \mathrm{d}x \, .$$

Wegen (1.1.3) folgt

$$\int_0^{1/2} |f(x) - 1| \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{und} \quad \int_{1/2+\varepsilon}^{1} |f(x)| \, \mathrm{d}x = 0 \, .$$

Da f stetig ist, muss dann $f(x) = 1$ für alle $x \in [0, 1/2]$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in]1/2 + \varepsilon, 1]$ gelten. Da dabei $\varepsilon \in]0, 1/2[$ beliebig ist, erhalten wir

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & \text{für} \quad 1/2 < x \leq 1 \end{cases} ,$$

was im Widerspruch zur Stetigkeit von f steht. □

Satz 1.1.12 *Jeder abgeschlossene Unterraum eines Banach-Raumes ist wieder ein Banach-Raum.*

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus der Tatsache, dass jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes mit der induzierten Metrik wieder ein vollständiger metrischer Raum ist. □

Beispiel 1.1.13 Sei X ein metrischer Raum und sei

$$C_b(X, \mathbb{K}) := \{f \in B(X, \mathbb{K}) : f \text{ ist stetig}\} \, .$$

Dann ist $C_b(X, \mathbb{K})$ ein abgeschlossener Unterraum von $B(X, \mathbb{K})$. Ist nämlich (f_k) eine Folge in $C_b(X, \mathbb{K})$, die gegen ein $f \in B(X, \mathbb{K})$ konvergiert, so konvergiert (f_k) nach Beispiel 1.1.6 gleichmäßig gegen f. Da alle f_k stetig sind, ist dann auch f stetig. Also ist $f \in C_b(X, \mathbb{K})$, womit die Abgeschlossenheit von $C_b(X, \mathbb{K})$ gezeigt ist. Mit Satz 1.1.12 folgt, dass $(C_b(X, \mathbb{K}), \| \ \|_\infty)$ ein Banach-Raum ist. Wir bemerken noch, dass für kompaktes X der Raum $C_b(X, \mathbb{K})$ mit dem Raum $C(X, \mathbb{K})$ aller stetigen Abbildungen $f : X \to \mathbb{K}$ übereinstimmt. □

1.2 Stetige lineare Abbildungen

Das folgende Beispiel zeigt, dass lineare Abbildungen zwischen normierten Räumen nicht notwendig stetig sind.

Beispiel 1.2.1 Sei der Vektorraum $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm versehen und sei $L : C^\infty([0, 1], \mathbb{R}) \to C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ durch

$$L(f) := f'$$

definiert. Dann ist L linear. Aber L ist nicht stetig. Um dies einzusehen, betrachten wir die Funktionen $f_k \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$, $f_k(x) := \left(1/\sqrt{k}\right) x^k$. Wegen $\|f_k\|_\infty = 1/\sqrt{k}$ konvergiert (f_k) gegen 0. Wäre L stetig, so müsste $\|L(f_k)\|_\infty \to \|L(0)\|_\infty = 0$ gelten. Da $f_k'(x) = \sqrt{k}\, x^{k-1}$ und somit $\|L(f_k)\|_\infty = \sqrt{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, ist aber die Folge $(L(f_k))$ noch nicht mal beschränkt. □

Seien V und W normierte Räume und bezeichne $\| \ \|$ sowohl die Norm auf V als auch auf W.

Satz 1.2.2 *Sei $L : V \to W$ linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *L ist stetig.*

(ii) *L ist in 0 stetig.*

(iii) *Es existiert eine Konstante $a \geq 0$ mit*

$$\|L(v)\| \leq a\|v\| \quad \textit{für alle} \quad v \in V \ . \tag{1.2.1}$$

(iv) *L ist Lipschitz-stetig.*

Beweis. Die Implikationen (i)$\Longrightarrow$(ii) und (iv)$\Longrightarrow$(i) sind trivial.

Sei L in 0 stetig. Wegen $L(0) = 0$ gibt es dann ein $\delta > 0$ mit

$$u \in V \text{ und } \|u\| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \|L(u)\| \leq 1 \ . \tag{1.2.2}$$

Hieraus folgt (1.2.1) für $a := 1/\delta$. Ist nämlich $v = 0$, so ist die behauptete Ungleichung trivialerweise erfüllt. Ist dagegen $v \neq 0$, so erhalten wir aus $\|(\delta/\|v\|)v\| = \delta$ und (1.2.2), dass

$$\|L(v)\| = a\|v\| \left\| L\left(\frac{\delta}{\|v\|}v\right)\right\| \leq a\|v\| \ .$$

Damit ist (ii)$\Longrightarrow$(iii) gezeigt.

Da aus (1.2.1)

$$\|L(v_1) - L(v_2)\| = \|L(v_1 - v_2)\| \leq a\|v_1 - v_2\| \quad \text{für alle} \quad v_1, v_2 \in V$$

folgt, gilt auch die Implikation (iii)$\Longrightarrow$(iv). □

Bemerkung 1.2.3 Stetige lineare Abbildungen werden auch **beschränkte** lineare **Operatoren** genannt. Man beachte aber, dass die Nullabbildung die einzige lineare Abbildung $L : V \to W$ ist, deren Bild $L(V)$ beschränkt ist. □

Satz 1.2.4 *Gibt es einen linearen Homöomorphismus $L : V \to W$, so ist V genau dann ein Banach-Raum, wenn W ein Banach-Raum ist.*

Beweis. Übung. □

Den $\mathbb{K}$-Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen $L : V \to W$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(V, W)$.

Definition 1.2.5 *Sei $L \in \mathcal{L}(V, W)$. Dann heißt*

$$\|L\| := \inf\{a \geq 0 : \|L(v)\| \leq a\|v\| \textit{ für alle } v \in V\}$$

die **Operatornorm** *von L.*

Bezeichne U einen weiteren normierten Raum.

Satz 1.2.6 (i) *Für alle $L \in \mathcal{L}(V, W)$ ist*

$$\|L\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|L(v)\| = \sup_{\|v\|=1} \|L(v)\| \ .$$

(ii) *Die Abbildung $L \in \mathcal{L}(V, W) \mapsto \|L\| \in \mathbb{R}$ ist eine Norm auf $\mathcal{L}(V, W)$.*

(iii) *Für alle $L \in \mathcal{L}(V, W)$ und alle $v \in V$ ist*

$$\|L(v)\| \leq \|L\| \cdot \|v\| \ .$$

(iv) *Für alle $K \in \mathcal{L}(U,V)$ und alle $L \in \mathcal{L}(V,W)$ ist $L \circ K \in \mathcal{L}(U,W)$ und*

$$\|L \circ K\| \leq \|L\| \cdot \|K\| \; .$$

Beweis. (i) Übung.

(ii) Dass diese Abbildung die Eigenschaften einer Norm besitzt, ist mit Hilfe von (i) einfach zu überprüfen.

(iii) Die Behauptung folgt unmittelbar aus Definition 1.2.5.

(iv) Nach (iii) gilt für alle $u \in U$

$$\|L \circ K(u)\| = \|L(K(u))\| \leq \|L\| \cdot \|K(u)\| \leq \|L\| \cdot \|K\| \cdot \|u\| \; .$$

Mit Satz 1.2.2 und Definition 1.2.5 ergibt sich die Behauptung. □

Beispiel 1.2.7 Sei $C([a,b],\mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm versehen. Dann ist

$$L : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \; , \quad L(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \; ,$$

eine stetige lineare Abbildung mit $\|L\| = b - a$, denn

$$|L(f)| = \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \|f\|_\infty\,\mathrm{d}x = (b-a)\|f\|_\infty$$

für alle $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ und

$$|L(1)| = b - a = (b-a)\|1\|_\infty \; .$$

□

Im weiteren sei $\mathcal{L}(V,W)$ immer mit der Operatornorm versehen.

Satz 1.2.8 *Ist W ein Banach-Raum, so ist auch $\mathcal{L}(V,W)$ ein Banach-Raum.*

Beweis. Sei W ein Banach-Raum. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{L}(V,W)$ vollständig ist. Dazu verfahren wir wie im Beweis von Satz 1.1.10. Sei (L_k) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}(V,W)$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_0 \in \mathbb{N} \, \forall k,l \geq k_0 : \|L_k - L_l\| \leq \varepsilon \; .$$

Da nach Satz 1.2.6(iii)

$$\|L_k(v) - L_l(v)\| = \|(L_k - L_l)(v)\| \leq \|L_k - L_l\| \cdot \|v\| \; ,$$

folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_0 \in \mathbb{N} \, \forall k,l \geq k_0 \, \forall v \in V : \|L_k(v) - L_l(v)\| \leq \varepsilon \|v\| \; . \tag{1.2.3}$$

Demnach ist $(L_k(v))$ für jedes $v \in V$ eine Cauchy-Folge in W und somit aufgrund der Vollständigkeit von W konvergent. Wir definieren $L : V \to W$ durch

$$L(v) := \lim_{k\to\infty} L_k(v) \; .$$

Aus der Linearität aller L_k erhalten wir mittels Satz 1.1.7, dass auch L linear ist. Da nach (1.2.3)

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_0 \in \mathbb{N} \, \forall k \geq k_0 \, \forall v \in V : \|L_k(v) - L(v)\| \leq \varepsilon \|v\| \tag{1.2.4}$$

und folglich

$$\|L(v)\| \leq \|L_k(v) - (L_k(v) - L(v))\| \leq \|L_k(v)\| + \|L_k(v) - L(v)\| \leq (\|L_k\| + \varepsilon)\|v\|$$

für alle $v \in V$ und $k \geq k_0$, ist L nach Satz 1.2.2 auch stetig. Damit ist gezeigt, dass $L \in \mathcal{L}(V,W)$. Die Aussage (1.2.4) impliziert nun

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_0 \in \mathbb{N} \, \forall k \geq k_0 : \|L_k - L\| \leq \varepsilon \; .$$

Also konvergiert (L_k) gegen L. □

1.3 Endlichdimensionale normierte Räume

Definition 1.3.1 *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zwei Normen $\| \ \|$ und $\| \ \|_*$ auf V heißen* **äquivalent** $:\Longleftrightarrow$ *Es existieren Konstanten $a > 0$ und $b > 0$ derart, dass*

$$a\|v\| \leq \|v\|_* \leq b\|v\| \quad \textit{für alle} \quad v \in V \ .$$

Bemerkung 1.3.2 (i) Nach Satz 1.2.2 sind zwei Normen $\| \ \|$ und $\| \ \|_*$ auf V genau dann äquivalent, wenn $\mathrm{id}_V : (V, \| \ \|) \to (V, \| \ \|_*)$ ein Homöomorphismus ist.

(ii) Es ist offensichtlich, dass die Äquivalenz von Normen tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.

□

Beispiel 1.3.3 Die Normen $\| \ \|_\infty$ und $\| \ \|_1$ auf $C([0,1], \mathbb{K})$ sind nicht äquivalent. Es gilt wohl

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \,\mathrm{d}x = \|f\|_\infty \quad \text{für alle} \quad f \in C([0,1], \mathbb{K}) \ .$$

Es existiert jedoch kein $a > 0$ mit $a\|f\|_\infty \leq \|f\|_1$ für alle $f \in C([0,1], \mathbb{K})$. Man betrachte zum Beispiel die Funktionen $f_k \in C([0,1], \mathbb{K})$, $f_k(x) = x^k$. Für diese Funktionen ist $\|f_k\|_\infty = 1$ und $\|f_k\|_1 = 1/(k+1)$ und folglich hat man

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|f_k\|_1}{\|f_k\|_\infty} = 0 \ .$$

□

Satz 1.3.4 *Auf jedem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum sind alle Normen äquivalent.*

Beweis. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $\| \ \|$ und $\| \ \|_*$ zwei Normen auf V. Da V algebraisch isomorph zu $\mathbb{K}^n$ ist, gibt es eine bijektive lineare Abbildung $L : \mathbb{K}^n \to V$. Offensichtlich sind dann $x \in \mathbb{K}^n \mapsto \|L(x)\| \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{K}^n \mapsto \|L(x)\|_* \in \mathbb{R}$ Normen auf $\mathbb{K}^n$ und diese Normen sind genau dann äquivalent, wenn $\| \ \|$ und $\| \ \|_*$ äquivalent sind. Somit können wir o.B.d.A. $V = \mathbb{K}^n$ annehmen. Außerdem können wir annehmen , dass $\| \ \|$ die Euklidische Norm ist.

Bezeichne $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$ und sei

$$b := \sqrt{\sum_{i=1}^n \|e_i\|_*^2} \ .$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung schließen wir für jedes $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\|x\|_* = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_* \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|e_i\|_* \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \|e_i\|_*^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|_*^2} = b\|x\| \ . \tag{1.3.1}$$

Sei jetzt $\mathbb{K}^n$ mit der Standardmetrik versehen. Dann ist $S := \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\| = 1\}$ als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ kompakt. Außerdem ist nach den Sätzen 1.1.7 und 1.2.2 und der Ungleichung (1.3.1) die Abbildung $x \in \mathbb{K}^n \mapsto \|x\|_* \in \mathbb{R}^n$ stetig. Demzufolge existiert ein $y_0 \in S$ mit

$$\|y_0\|_* \leq \|y\|_* \quad \text{für alle} \quad y \in S \ . \tag{1.3.2}$$

Wir setzen $a := \|y_0\|_*$. Wegen $0 \notin S$ ist $a > 0$. Ist $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, so ist $x/\|x\| \in S$, was nach (1.3.2)

$$a \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|_*$$

impliziert. Folglich gilt

$$a\|x\| \leq \|x\|_* \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{K}^n \ .$$

Damit ist die Äquivalenz der Normen $\| \ \|$ und $\| \ \|_*$ gezeigt. □

Satz 1.3.5 *Seien V und W normierte Räume, sei V endlichdimensional und sei $L : V \to W$ linear. Dann ist L stetig.*

Beweis. Sei $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Wie man leicht verifiziert, ist durch

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right\|_{\mathfrak{B}} := \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i|$$

eine Norm $\| \ \|_{\mathfrak{B}}$ auf V definiert. Weiter ist

$$\left\| L\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L(v_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot \|L(v_i)\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|L(v_i)\| \right) \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i| \ .$$

Setzen wir also

$$a := \sum_{i=1}^{n} \|L(v_i)\| \ ,$$

so haben wir

$$\|L(v)\| \leq a \|v\|_{\mathfrak{B}} \quad \text{für alle} \quad v \in V \ .$$

Da nach Satz 1.3.4 alle Normen auf V äquivalent sind, folgt mit Satz 1.2.2 die Behauptung. □

Folgerung 1.3.6 (i) *Jede bijektive lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen normierten Räumen ist ein Homöomorphimus.*

(ii) *Jeder endlichdimensionale normierte Raum ist ein Banach-Raum.*

Beweis. (i) Das folgt aus Satz 1.3.5.

(ii) Sei V ein n-dimensionaler normierter Raum. Dann gibt es eine bijektive lineare Abbildung $L : \mathbb{K}^n \to V$. Eine solche Abbildung ist nach (i) ein Homöomorphismus. Da $\mathbb{K}^n$ nach Beispiel 1.1.9 ein Banach-Raum ist, folgt mit Satz 1.2.4, dass auch V ein Banach-Raum ist. □

Folgerung 1.3.7 *Jeder endlichdimensionale Unterraum eines normierten Raumes ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei $(V, \| \ \|)$ ein normierter Raum und sei W ein endlichdimensionaler Unterraum von V. Wir versehen W mit der Einschränkung von $\| \ \|$ auf W. Sei (w_k) eine Folge in W, die gegen ein $v \in V$ konvergiert. Da (w_k) eine Cauchy-Folge in W ist und da W nach Folgerung 1.3.6(ii) ein Banach-Raum ist, konvergiert (w_k) gegen ein $w \in W$. Es folgt $v = w$ und somit $v \in W$. □

Wir charakterisieren jetzt die endlichdimensionalen normierten Räume durch eine topologische Eigenschaft.

Satz 1.3.8 (Satz von Riesz) *Ein normierter Vektorraum ist genau dann endlichdimensional, wenn er lokal kompakt ist.*

Beweis. ($\Longrightarrow$) Sei V ein n-dimensionaler normierter Raum. Dann ist V nach Folgerung 1.3.6(i) zu $\mathbb{K}^n$ homöomorph. Da $\mathbb{K}^n$ lokal kompakt ist, ist folglich auch V lokal kompakt.

($\Longleftarrow$) Sei V ein lokal kompakter normierter Raum. Dann gibt es eine kompakte Umgebung von $0 \in V$. Da jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge wieder kompakt ist, gibt es folglich ein $\varepsilon > 0$ derart, dass die abgeschlossene ε-Kugel $\bar{B}_\varepsilon(0)$ kompakt ist. Aufgrund der Stetigkeit von $v \in V \mapsto \varepsilon^{-1} v \in V$ ist dann auch die Kugel $\bar{B}_1(0)$ kompakt.

Offensichtlich ist das System $\left\{B_{1/2}(v)\right\}_{v\in V}$ der offenen (1/2)-Kugeln $B_{1/2}(v)$ eine offene Überdeckung von $\bar{B}_1(0)$. Die Kompaktheit von $\bar{B}_1(0)$ impliziert, dass

$$\bar{B}_1(0) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{1/2}(w_i)$$

für gewisse $w_1, \dots, w_m \in V$. Sei W die lineare Hülle von $\{w_1, \dots, w_m\}$. Wir beweisen, dass $W = V$. Angenommen, dass ist nicht der Fall. Sei dann $v \in V \setminus W$ und sei

$$\delta := \inf_{w\in W} \|v - w\| \ .$$

Da W nach Folgerung 1.3.7 abgeschlossen ist, ist $\delta > 0$. Folglich können wir ein $w_0 \in W$ so wählen, dass

$$\|v - w_0\| \leq \frac{3\delta}{2} \ .$$

Sei $v_0 := (v - w_0)/\|v - w_0\|$. Wegen $\|v_0\| = 1$ gibt es ein $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $\|v_0 - w_j\| \leq 1/2$. Damit haben wir

$$v - (w_0 + \|v - w_0\|w_j) = \|v - w_0\|v_0 - \|v - w_0\|w_j = \|v - w_0\|(v_0 - w_j)$$

und

$$w_0 + \|v - w_0\|w_j \in W \ ,$$

woraus

$$\delta \leq \|v - (w_0 + \|v - w_0\|w_j)\| = \|v - w_0\| \cdot \|v_0 - w_j\| \leq \frac{1}{2}\|v - w_0\| \ ,$$

also

$$2\delta \leq \|v - w_0\|$$

folgt. Die letzte Ungleichung widerspricht der Wahl von w_0. $\square$

1.4 Prä-Hilbert- und Hilbert-Räume

Definition 1.4.1 (i) *Ein* **Skalarprodukt** *auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine Abbildung*

$$(v_1, v_2) \in V \times V \mapsto \langle v_1, v_2\rangle \in \mathbb{K}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(a) *Für alle $v \in V$ ist*

$$\langle v, v\rangle \geq 0$$

und

$$\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0 \ .$$

(b) *Für alle $v_1, v_2 \in V$ ist*

$$\langle v_1, v_2\rangle = \overline{\langle v_2, v_1\rangle} \ .$$

(c) *Für alle $v_1, v_2, v_3 \in V$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ ist*

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, v_3\rangle = \lambda_1\langle v_1, v_3\rangle + \lambda_2\langle v_2, v_3\rangle \ .$$

(ii) *Ein* **Prä-Hilbert-Raum** *ist ein Paar $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ bestehend aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V und einem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf V.*

Statt $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ schreiben wir auch einfach V.

Bemerkung 1.4.2 Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so bedeutet die Eigenschaft (b) in Definition 1.4.1, dass

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle \quad \text{für alle} \quad v_1, v_2 \in V \ .$$

□

Satz 1.4.3 *Sei V ein Prä-Hilbert-Raum. Dann gilt:*

(i) *Für alle $v_1, v_2, v_3 \in V$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$*

$$\langle v_3, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle = \overline{\lambda}_1 \langle v_3, v_1 \rangle + \overline{\lambda}_2 \langle v_3, v_2 \rangle \ .$$

(ii) *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: Für alle $v_1, v_2 \in V$ ist*

$$|\langle v_1, v_2 \rangle|^2 \leq \langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle \ . \tag{1.4.1}$$

Dabei gilt

$$|\langle v_1, v_2 \rangle|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle \tag{1.4.2}$$

genau dann, wenn v_1 und v_2 linear abhängig sind.

Beweis. (i) Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Eigenschaften (b) und (c) in Definition 1.4.1.

(ii) Sind $v_1, v_2 \in V$ linear abhängig, d.h. gilt $v_1 = 0$ oder $v_2 = \lambda v_1$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$, so gilt offensichtlich (1.4.2).

Seien jetzt $v_1, v_2 \in V$ beliebig und gelte o.B.d.A. $v_1 \neq 0$. Wir setzen

$$\lambda_1 := -\overline{\langle v_1, v_2 \rangle} \quad \text{und} \quad \lambda_2 := \langle v_1, v_1 \rangle$$

und schließen

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle \\ &= |\lambda_1|^2 \langle v_1, v_1 \rangle + \lambda_1 \overline{\lambda}_2 \langle v_1, v_2 \rangle + \overline{\lambda}_1 \lambda_2 \overline{\langle v_1, v_2 \rangle} + |\lambda_2|^2 \langle v_2, v_2 \rangle \\ &= \langle v_1, v_1 \rangle \left(\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle - |\langle v_1, v_2 \rangle|^2 \right) \ . \end{aligned}$$

Da $\langle v_1, v_1 \rangle > 0$, folgt hieraus (1.4.1). Gilt (1.4.2), so ist

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle = 0$$

und somit nach der Eigenschaft (a) in Definition 1.4.1

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \ .$$

Wegen $\lambda_2 \neq 0$ bedeutet dies, dass v_1 und v_2 linear abhängig sind. □

Satz 1.4.4 *Ist V ein Prä-Hilbert-Raum, so wird durch*

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad \textit{für} \quad v \in V$$

eine Norm $\| \ \|$ auf V definiert.

Beweis. Die Eigenschaften (a) und (b) in Definition 1.1.1 folgen sofort aus (a) und (b) in Definition 1.4.1. Die Dreiecksungleichung beweisen wir mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung.

Für $v_1, v_2 \in V$ ist

$$\begin{aligned}
\|v_1 + v_2\|^2 &= \langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle \\
&= |\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle| \\
&= |\langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_1 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle| \\
&\leq \langle v_1, v_1 \rangle + 2\,|\langle v_1, v_2 \rangle| + \langle v_2, v_2 \rangle \\
&\leq \langle v_1, v_1 \rangle + 2\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}\sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle} + \langle v_2, v_2 \rangle \\
&= \left(\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} + \sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle}\right)^2 \\
&= (\|v_1\| + \|v_2\|)^2
\end{aligned}$$

und folglich

$$\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\| \, .$$

□

Ein Prä-Hilbert-Raum ist somit stets auch ein normierter Raum und damit auch ein metrischer Raum.

Lemma 1.4.5 *In jedem Prä-Hilbert-Raum V gilt*

$$\|v_1 + v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 2\left(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2\right) \quad \textit{für alle} \quad v_1, v_2 \in V \, . \tag{1.4.3}$$

Beweis. Übung. □

Die Beziehung (1.4.3) wird **Parallelogrammidentität** genannt.

Definition 1.4.6 *Ein vollständiger Prä-Hilbert-Raum heißt* **Hilbert-Raum***.*

Beispiel 1.4.7 (i) Der Vektorraum $\mathbb{K}^n$ ist mit dem durch

$$\langle z, w \rangle := \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w}_i \quad \text{für} \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n \text{ und } w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{K}^n$$

definierten Skalarprodukt ein Hilbert-Raum.

(ii) Sei

$$\ell_2(\mathbb{K}) := \left\{ (z_k)_{k \in \mathbb{N}} : z_k \in \mathbb{K} \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 < +\infty \right\}$$

mit den Operationen

$$(z_k)_{k \in \mathbb{N}} + (w_k)_{k \in \mathbb{N}} = (z_k + w_k)_{k \in \mathbb{N}} \qquad \text{und} \qquad \lambda \cdot (z_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\lambda z_k)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{für} \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

versehen. Dann ist durch

$$\left\langle (z_k)_{k \in \mathbb{N}}, (w_k)_{k \in \mathbb{N}} \right\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} z_k \overline{w_k}$$

ein Skalarprodukt auf $\ell_2(\mathbb{K})$ definiert und mit diesem Skalarprodukt ist $\ell_2(\mathbb{K})$ ein Hilbert-Raum. □

Definition 1.4.8 *Sei V ein Prä-Hilbert-Raum und sei M eine Teilmenge von V. Dann heißt*

$$M^{\perp} := \{ v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \textit{ für alle } w \in M \}$$

das **orthogonale Komplement** *von M (in V).*

Lemma 1.4.9 *Für jede Teilmenge M eines Prä-Hilbert-Raumes V ist $M^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von V.*

Beweis. Übung. □

Sei im folgenden H ein Hilbert-Raum.

Satz 1.4.10 *Sei W ein abgeschlossener Unterraum von H. Dann existiert zu jedem $v \in H$ genau ein $w \in W$ mit $v - w \in W^\perp$.*

Beweis. Sei $v \in H$ und sei

$$c := \inf_{u \in W} \|v - u\| \,. \tag{1.4.4}$$

Dann gibt es eine Folge (w_k) in W mit

$$\lim_{k\to\infty} \|v - w_k\| = c \,. \tag{1.4.5}$$

Für solch eine Folge existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|v - w_k\| \leq c + \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k \geq k_0 \,. \tag{1.4.6}$$

Außerdem haben wir

$$\left\| v - \frac{w_k + w_l}{2} \right\| \geq c \quad \text{für alle} \quad k, l \in \mathbb{N} \,. \tag{1.4.7}$$

Mittels Parallelogrammidentität erhalten wir aus (1.4.6) und (1.4.7) für $k, l \geq k_0$

$$\begin{aligned}
\|w_k - w_l\|^2 &= \|(v - w_l) - (v - w_k)\|^2 \\
&= 2\|v - w_l\|^2 + 2\|v - w_k\|^2 - \|(v - w_l) + (v - w_k)\|^2 \\
&= 2\|v - w_l\|^2 + 2\|v - w_k\|^2 - 4\left\| v - \frac{w_k + w_l}{2} \right\|^2 \\
&\leq 4(c + \varepsilon)^2 - 4c^2 \\
&= 8c\varepsilon + 4\varepsilon^2 \,.
\end{aligned}$$

Also ist (w_k) eine Cauchy-Folge. Da H vollständig und W abgeschlossen ist, konvergiert (w_k) gegen ein $w \in W$. Wegen

$$c \leq \|v - w\| \leq \|v - w_k\| + \|w - w_k\| \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

und (1.4.5) ist

$$\|v - w\| = c \,. \tag{1.4.8}$$

Wir zeigen, dass $v - w \in W^\perp$. Angenommen, das gilt nicht. Dann existiert ein $w_0 \in W$ mit $\langle v - w, w_0 \rangle \neq 0$. Wir setzen

$$w_1 := w + \frac{\langle v - w, w_0 \rangle}{\|w_0\|^2} w_0 \in W$$

und schließen

$$\begin{aligned}
\|v - w_1\|^2 &= \left\langle v - w - \frac{\langle v - w, w_0 \rangle}{\|w_0\|^2} w_0, v - w - \frac{\langle v - w, w_0 \rangle}{\|w_0\|^2} w_0 \right\rangle \\
&= \|v - w\|^2 - \frac{|\langle v - w, w_0 \rangle|^2}{\|w_0\|^2} \,.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\|v - w_1\| < \|v - w\| \,,$$

was ein Widerspruch zu (1.4.4) und (1.4.8) ist.

Es bleibt zu zeigen, dass w eindeutig bestimmt ist. Sei $w_* \in W$ derart, dass auch $v - w_* \in W^\perp$. Dann ist $w - w_* = (v - w_*) - (v - w) \in W \cap W^\perp$. Also ist $\langle w - w_*, w - w_* \rangle = 0$, was gleichbedeutend mit $w_* = w$ ist. □

Folgerung 1.4.11 *Sei W wie in Satz 1.4.10. Dann ist*

$$H = W \oplus W^{\perp} .$$

Beweis. Die Behauptung ist eine Umformulierung von Satz 1.4.10. $\square$

Definition 1.4.12 *Sei $v \in H$ und sei W wie in Satz 1.4.10. Der Vektor $w \in W$ mit $v - w \in W^{\perp}$ heißt die* **orthogonale Projektion** *von v auf W.*

Zum Schluss dieses Abschnitts beschreiben wir die stetigen linearen Funktionale auf H, d.h. die Elemente von $\mathcal{L}(H, \mathbb{K})$.

Satz 1.4.13 (Darstellungssatz von Riesz) *Zu jedem $\Phi \in \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$ existiert genau ein $v \in H$ mit*

$$\Phi(u) = \langle u, v \rangle \quad \textit{für alle} \quad u \in H . \tag{1.4.9}$$

Dabei gilt $\|\Phi\| = \|v\|$.

Beweis. Sei $\Phi \in \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$ und sei $W := \operatorname{Ker}(\Phi)$. Dann ist W ein abgeschlossener Unterraum von H. Ist $W = H$, so ist $\Phi(u) = 0$ für alle $u \in H$. Folglich gilt in diesem Fall (1.4.9) für $v := 0$. Sei jetzt $W \neq H$. Nach Folgerung 1.4.11 ist dann $W^{\perp} \neq \{0\}$. Sei $v_0 \in W^{\perp} \setminus \{0\}$ und sei $u \in H$. Da $\Phi(u)v_0 - \Phi(v_0)u \in W$, gilt

$$\langle \Phi(u)v_0 - \Phi(v_0)u, v_0 \rangle = 0 .$$

Das ist zu

$$\Phi(u)\|v_0\|^2 = \left\langle u, \overline{\Phi(v_0)}\, v_0 \right\rangle$$

bzw.

$$\Phi(u) = \left\langle u, \frac{\overline{\Phi(v_0)}}{\|v_0\|^2}\, v_0 \right\rangle$$

äquivalent. Setzen wir also

$$v := \frac{\overline{\Phi(v_0)}}{\|v_0\|^2}\, v_0 ,$$

so erhalten wir (1.4.9).

Wir zeigen, dass v durch (1.4.9) eindeutig bestimmt ist. Sei $v_* \in V$ derart, dass auch $\Phi(u) = \langle u, v_* \rangle$ für alle $u \in H$. Dann ist

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v_* \rangle \quad \text{und somit} \quad \langle u, v - v_* \rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in H.$$

Insbesondere ist $\langle v - v_*, v - v_* \rangle = 0$, woraus $v - v_* = 0$, d.h. $v = v_*$ folgt.

Wir müssen noch $\|\Phi\| = \|v\|$ beweisen. Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist

$$|\Phi(u)| = |\langle u, v \rangle| \leq \|v\| \cdot \|u\| \quad \text{für alle} \quad u \in H .$$

Dies liefert $\|\Phi\| \leq \|v\|$. Wegen

$$\|\Phi(v)\| = \|v\|^2$$

gilt $\|\Phi\| \geq \|v\|$. Folglich ist tatsächlich $\|\Phi\| = \|v\|$. $\square$

1.5 Orthonormalsysteme und Fourier-Reihen

Die folgende Definition dehnt den Konvergenzbegriff für Reihen in $\mathbb{K}^n$ auf Reihen in beliebigen normierten Räumen aus.

Definition 1.5.1 (i) *Eine Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *in einem normierten Raum* V *heißt* **konvergent** $:\Longleftrightarrow$ *Die Folge* $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *der Partialsummen*

$$s_i := \sum_{k=1}^{i} v_k$$

ist konvergent, d.h. es existiert ein $v \in V$ *mit*

$$\lim_{i\to\infty} \left\| v - \sum_{k=1}^{i} v_k \right\| = 0\ .$$

Wir schreiben dann $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k = v$.

(ii) *Eine Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *in* V *heißt* **absolut konvergent** $:\Longleftrightarrow$ *Die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|v_k\|$ *ist konvergent.*

Satz 1.5.2 *Sei* V *ein Banach-Raum. Dann ist jede absolut konvergente Reihe in* V *auch konvergent.*

Beweis. Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ eine absolut konvergente Reihe in V. Indem wir das Konvergenzkriterium von Cauchy auf $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|v_k\|$ anwenden, erhalten wir, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=i}^{j} \|v_k\| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad j \geq i \geq i_0$$

existiert. Wegen

$$\left\| \sum_{k=i}^{j} v_k \right\| \leq \sum_{k=i}^{j} \|v_k\|$$

folgt, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\| \sum_{k=i}^{j} v_k \right\| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad j \geq i \geq i_0$$

existiert. Also bilden die Partialsummen $s_i = \sum\limits_{k=1}^{i} v_k$ eine Cauchy-Folge. Da V vollständig ist, ist diese Folge und somit die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ konvergent. $\square$

Bemerkung 1.5.3 Eine wichtige Konsequenz aus Satz 1.5.2 ist, dass in jedem Banach-Raum das Konvergenzkriterium von Cauchy, das Wurzelkriterium und das Quotientenkriterium als Konvergenzkriterien für Reihen gelten. $\square$

Ist H ein n-dimensionaler Hilbert-Raum, so gibt es bekanntlich eine Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von H mit

$$\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl} \quad \text{für} \quad k, l = 1, \ldots, n$$

unf für jeden Vektor $v \in H$ hat man dann die Darstellung

$$v = \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k \ .$$

Wir gehen jetzt der Frage nach, inwieweit man das auf unendlichdimensionale Hilbert-Räume übertragen kann.

Sei H im weiteren ein unendlichdimensionaler Hilbert-Raum.

Definition 1.5.4 (i) *Ein* **Orthonormalsystem** *in H ist eine Folge $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Vektoren $e_k \in H$ mit*

$$\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl} \quad \textit{für alle} \quad k, l \in \mathbb{N} \ .$$

(ii) *Sei $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in H und sei $v \in H$. Die Zahlen $\langle v, e_k \rangle$, $k \in \mathbb{N}$, heißen die* **Fourier-Koeffizienten** *von v bezüglich $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k$ heißt* **Fourier-Reihe** *von v bezüglich $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Satz 1.5.5 *Sei (e_k) ein Orthonormalsystem in H. Dann gilt für alle $v \in H$:*

(i) *Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\langle v, e_k \rangle|^2$ ist konvergent und*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, e_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \ . \tag{1.5.1}$$

(ii) *Die Fourier-Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k$ ist konvergent und*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, e_k \rangle|^2 \ .$$

(iii) *Es ist genau dann $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k = v$, wenn*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, e_k \rangle|^2 = \|v\|^2 \ . \tag{1.5.2}$$

Beweis. (i) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\begin{aligned}
&\left\| v - \sum_{k=1}^{i} \langle v, e_k \rangle e_k \right\|^2 \\
&= \left\langle v - \sum_{k=1}^{i} \langle v, e_k \rangle e_k, v - \sum_{k=1}^{i} \langle v, e_k \rangle e_k \right\rangle \\
&= \|v\|^2 - \left\langle v, \sum_{k=1}^{i} \langle v, e_k \rangle e_k \right\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{i} \langle v, e_k \rangle e_k, v \right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^{i} \langle v, e_k \rangle e_k, \sum_{k=1}^{i} \langle v, e_k \rangle e_k \right\rangle \\
&= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{i} \overline{\langle v, e_k \rangle} \langle v, e_k \rangle - \sum_{k=1}^{i} \langle v, e_k \rangle \langle e_k, v \rangle + \sum_{k,l=1}^{i} \langle v, e_k \rangle \overline{\langle v, e_l \rangle} \delta_{kl}
\end{aligned}$$

und somit
$$\left\| v - \sum_{k=1}^{i} \langle v, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{i} |\langle v, e_k \rangle|^2 \ . \tag{1.5.3}$$
Folglich ist
$$\sum_{k=1}^{i} |\langle v, e_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N} \ .$$
Das liefert die Behauptung.

(ii) Wegen (i) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit
$$\sum_{k=i}^{j} |\langle v, e_k \rangle|^2 < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad j \geq i \geq i_0 \ .$$
Zusammen mit
$$\left\| \sum_{k=i}^{j} \langle v, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k=i}^{j} |\langle v, e_k \rangle|^2$$
ergibt sich, dass die Folge der Partialsummen von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k$ eine Cauchy-Folge ist. Da H vollständig ist, ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k$ dann konvergent. Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k = w$, d.h.
$$\lim_{i \to \infty} \left\| w - \sum_{k=1}^{i} \langle v, e_k \rangle e_k \right\| = 0 \ .$$
Mittels
$$\left| \|w\| - \left\| \sum_{k=1}^{i} \langle v, e_k \rangle e_k \right\| \right| \leq \left\| w - \sum_{k=1}^{i} \langle v, e_k \rangle e_k \right\|$$
folgt
$$\|w\| = \lim_{i \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{i} \langle v, e_k \rangle e_k \right\|$$
und weiter
$$\|w\|^2 = \lim_{i \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{i} \langle v, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \lim_{i \to \infty} \sum_{k=1}^{i} |\langle v, e_k \rangle|^2 \ .$$
Damit ist (ii) gezeigt.

(iii) Diese Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz von (1.5.3). □

Bemerkung 1.5.6 Die Ungleichung (1.5.1) nennt man **Besselsche Ungleichung**. Die Gleichung (1.5.2) heißt **Parsevalsche Gleichung**. □

Lemma 1.5.7 (i) *Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ eine konvergente Reihe in H. Dann ist*
$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} v_k, w \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v_k, w \rangle \quad \textit{für alle} \quad w \in H \ .$$

(ii) *Ist (e_k) ein Orthonormalsystem in H, so gilt*
$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k, e_l \right\rangle = \langle v, e_l \rangle \quad \textit{für alle} \quad l \in \mathbb{N} \textit{ und } v \in H \ .$$

Beweis. (i) Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k = v$, d.h.

$$\lim_{i\to\infty} \left\| v - \sum_{k=1}^{i} v_k \right\| = 0 \ .$$

Unter Benutzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgern wir

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty} \left| \langle v, w\rangle - \sum_{k=1}^{i} \langle v_k, w\rangle \right| &= \lim_{i\to\infty} \left| \langle v, w\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{i} v_k, w \right\rangle \right| \\
&= \lim_{i\to\infty} \left| \left\langle v - \sum_{k=1}^{i} v_k, w \right\rangle \right| \\
&\le \lim_{i\to\infty} \left\| v - \sum_{k=1}^{i} v_k \right\| \cdot \|w\| \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

(ii) Dies folgt aus (i). □

Definition 1.5.8 *Ein Orthonormalsystem* (e_k) *in* H *heißt* **vollständig** $:\Longleftrightarrow$ *Für alle* $v \in H$ *gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k\rangle e_k = v \ .$$

Satz 1.5.9 *Sei* (e_k) *ein Orthonormalsystem in* H*. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) (e_k) *ist vollständig.*

(ii) *Für alle* $v \in H$ *gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, e_k\rangle|^2 = \|v\|^2 \ .$$

(iii) *Ist* $v \in H$ *derart, dass*

$$\langle v, e_k\rangle = 0 \quad \textit{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \ , \tag{1.5.4}$$

so ist $v = 0$.

(iv) *Ist* $\Phi \in \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$ *derart, dass*

$$\Phi(e_k) = 0 \quad \textit{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \ ,$$

so ist $\Phi = 0$.

Beweis. Nach Satz 1.5.5(iii) gilt (i)$\Longleftrightarrow$(ii). Der Darstellungssatz von Riesz (Satz 1.4.13) impliziert (iii)$\Longleftrightarrow$(iv). Wir zeigen (i)$\Longleftrightarrow$(iii). Ist (e_k) vollständig und gilt (1.5.4), so ist

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k\rangle e_k = 0 \ .$$

Also ist (i)$\Longrightarrow$(iii) richtig. Jetzt setzen wir voraus, dass (iii) gilt. Sei $v \in H$ und sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k\rangle e_k = w$. Nach Lemma 1.5.7(ii) ist dann $\langle w, e_l\rangle = \langle v, e_l\rangle$. Somit haben wir

$$\langle w - v, e_l\rangle = \langle w, e_l\rangle - \langle v, e_l\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad l \in \mathbb{N} \ .$$

Wegen (iii) folgt $w - v = 0$, d.h. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k\rangle e_k = v$. Damit ist auch (iii)$\Longrightarrow$(i) gezeigt. □

Beispiel 1.5.10 Sei
$$e_k := (\delta_{kl})_{l\in\mathbb{N}} \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}\,,$$
d.h.
$$e_1 := (1,0,0,0,\ldots)\,, \quad e_2 := (0,1,0,0,\ldots)\,, \quad e_3 := (0,0,1,0,\ldots)\,, \quad \ldots$$
Dann ist $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in $\ell_2(\mathbb{K})$ (vgl. Beispiel 1.4.7(ii)). Außerdem gilt für jedes $v = (z_l)_{l\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{K})$
$$\langle v, e_k\rangle = z_k$$
und somit
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 = \|v\|^2\,.$$
Nach Satz 1.5.9 folgt, dass $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vollständig ist. □

Wir wollen jetzt noch zwei Charakterisierungen von Hilbert-Räumen mit vollständigen Orthonormalsystemen angeben.

Seien V und W zwei Prä-Hilbert-Räume.

Definition 1.5.11 *Eine Abbildung $L : V \to W$ heißt* **Isometrie** $:\Longleftrightarrow$ *L ist bijektiv und*
$$\langle L(v_1), L(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle \quad \textit{für alle} \quad v_1, v_2 \in V\,.$$

Lemma 1.5.12 *Ist $L : V \to W$ eine Isometrie, so ist $L \in \mathcal{L}(V, W)$.*

Beweis. Übung. □

Satz 1.5.13 *In einem unendlichdimensionalen Hilbert-Raum H existiert genau dann ein vollständiges Orthonormalsystem, wenn es eine Isometrie $L : \ell_2(\mathbb{K}) \to H$ gibt.*

Beweis. ($\Longrightarrow$) Sei $(\tilde{e}_k)$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H. Dann definiert
$$L\left((z_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \tilde{e}_k$$
eine Isometrie $L : \ell_2(\mathbb{K}) \to H$.

($\Longleftarrow$) Sei $L : \ell_2(\mathbb{K}) \to H$ eine Isometrie und sei (e_k) das in Beispiel 1.5.10 angegebene Orthonormalsystem in $\ell_2(\mathbb{K})$. Dann ist $(L(e_k))$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H.

Die Einzelheiten verbleiben als Übung. □

Satz 1.5.14 *Ein unendlichdimensionaler Hilbert-Raum H besitzt genau dann ein vollständiges Orthonormalsystem, wenn er separabel ist.*

Beweis. ($\Longrightarrow$) Sei (e_k) ein vollständiges Orthonormalsystem in H und sei
$$M := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k : n \in \mathbb{N} \text{ und } \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}\,,$$
wobei $\mathbb{R} := \mathbb{Q}$, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, und $\mathbb{R} := \mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q}$, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Offensichtlich ist M abzählbar. Wir zeigen, dass M eine dichte Teilmenge von H ist. Sei $\varepsilon > 0$ und sei $v \in H$. Aufgrund der Vollständigkeit von (e_k) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit
$$\left\| v - \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k\rangle e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, existieren weiter Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit

$$|\langle v, e_k\rangle - \alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2n} \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, n \; .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \left\| v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| &\le \left\| v - \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k\rangle e_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} (\langle v, e_k\rangle - \alpha_k) e_k \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_k\rangle - \alpha_k| \cdot \|e_k\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon \; . \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Sei $M = \{w_l : l \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge in H. Wir konstruieren eine Folge (v_k) in H dadurch, dass wir aus der Folge (w_l) nacheinander diejenigen w_l herausstreichen, die eine Linearkombination der Vektoren $w_1, \ldots, w_{l-1}$ sind. Damit sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ linear unabhängig. Indem wir auf (v_k) das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren anwenden, erhalten wir ein Orthonormalsystem (e_k). Dieses System ist vollständig. Um dies einzusehen, betrachten wir ein $v \in H$ mit

$$\langle v, e_k\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \; .$$

Dann gilt auch

$$\langle v, v_k\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

und folglich auch

$$\langle v, w_l\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad l \in \mathbb{N} \; .$$

Da M dicht ist, gibt es außerdem zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $l_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|v - w_{l_0}\| < \varepsilon$. Es folgt

$$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = \langle v - w_{l_0}, v\rangle \le \|v - w_{l_0}\| \cdot \|v\| \le \varepsilon \|v\|$$

und somit

$$\|v\| \le \varepsilon \; .$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, muss $v = 0$ sein. Nach Satz 1.5.9 ist damit die Vollständigkeit von (e_k) bewiesen. $\square$

Kapitel 2

Maß- und Integrationstheorie

2.1 Mengenalgebren und messbare Abbildungen

Sei X eine nichtleere Menge.

Definition 2.1.1 *Sei $\mathcal{R}$ ein nichtleeres System von Teilmengen von X.*

(i) *$\mathcal{R}$ heißt* **Mengenring** $:\iff$ *Sind $A, B \in \mathcal{R}$, so sind auch $A \cup B \in \mathcal{R}$, $A \cap B \in \mathcal{R}$ und $A \setminus B \in \mathcal{R}$.*

(ii) *$\mathcal{R}$ heißt* **Mengenalgebra** *über X* $:\iff$ *Sind $A, B \in \mathcal{R}$, so sind auch $A \cup B \in \mathcal{R}$ und $X \setminus A \in \mathcal{R}$.*

(iii) *$\mathcal{R}$ heißt* **σ-Algebra** *über X* $:\iff$

  (a) *Ist $A \in \mathcal{R}$, so ist auch $X \setminus A \in \mathcal{R}$.*

  (b) *Sind $A_i \in \mathcal{R}$ für $i \in \mathbb{N}$, so ist auch $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$.*

Satz 2.1.2 (i) *Für jede Mengenalgebra $\mathcal{A}$ über X gilt $X \in \mathcal{A}$, $\emptyset \in \mathcal{A}$ und*

$$A, B \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{A} \text{ und } A \setminus B \in \mathcal{A}\,. \tag{2.1.1}$$

(ii) *Jede Mengenalgebra ist ein Mengenring.*

(iii) *Ein Mengenring $\mathcal{R}$ ist genau dann eine Mengenalgebra über X, wenn $X \in \mathcal{R}$.*

Beweis. (i) Sei $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra über X und sei $A \in \mathcal{A}$. Dann ist $X = A \cup (X \setminus A) \in \mathcal{A}$ und folglich auch $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{A}$. Die Beziehung (2.1.1) ergibt sich mittels

$$A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) \quad \text{und} \quad A \setminus B = X \setminus ((X \setminus A) \cup B)\ .$$

(ii) Das ist eine unmittelbare Folgerung aus (i).

(iii) Die Implikation ($\Longrightarrow$) gilt nach (i). Der Beweis von ($\Longleftarrow$) verbleibt als Übung. $\square$

Satz 2.1.3 *Für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ gilt:*

(i) *Sind $A, B \in \mathcal{A}$, so ist auch $A \cup B \in \mathcal{A}$.*

(ii) *Sind* $A_i \in \mathcal{A}$ *für* $i \in \mathbb{N}$*, so ist auch* $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$*.*

Beweis. (i) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und seien $A, B \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$A \cup B = A \cup B \cup B \cup B \cup B \cup \cdots \in \mathcal{A} \,.$$

(ii) Man benutze

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i) \right) .$$

□

Satz 2.1.3 impliziert, dass jede σ-Algebra eine Mengenalgebra ist.

Beispiel 2.1.4 (i) Das System aller endlichen Teilmengen von X ist offensichtlich ein Mengenring. Nach Satz 2.1.2 ist es dann und nur dann eine Mengenalgebra, wenn X endlich ist.

(ii) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X und das Mengensystem $\{\emptyset, X\}$ sind trivialerweise σ-Algebren.

(iii) Das System

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq X : A \text{ oder } X \setminus A \text{ ist höchstens abzählbar}\}$$

ist eine σ-Algebra. Um dies einzusehen, müssen wir die Bedingungen (a) und (b) aus Definition 2.1.1 verifizieren. Die erste Bedingung ist offensichtlich erfüllt. Seien $A_i \in \mathcal{A}$ für $i \in \mathbb{N}$. Ist A_i für jedes $i \in \mathbb{N}$ höchstens abzählbar, so ist auch $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ höchstens abzählbar. Ist hingegen A_{i_0} für ein $i_0 \in \mathbb{N}$ weder endlich noch abzählbar, so ist $X \setminus A_{i_0}$ und somit auch $X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq X \setminus A_{i_0}$ höchstens abzählbar. Damit ist gezeigt, dass auch die Bedingung (b) gilt. □

Definition 2.1.5 *Ein nichtleeres Mengensystem* $\mathcal{S}$ *heißt* **monoton** $:\Longleftrightarrow$

(a) *Für jede aufsteigende Folge von Mengen* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$ *in* $\mathcal{S}$ *ist* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$*.*

(b) *Für jede absteigende Folge von Mengen* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$ *in* $\mathcal{S}$ *ist* $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$*.*

Satz 2.1.6 *Eine Mengenalgebra* $\mathcal{A}$ *ist genau dann eine* σ*-Algebra, wenn sie monoton ist.*

Beweis. Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, so ist $\mathcal{A}$ nach Definition 2.1.1 und Satz 2.1.3 auch monoton. Wir haben also nur die Implikation ($\Longleftarrow$) zu beweisen. Sei $\mathcal{A}$ eine monotone Mengenalgebra und seien $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$. Wir müssen zeigen, dass

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \,. \tag{2.1.2}$$

Dazu setzen wir

$$\tilde{A}_1 := A_1 \,, \quad \tilde{A}_2 := A_1 \cup A_2 \,, \quad \tilde{A}_3 := A_1 \cup A_2 \cup A_3 \,, \quad \ldots$$

Da $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra ist, ist $\tilde{A}_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Außerdem haben wir

$$\tilde{A}_1 \subseteq \tilde{A}_2 \subseteq \tilde{A}_3 \cdots \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,.$$

Da $\mathcal{A}$ monoton ist, folgt (2.1.2). □

Satz 2.1.7 *Sei $\mathfrak{M}$ ein nichtleeres System von Mengenalgebren über X.*

(i) *Der Durchschnitt $\bigcap \mathfrak{M} := \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{M}} \mathcal{A}$ ist eine Mengenalgebra.*

(ii) *Ist jedes $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$ eine σ-Algebra, so ist $\bigcap \mathfrak{M}$ ebenfalls eine σ-Algebra.*

Beweis. Übung. □

Definition 2.1.8 *Sei $\mathcal{S}$ ein nichtleeres System von Teilmengen von X. Dann heißt*

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) := \bigcap \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \text{ ist Mengenalgebra und } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}\}$$

die **durch $\mathcal{S}$ erzeugte Mengenalgebra** *und*

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}) := \bigcap \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}\}$$

die **durch $\mathcal{S}$ erzeugte σ-Algebra**.

Bemerkung 2.1.9 Nach Satz 2.1.7 ist $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ eine Mengenalgebra und $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S})$ eine σ-Algebra. □

Definition 2.1.10 *Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $\mathcal{O}(X, d)$ das System der offenen Mengen von (X, d). Die Elemente von*

$$\mathcal{B}(X) := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(X, d))$$

werden **Borel-Mengen** *in X genannt.*

Bemerkung 2.1.11 Wie man leicht sieht, ist

$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(X, d)) ,$$

wobei $\mathcal{F}(X, d)$ das System der abgeschlossenen Mengen von (X, d) ist. □

Definition 2.1.12 *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X und $\mathcal{A}'$ eine σ-Algebra über Y. Eine Abbildung $\Phi : X \to Y$ heißt* **$(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbar** $:\iff$ *Für alle $B \in \mathcal{A}'$ ist $\Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Lemma 2.1.13 *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X und sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ nichtleer. Eine Abbildung $\Phi : X \to Y$ ist genau dann $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}))$-messbar, wenn $\Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{S}$.*

Beweis. Wir betrachten die Mengensysteme

$$\Phi^{-1}(\mathcal{S}) = \left\{\Phi^{-1}(B) : B \in \mathcal{S}\right\} \quad \text{und} \quad \Phi^{-1}\left(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S})\right) = \left\{\Phi^{-1}(B) : B \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S})\right\} .$$

Zu zeigen ist, dass aus der Inklusion $\Phi^{-1}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}$ die Inklusion $\Phi^{-1}\left(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S})\right) \subseteq \mathcal{A}$ folgt. Dazu beweisen wir, dass

$$\Phi^{-1}\left(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S})\right) = \mathcal{A}_\sigma\left(\Phi^{-1}(\mathcal{S})\right) . \tag{2.1.3}$$

Haben wir (2.1.3) gezeigt, so sind wir fertig. Da nämlich $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, gilt mit $\Phi^{-1}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}$ auch $\mathcal{A}_\sigma\left(\Phi^{-1}(\mathcal{S})\right) \subseteq \mathcal{A}$.

Das Mengensystem $\Phi^{-1}\left(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S})\right)$ ist eine σ-Algebra, denn

$$X \setminus \Phi^{-1}(M) = \Phi^{-1}(Y \setminus M) \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi^{-1}(M_i) = \Phi^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) \tag{2.1.4}$$

für beliebige Teilmengen M und M_i, $i \in \mathbb{N}$, von Y. Da außerdem $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S})$ und somit auch $\Phi^{-1}(\mathcal{S}) \subseteq \Phi^{-1}(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}))$, ist

$$\mathcal{A}_\sigma\left(\Phi^{-1}(\mathcal{S})\right) \subseteq \Phi^{-1}\left(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S})\right) \ .$$

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion setzen wir

$$\tilde{\mathcal{A}} := \left\{M \subseteq Y : \Phi^{-1}(M) \in \mathcal{A}_\sigma\left(\Phi^{-1}(\mathcal{S})\right)\right\} \ .$$

Aufgrund von (2.1.4) ist auch $\tilde{\mathcal{A}}$ eine σ-Algebra. Ferner haben wir $\mathcal{S} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$. Folglich gilt $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$, d.h.

$$\Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}_\sigma\left(\Phi^{-1}(\mathcal{S})\right) \quad \text{für alle} \quad B \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}) \ ,$$

also

$$\Phi^{-1}\left(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S})\right) \subseteq \mathcal{A}_\sigma\left(\Phi^{-1}(\mathcal{S})\right) \ .$$

□

Sei $\overline{\mathbb{R}}$ die erweiterte Zahlengerade, d.h. $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Wir setzen die Anordnung, die Addition und die Multiplikation in $\mathbb{R}$ in üblicher Weise auf $\overline{\mathbb{R}}$ fort. Es ist also

$$\begin{aligned}
-\infty < a < +\infty \qquad & \text{für alle} \quad a \in \mathbb{R} \ , \\
a + (+\infty) := +\infty \qquad & \text{für alle} \quad a \in \,]-\infty, +\infty] \ , \\
a + (-\infty) := -\infty \qquad & \text{für alle} \quad a \in [-\infty, +\infty[\ , \\
a \cdot (\pm\infty) := \pm\infty \qquad & \text{für alle} \quad a \in \,]0, +\infty] \ , \\
a \cdot (\pm\infty) := \mp\infty \qquad & \text{für alle} \quad a \in [-\infty, 0[\ .
\end{aligned}$$

Außerdem ist es für einige Überlegungen zweckmäßig,

$$0 \cdot (\pm\infty) := 0$$

zu setzen. Hingegen ist $+\infty + (-\infty)$ nicht definiert. Wir versehen $\overline{\mathbb{R}}$ folgendermaßen mit einer Metrik $\overline{d}$. Wir definieren $\overline{\tanh} : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ durch

$$\overline{\tanh}(a) := \begin{cases} \tanh(a) & \text{für } a \in \mathbb{R} \\ \pm 1 & \text{für } a = \pm\infty \end{cases}$$

und setzen

$$\overline{d}(a_1, a_2) := \left|\overline{\tanh}(a_1) - \overline{\tanh}(a_2)\right| \ .$$

Die Konvergenz in $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ erweitert die Konvergenz in $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ um die bestimmte Divergenz. Insbesondere gilt $\lim\limits_{k\to\infty} = +\infty$ (bzw. $\lim\limits_{k\to\infty} = -\infty$) in $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$, wenn zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_k \geq c$ (bzw. $a_k \leq c$) für alle $k \geq k_0$ existiert. Die Bezeichnung $\overline{\mathbb{R}}$ ist dadurch gerechtfertigt, dass $\overline{\mathbb{R}}$ der Abschluss von $\mathbb{R}$ im metrischen Raum $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ ist.

Definition 2.1.14 *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X. Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt* **$\mathcal{A}$-messbar** *$:\Longleftrightarrow$ Sie ist $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-messbar.*

Lemma 2.1.15 *Sei $\mathcal{S} = \{]a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\}$. Dann ist $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.*

Beweis. Da $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$, gilt

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \ .$$

Andererseits ist jedes Element von $\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ abzählbare Vereinigung von Intervallen der Form $[-\infty, a[$, $]a, b[$ und $]a, +\infty]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Offensichtlich ist $]a, +\infty] \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S})$. Wir haben aber auch $[-\infty, a[\in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S})$ und $]a, b[\in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S})$, denn

$$[-\infty, a[= \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[-\infty, a - \frac{1}{i}\right] = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\overline{\mathbb{R}} \setminus \left]a - \frac{1}{i}, +\infty\right]\right)$$

und
$$]a,b[= [-\infty, b[\cap]a, +\infty] \ .$$
Also gilt $\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S})$ und folglich auch
$$\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}) \ .$$
□

Folgerung 2.1.16 *Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn*
$$f^{-1}(]a, +\infty]) \in \mathcal{A} \quad \textit{für alle} \quad a \in \mathbb{R} \ .$$

Beweis. Dies ist eine Folgerung aus den Lemmas 2.1.13 und 2.1.15. □

Satz 2.1.17 *Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar und $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig. Dann ist auch $\varphi \circ f$ $\mathcal{A}$-messbar.*

Beweis. Sei $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ offen. Da φ stetig ist, ist $\varphi^{-1}(U)$ offen. Da f $\mathcal{A}$-messbar ist, folgt
$$(\varphi \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}\left(\varphi^{-1}(U)\right) \in \mathcal{A} \ .$$
Nach Lemma 2.1.13 ist damit der Satz bewiesen. □

Eine unmittelbare Konsequenz des letzten Satzes ist

Folgerung 2.1.18 *Ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar, so sind auch $|f|$ und f^2 $\mathcal{A}$-messbar.* □

Definition 2.1.19 *Sei $A \subseteq X$. Die durch*
$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \textit{für } x \in A \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$
definierte Abbildung $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ heißt die **charakteristische Funktion** *von A.*

Lemma 2.1.20 *Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar und sei $A \in \mathcal{A}$. Dann ist auch $\chi_A \cdot f$ $\mathcal{A}$-messbar.*

Beweis. Wir wenden Folgerung 2.1.16 an. Sei zunächst $a \geq 0$. Dann haben wir
$$\chi_A(x) \cdot f(x) > a \quad \Longleftrightarrow \quad x \in A \text{ und } f(x) > a \ ,$$
woraus
$$(\chi_A \cdot f)^{-1}(]a, +\infty]) = A \cap f^{-1}(]a, +\infty]) \in \mathcal{A}$$
folgt. Ist hingegen $a < 0$, so gilt
$$\chi_A(x) \cdot f(x) > a \quad \Longleftrightarrow \quad x \in X \setminus A \text{ oder } f(x) > a$$
und folglich
$$(\chi_A \cdot f)^{-1}(]a, +\infty]) = (X \setminus A) \cup f^{-1}(]a, +\infty]) \in \mathcal{A} \ .$$
□

Satz 2.1.21 *Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) *Ist $f + g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert, d.h. $f^{-1}(\{+\infty\}) \cap g^{-1}(\{-\infty\}) = \emptyset$ und $f^{-1}(\{-\infty\}) \cap g^{-1}(\{+\infty\}) = \emptyset$, so ist $f + g$ $\mathcal{A}$-messbar.*

(ii) *$\lambda f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist $\mathcal{A}$-messbar.*

(iii) $f \cdot g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *ist $\mathcal{A}$-messbar.*

Beweis. (i) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\begin{aligned}(f+g)^{-1}(]a,+\infty]) &= \{x \in X : f(x)+g(x) > a\} \\ &= \{x \in X : f(x) > a - g(x)\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \in X : f(x) > r\} \cap \{x \in X : r > a - g(x)\}) \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(f^{-1}(]r,+\infty]) \cap g^{-1}(]a-r,+\infty])\right)\end{aligned}$$

und somit

$$(f+g)^{-1}(]a,+\infty]) \in \mathcal{A}\,.$$

Nach Folgerung 2.1.16 ist damit die Behauptung bewiesen.

(ii) Übung.

(iii) Sei

$$A_+ := (f \cdot g)^{-1}(\{+\infty\})\,, \quad A_- := (f \cdot g)^{-1}(\{-\infty\}) \quad \text{und} \quad A_0 := (f \cdot g)^{-1}(\{0\})\,.$$

Da

$$\begin{aligned}A_+ =& \left(f^{-1}(\{+\infty\}) \cap g^{-1}(]0,+\infty])\right) \cup \left(f^{-1}(\{-\infty\}) \cap g^{-1}([-\infty,0[)\right) \\ & \left(f^{-1}(]0,+\infty]) \cap g^{-1}(\{+\infty\})\right) \cup \left(f^{-1}([-\infty,0[) \cap g^{-1}(\{-\infty\})\right)\,, \\ A_- =& \left(f^{-1}(\{+\infty\}) \cap g^{-1}([-\infty,0[)\right) \cup \left(f^{-1}(\{-\infty\}) \cap g^{-1}(]0,+\infty])\right) \\ & \left(f^{-1}([-\infty,0[) \cap g^{-1}(\{+\infty\})\right) \cup \left(f^{-1}(]0,+\infty]) \cap g^{-1}(\{-\infty\})\right) \quad \text{und} \\ A_0 =& f^{-1}(\{0\}) \cup g^{-1}(\{0\})\,,\end{aligned}$$

sind $A_+, A_-, A_0 \in \mathcal{A}$. Demzufolge ist auch $B := X \setminus (A_+ \cup A_- \cup A_0) \in \mathcal{A}$. Wir setzen

$$\tilde{f} := \chi_B \cdot f\,, \quad \tilde{g} := \chi_B \cdot g \quad \text{und} \quad h := f \cdot g - \tilde{f} \cdot \tilde{g}\,.$$

Nach (i) sind wir fertig, wenn wir gezeigt haben, dass $\tilde{f} \cdot \tilde{g}$ und h $\mathcal{A}$-messbar sind. Zunächst bemerken wir, dass $\tilde{f}(x) \in \mathbb{R}$ und $\tilde{g}(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in X$. Insbesondere sind $\tilde{f} + \tilde{g}$ und $\tilde{f} - \tilde{g}$ definiert. Da die Funktionen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ nach Lemma 2.1.20 $\mathcal{A}$-messbar sind, folgt mittels (i), (ii) und Folgerung 2.1.18, dass auch

$$\tilde{f} \cdot \tilde{g} = \frac{1}{4}\left(\left(\tilde{f}+\tilde{g}\right)^2 - \left(\tilde{f}-\tilde{g}\right)^2\right)$$

$\mathcal{A}$-messbar ist. Desweitern haben wir

$$h(x) = \begin{cases} +\infty & \text{für } x \in A_+ \\ -\infty & \text{für } x \in A_- \\ 0 & \text{für } x \in A_0 \cup B \end{cases}\,,$$

d.h.

$$h = \chi_{A_+} \cdot (+\infty) - \chi_{A_-} \cdot (-\infty)\,.$$

Hieraus erhalten wir wiederum mittels Lemma 2.1.20, dass h $\mathcal{A}$-messbar ist. $\square$

Satz 2.1.22 *Seien $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$-messbare Funktionen und konvergiere $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann ist auch f $\mathcal{A}$-messbar.*

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass

$$f^{-1}(]a, +\infty]) \in \mathcal{A} \, . \tag{2.1.5}$$

Dazu setzen wir

$$A_{ij} := f_i^{-1}\left(\left]a + \frac{1}{j}, +\infty\right]\right) \quad \text{und} \quad B_{ij} := \bigcap_{k=i}^{\infty} A_{kj} \, .$$

für $i, j \in \mathbb{N}$. Da die Funktionen f_i $\mathcal{A}$-messbar sind, gilt $A_{ij} \in \mathcal{A}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ und demzufolge auch

$$B_{ij} \in \mathcal{A} \quad \text{für alle} \quad i, j \in \mathbb{N} \, . \tag{2.1.6}$$

Wir beweisen, dass

$$f^{-1}(]a, +\infty]) = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} B_{ij} \, . \tag{2.1.7}$$

Wenn wir dies getan haben, sind wir fertig, denn aus (2.1.6) und (2.1.7) folgt sofort (2.1.5).

Sei $x \in f^{-1}(]a, +\infty])$. Dann existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$f(x) > a + \frac{1}{j_0} \, .$$

Wegen $f(x) = \lim\limits_{i \to \infty} f_i(x)$ folgt, dass es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$f_i(x) > a + \frac{1}{j_0} \quad \text{für alle} \quad i \geq i_0 \, ,$$

d.h. mit $x \in A_{ij_0}$ für alle $i \geq i_0$ gibt. Dann ist $x \in B_{i_0 j_0}$ und somit $x \in \bigcup\limits_{i,j=1}^{\infty} B_{ij}$. Damit ist

$$f^{-1}(]a, +\infty]) \subseteq \bigcup_{i,j=1}^{\infty} B_{ij} \tag{2.1.8}$$

gezeigt. Sei jetzt $x \in \bigcup\limits_{i,j=1}^{\infty} B_{ij}$, etwa $x \in B_{i_0 j_0}$. Dann gilt $x \in A_{ij_0}$ für alle $i \geq i_0$, d.h.

$$f_i(x) > a + \frac{1}{j_0} \quad \text{für alle} \quad i \geq i_0 \, .$$

Da $f(x) = \lim\limits_{i \to \infty} f_i(x)$, erhalten wir

$$f(x) \geq a + \frac{1}{j_0} > a \, ,$$

d.h. $x \in f^{-1}(]a, +\infty])$. Damit ist auch

$$f^{-1}(]a, +\infty]) \supseteq \bigcup_{i,j=1}^{\infty} B_{ij} \tag{2.1.9}$$

gezeigt. Aus (2.1.8) und (2.1.9) folgt (2.1.7). □

Satz 2.1.23 *Seien $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$-messbare Funktionen und seien $g_1, g_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ durch*

$$g_1(x) := \sup_i f_i(x) \quad \textit{und} \quad g_2(x) := \inf_i f_i(x)$$

definiert. Dann sind auch g_1 und g_2 $\mathcal{A}$-messbar.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$. Da für $x \in X$ genau dann $g_1(x) > a$ gilt, wenn ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f_i(x) > a$ existiert, ist

$$g_1^{-1}(]a, +\infty]) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i^{-1}(]a, +\infty]) \ .$$

Aufgrund der $\mathcal{A}$-Messbarkeit der Funktionen f_i folgt $g_1^{-1}(]a, +\infty]) \in \mathcal{A}$. Damit ist gezeigt, dass g_1 $\mathcal{A}$-messbar ist. Dass auch g_2 $\mathcal{A}$-messbar ist, erhält man nun aus Satz 2.1.21(ii) und

$$g_2(x) = -\sup_i(-f_i(x)) \ .$$

□

Folgerung 2.1.24 *Sind $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$-messbar, so sind auch die durch*

$$h_1(x) := \limsup_{i \to \infty} f_i(x) \quad \text{und} \quad h_2(x) := \liminf_{i \to \infty} f_i(x)$$

definierten Funktionen $h_1, h_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar.

Beweis. Da

$$\limsup_{i \to \infty} f_i(x) = \inf_i \left(\sup_{j \ge i} f_j(x) \right) \quad \text{und} \quad \liminf_{i \to \infty} f_i(x) = \sup_i \left(\inf_{j \ge i} f_j(x) \right) \ ,$$

folgt die Behauptung aus Satz 2.1.23. □

2.2 Inhalte und Maße

Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring.

Definition 2.2.1 *Eine Funktion $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ heißt* **additiv** $:\Longleftrightarrow$ *Für alle $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \cap B = \emptyset$ ist*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \ .$$

Sie heißt σ**-additiv** $:\Longleftrightarrow$ *Für jede Folge von Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$ ist*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \ .$$

Satz 2.2.2 *Eine additive Funktion $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ ist genau dann σ-additiv, wenn*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$$

für jede aufsteigende Folge von Mengen $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$ in $\mathcal{R}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$.

Beweis. Übung. □

Definition 2.2.3 (i) *Eine Funktion $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ heißt* **Inhalt** $:\Longleftrightarrow$ *μ ist additiv und $\mu(\emptyset) = 0$.*

(ii) *Ein Inhalt μ heißt* σ**-Inhalt** $:\Longleftrightarrow$ *μ ist σ-additiv.*

(iii) *Ein σ-Inhalt $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ heißt* **Maß** $:\iff$ *$\mathcal{R}$ ist eine σ-Algebra.*

Bemerkung 2.2.4 Ein σ-Inhalt wird auch **Prämaß** genannt. □

Beispiel 2.2.5 (i) Sei X eine beliebige Menge. Für $A \subseteq X$ setzen wir

$$\mu(A) := \begin{cases} \operatorname{card} A & \text{, falls } A \text{ endlich} \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases} .$$

Die dadurch definierte Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ ist ein Maß. Dieses Maß wird **Zählmaß** genannt.

(ii) Sei X eine beliebige nichtleere Menge und sei $\xi \in X$ fixiert. Die durch

$$\mu_\xi(A) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \xi \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion $\mu_\xi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ ist ein Maß. Dieses Maß heißt **Dirac-Maß** in ξ.

(iii) Sei

$$\mathcal{R} := \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ oder } \mathbb{N} \setminus A \text{ ist endlich}\}$$

und sei $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } A \text{ endlich} \\ 1 & \text{, falls } \mathbb{N} \setminus A \text{ endlich} \end{cases}$$

definiert. Dann ist μ ein Inhalt. Dieser Inhalt ist aber kein σ-Inhalt. Wäre nämlich μ σ-additiv, so wäre

$$\mu(\mathbb{N}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\{i\}) = 0 .$$

Nach Definition von μ ist aber $\mu(\mathbb{N}) = 1$.

□

Satz 2.2.6 *Sei $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ ein Inhalt und seien $A, B \in \mathcal{R}$. Dann gilt:*

(i) *$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.*

(ii) *$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.*

(iii) *Ist $A \subseteq B$, so ist $\mu(A) \leq \mu(B)$. Gilt außerdem $\mu(A) < +\infty$, so ist $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

Beweis. (i) Da μ additiv ist, haben wir

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) , \tag{2.2.1}$$

$$\mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) = \mu((A \cap B) \cup (B \setminus A)) = \mu(B) \tag{2.2.2}$$

und folglich

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(B) . \tag{2.2.3}$$

Ist $\mu(B \setminus A) < +\infty$, so erhalten wir die gewünschte Aussage, indem wir auf beiden Seiten von (2.2.3) den Ausdruck $\mu(B \setminus A)$ subtrahieren. Ist hingegen $\mu(B \setminus A) = +\infty$, so gilt nach (2.2.1) und (2.2.2) auch $\mu(A \cup B) = +\infty$ und $\mu(B) = +\infty$, woraus ebenfalls die Behauptung folgt.

(ii) Dies ist eine direkte Konsequenz von (i).

(iii) Gelte $A \subseteq B$. Da μ additiv ist, ist dann

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A) ,$$

woraus man auch den zweiten Teil der Behauptung sofort erhält. □

Folgerung 2.2.7 *Ist $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ ein σ-Inhalt, so gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

für jede Folge von Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$.

Beweis. Übung. □

2.3 Das Lebesgue-Maß

Definition 2.3.1 *Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt*

$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i < b_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

***n-dimensionaler halboffener Quader** und*

$$\mathrm{vol}([a, b[) := \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) & \text{, falls } a_i < b_i \text{ für } i = 1, \ldots, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

*das **n-dimensionale Volumen** von $[a, b[$.*

Das System aller n-dimensionalen halboffenen Quader bezeichnen wir mit $\mathcal{Q}^n$. In diesem Abschnitt wollen wir eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ über $\mathbb{R}^n$ und ein darauf definiertes Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ mit folgenden Eigenschaften konstruieren.

(E1) $\mathcal{Q}^n \subseteq \mathcal{A}$ und $\mu(Q) = \mathrm{vol}(Q)$ für alle $Q \in \mathcal{Q}^n$.

(E2) μ ist translationsinvariant, d.h. ist $A \in \mathcal{A}$ und ist $v \in \mathbb{R}^n$, so ist auch $A + v \in \mathcal{A}$ und $\mu(A + v) = \mu(A)$.

Dabei ist $A + v := \{x + v : x \in A\}$. Nach dem folgenden Satz kann man mit solch einem Maß nicht jede Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ messen.

Satz 2.3.2 *Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über $\mathbb{R}^n$ und ist $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ein Maß mit den Eigenschaften (E1) und (E2), so ist $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Wir führen den Beweis indirekt und betrachten zunächst den Fall $n = 1$. Sei $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ein Maß mit (E1), (E2) und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Auf dem Intervall $[0, 1[$ betrachten wir die durch

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}$$

definierte Äquivalenzrelation. Sei $A \subseteq [0, 1[$ derart, dass A aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, und sei

$$B := \bigcup_{r \in]-1,1[\cap \mathbb{Q}} (A + r) .$$

Offensichtlich ist

$$B \subseteq [-1, 2[. \tag{2.3.1}$$

Außerdem gilt

$$[0, 1[\subseteq B . \tag{2.3.2}$$

Ist nämlich $x \in [0,1[$, so existiert nach Konstruktion von A ein $a(x) \in A$ mit $r(x) := x - a(x) \in \mathbb{Q}$. Da $x, a(x) \in [0,1[$, ist $r(x) \in]-1,1[$. Also gilt $x \in A + r(x) \subseteq B$, womit (2.3.2) gezeigt ist. Die Inklusionen (2.3.1) und (2.3.2) imlizieren $\mu([0,1[) \le \mu(B) \le \mu([-1,2[)$, d.h. nach (E1)

$$1 \le \mu(B) \le 3 \,. \tag{2.3.3}$$

Andererseits haben wir

$$(A + r_1) \cap (A + r_2) = \emptyset \quad \text{für alle} \quad r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \text{ mit } r_1 \neq r_2 \,. \tag{2.3.4}$$

Ist nämlich $(A + r_1) \cap (A + r_2) \neq \emptyset$ für $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, so existieren $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 + r_1 = a_2 + r_2$, d.h. $a_1 - a_2 = r_2 - r_1$. Also ist $a_1 \sim a_2$. Nach Konstruktion von A muss dann $a_1 = a_2$ und somit auch $r_1 = r_2$ gelten. Aus (2.3.4) folgt

$$\mu(B) = \sum_{r \in]-1,1[\cap\mathbb{Q}} \mu(A + r) = \sum_{r \in]-1,1[\cap\mathbb{Q}} \mu(A) \,.$$

Dies impliziert, dass $\mu(B) = 0$, falls $\mu(A) = 0$, und $\mu(B) = +\infty$, falls $\mu(A) > 0$. In beiden Fällen erhalten wir einen Widerspruch zu (2.3.3). Damit ist der Satz für $n = 1$ bewiesen.

Ist $n \ge 2$, so erhält man die gewünschte Aussage, indem man die obige Argumentation mit

$$\hat{A} := A \times [0,1[^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \hat{B} := \bigcup_{r \in]-1,1[\cap\mathbb{Q}} \Big(\hat{A} + (r, 0, \ldots, 0)\Big)$$

wiederholt. □

Bemerkung 2.3.3 Beim Beweis von Satz 2.3.2 wurde das so genannte Auswahlaxiom benutzt und zwar zur Bildung der Menge A. □

Zur Konstruktion des gewünschten Maßes auf $\mathbb{R}^n$ werden wir ein allgemeines Konstruktionsprinzip anwenden, welches jetzt erläutert werden soll. Wir beginnen mit

Definition 2.3.4 *Sei X eine Menge. Eine Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ heißt* **äußeres Maß** $:\Longleftrightarrow$

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) *Für alle $B, B' \in \mathcal{P}(X)$ mit $B \subseteq B'$ gilt $\mu^*(B) \le \mu^*(B')$.*

(iii) *Für jede Folge von Mengen $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{P}(X)$ gilt*

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) \,.$$

Satz 2.3.5 *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring über X und sei $\mu : \mathcal{R} \to [0,+\infty]$ ein σ-Inhalt. Für $B \in \mathcal{P}(X)$ setzen wir*

$$\mu^*(B) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R} \text{ und } B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} \,.$$

Dann ist $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ ein äußeres Maß und

$$\mu^*(A) = \mu(A) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{R} \,. \tag{2.3.5}$$

Beweis. Zuerst zeigen wir (2.3.5). Sei $A \in \mathcal{R}$. Wegen $A \subseteq A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$ ist

$$\mu^*(A) \leq \mu(A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \cdots = \mu(A) \,.$$

Sind andererseits $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, so können wir gemäß Satz 2.2.6 und Folgerung 2.2.7

$$\mu(A) = \mu\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

schließen. Also gilt auch $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. Damit ist (2.3.5) gezeigt.

Wir überprüfen jetzt, dass μ^* die Eigenschaften eines äußeren Maßes besitzt. Aufgrund von (2.3.5) und $\emptyset \in \mathcal{R}$ haben wir

$$\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0 \,.$$

Gelte $B \subseteq B' \subseteq X$. Dann erfüllt jede Folge von Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ mit $B' \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ auch $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, woraus

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B')$$

folgt. Seien schließlich $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{P}(X)$. Wir müssen zeigen, dass

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) \,. \tag{2.3.6}$$

Ist $\mu^*(B_i) = +\infty$ für ein $i \in \mathbb{N}$, so ist (2.3.6) trivialerweise erfüllt. Gelte also $\mu^*(B_i) < +\infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion von μ^* können wir zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Mengen $A_{ij} \in \mathcal{R}$, $i, j \in \mathbb{N}$, so wählen, dass $B_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$ und

$$\mu^*(B_i) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{ij}) - \frac{\varepsilon}{2^i} \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N} \,.$$

Dann ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup_{i,j=1}^{\infty} A_{ij}$ und

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \mu(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mu^*(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) + \varepsilon \,.$$

Folglich haben wir

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) + \varepsilon \quad \text{für jedes} \quad \varepsilon > 0 \,,$$

was zu (2.3.6) äquivalent ist. □

Bemerkung 2.3.6 Für das in Satz 2.3.5 konstruierte äußere Maß μ^* ist $\mu^*(B) = +\infty$, falls es keine Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ gibt. □

Im nächsten Schritt wollen wir aus einem äußeren Maß ein Maß konstruieren. Diese Konstruktion geht auf Carathéodory zurück.

Definition 2.3.7 *Sei $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ ein äußeres Maß. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt* **μ^*-messbar** $:\Longleftrightarrow$

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \textit{für alle} \quad B \subseteq X \,. \tag{2.3.7}$$

Bemerkung 2.3.8 Sei $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ ein äußeres Maß. Dann gilt für beliebige $A, B \subseteq X$

$$B = (B \cap A) \cup (B \setminus A) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$$

und folglich

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) + \mu^*(\emptyset) + \mu^*(\emptyset) + \cdots = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \,.$$

Somit ist $A \subseteq X$ genau dann μ^*-messbar, wenn

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B) \quad \text{für alle} \quad B \subseteq X \,.$$

□

Lemma 2.3.9 *Sei $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ ein σ-Inhalt und sei μ^* das daraus gemäß Satz 2.3.5 konstruierte äußere Maß. Ist $A \in \mathcal{R}$, so ist A μ^*-messbar.*

Beweis. Sei $A \in \mathcal{R}$ und sei $B \subseteq X$. Wir nehmen zunächst an, dass $\mu^*(B) < +\infty$. Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ mit

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{und} \quad \mu^*(B) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) - \varepsilon \,.$$

Dann haben wir

$$B \cap A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A) \quad \text{und} \quad B \setminus A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A) \,.$$

Da $A_i \cap A \in \mathcal{R}$ und $A_i \setminus A \in \mathcal{R}$ für $i \in \mathbb{N}$, ergibt sich

$$\begin{aligned}\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \setminus A) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(A_i \cap A) + \mu(A_i \setminus A)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu^*(B) + \varepsilon \,.\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B) \,. \tag{2.3.8}$$

Ist andererseits $\mu^*(B) = +\infty$, so gilt (2.3.8) trivialerweise. Nach Bemerkung 2.3.8 ist damit die μ^*-Messbarkeit von A gezeigt. □

Satz 2.3.10 *Sei $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ ein äußeres Maß und sei $\mathcal{A}^*$ das System der μ^*-messbaren Mengen. Dann gilt:*

(i) *$\mathcal{A}^*$ ist eine σ-Algebra.*

(ii) *Die Einschränkung von μ^* auf $\mathcal{A}^*$ ist ein Maß.*

(iii) *Ist $A \subseteq X$ und $\mu^*(A) = 0$, so ist $A \in \mathcal{A}^*$.*

Beweis. (i) Zuerst zeigen wir, dass $\mathcal{A}^*$ eine Mengenalgebra ist. Für beliebige Mengen $A, B \subseteq X$ gilt

$$B \setminus A = B \cap (X \setminus A) \,.$$

Folglich ist $A \subseteq X$ genau dann μ^*-messbar, wenn

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap (X \setminus A)) \quad \text{für alle} \quad B \subseteq X \,.$$

Dies impliziert, dass $X \setminus A \in \mathcal{A}^*$, falls $A \in \mathcal{A}^*$. Weiter können wir für $A, A' \in \mathcal{A}^*$ und $B \subseteq X$

$$\begin{aligned}
&\mu^*(B \cap (A \cup A')) + \mu^*(B \setminus (A \cup A')) \\
&\qquad = \mu^*((B \cap A) \cup ((B \setminus A) \cap A')) + \mu^*((B \setminus A) \setminus A') \\
&\qquad \le \mu^*(B \cap A) + \mu^*((B \setminus A) \cap A') + \mu^*((B \setminus A) \setminus A') \\
&\qquad = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \\
&\qquad = \mu^*(B)
\end{aligned}$$

schließen. Hieraus folgt mittels Bemerkung 2.3.8, dass $A \cup A' \in \mathcal{A}^*$, falls $A, A' \in \mathcal{A}^*$. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{A}^*$ eine Mengenalgebra ist.

Seien jetzt $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}^*$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und sei $B \subseteq X$ beliebig. Ersetzt man in (2.3.7) die Menge B durch $B \cap (A_1 \cup A_2)$ und die Menge A durch A_1, so erhält man

$$\begin{aligned}
\mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) &= \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu^*((B \cap (A_1 \cup A_2)) \setminus A_1) \\
&= \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \cap A_2) \,.
\end{aligned}$$

Durch Induktion folgt

$$\mu^*\left(B \cap \bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu^*(B \cap A_i) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \,.$$

Da $\mathcal{A}^*$ eine Mengenalgebra ist und somit

$$\bigcup_{i=1}^k A_i \in \mathcal{A}^* \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

gilt, gelangen wir zu

$$\begin{aligned}
\mu^*(B) = \mu^*\left(B \cap \bigcup_{i=1}^k A_i\right) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i\right) &\ge \mu^*\left(B \cap \bigcup_{i=1}^k A_i\right) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^k \mu^*(B \cap A_i) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und folglich

$$\mu^*(B) \ge \sum_{i=1}^\infty \mu^*(B \cap A_i) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \,. \tag{2.3.9}$$

Außerdem haben wir

$$\mu^*\left(B \cap \bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^\infty (B \cap A_i)\right) \le \sum_{i=1}^\infty \mu^*(B \cap A_i) \,. \tag{2.3.10}$$

Aus (2.3.9) und (2.3.10) ergibt sich

$$\mu^*\left(B \cap \bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \le \sum_{i=1}^\infty \mu^*(B \cap A_i) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \le \mu^*(B) \,.$$

Nach Bemerkung 2.3.8 folgt $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}^*$.

Sind nun $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots$ beliebige μ^*-messbarer Mengen, so setzen wir $A_1 := \tilde{A}_1$ und

$$A_{i+1} := \tilde{A}_{i+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{i} \tilde{A}_j = \tilde{A}_{i+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{i} A_j \quad \text{für} \quad i \in \mathbb{N} \,.$$

Weil $\mathcal{A}^*$ eine Mengenalgebra ist, sind dann auch $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}^*$. Desweiteren ist $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Also gilt nach der Überlegungen oben $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i \in \mathcal{A}^*$. Damit ist die Behauptung (i) bewiesen.

(ii) Wir müssen zeigen, dass $\mu^*\big|_{\mathcal{A}^*}$ σ-additiv ist. Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}^*$ und gelte $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Indem wir (2.3.9) auf $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ anwenden, erhalten wir

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \,.$$

Da

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

sowieso gilt, folgt

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \,.$$

(iii) Sei $A \subseteq X$ mit $\mu^*(A) = 0$ und sei $B \subseteq X$ beliebig. Wegen $B \cap A \subseteq A$ ist dann auch $\mu^*(B \cap A) = 0$. Demnach gilt

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B) \,.$$

Nach Bemerkung 2.3.8 ist damit $A \in \mathcal{A}^*$. $\square$

Definition 2.3.11 *Ein Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ heißt* **vollständig** $:\Longleftrightarrow$ *Aus $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ und $B \subseteq A$ folgt $B \in \mathcal{A}$.*

Folgerung 2.3.12 *Die Einschränkung eines äußeren Maßes $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ auf die σ-Algebra $\mathcal{A}^*$ der μ^*-messbaren Mengen ist ein vollständiges Maß.*

Beweis. Wir haben bereits bewiesen, dass $\mu^*\big|_{\mathcal{A}^*}$ ein Maß ist. Dieses Maß ist auch vollständig. Ist nämlich $B \subseteq A \subseteq X$ und $\mu^*(A) = 0$, so gilt nach den Eigenschaften eines äußeren Maßes auch $\mu^*(B) = 0$. Nach Satz 2.3.10(iii) folgt $B \in \mathcal{A}^*$. $\square$

Wir kehren jetzt zu unserem Ausgangsproblem, der Konstruktion eines Maßes über $\mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften (E1) und (E2), zurück. Nach den Überlegungen oben genügt es dafür, einen geeigneten σ-Inhalt zu konstruieren.

Definition 2.3.13 *Eine Vereinigung $Q_1 \cup \cdots \cup Q_k$ von endlich vielen Quadern $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathcal{Q}^n$ heißt* **n-dimensionale Quadersumme**.

Das System aller n-dimensionalen Quadersummen bezeichnen wir mit $\mathcal{QS}^n$.

Lemma 2.3.14 *Für alle $Q, Q' \in \mathcal{Q}^n$ gilt:*

(i) $Q \cap Q' \in \mathcal{Q}^n$.

(ii) *Es existieren endlich viele paarweise disjunkte Quader* $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathcal{Q}^n$ *mit* $Q \setminus Q' = Q_1 \cup \cdots \cup Q_k$. *Insbesondere ist* $Q \setminus Q' \in \mathcal{QS}^n$.

Beweis. (i) Seien $a, b, a', b' \in \mathbb{R}^n$ und sei $Q = [a, b[$ und $Q' = [a', b'[$. Setzen wir $a''_i := \max\{a_i, a'_i\}$ und $b''_i := \min\{b_i, b'_i\}$, so gilt $Q \cap Q' = [a'', b'']$. Damit ist (i) gezeigt.

(ii) Diese Aussage über $Q \setminus Q' = Q \setminus (Q \cap Q')$ erhält man, indem man den Quader Q so disjunkt in Teilquader zerlegt, dass $Q \cap Q'$ einer dieser Teilquader ist. $\square$

Folgerung 2.3.15 *Das System* $\mathcal{QS}^n$ *der* n*-dimensionalen Quadersummen ist ein Mengenring.*

Beweis. Das ergibt sich aus Lemma 2.3.14. $\square$

Folgerung 2.3.16 *Zu jedem* $S \in \mathcal{QS}^n$ *existieren endlich viele paarweise disjunkte Quader* $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathcal{Q}^n$ *mit* $S = Q_1 \cup \cdots \cup Q_k$.

Beweis. Sei $S \in \mathcal{QS}^n$, d.h. $S = Q'_1 \cup \cdots \cup Q'_l$ für gewisse $Q'_1, \ldots, Q'_l \in \mathcal{Q}^n$. Wir setzen

$$S_i := Q'_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} Q'_j \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, l \,.$$

Dann sind $S_1, \ldots, S_l$ paarweise disjunkt und es gilt $S = \bigcup\limits_{i=1}^{l} S_i$. Weiter kann man mit Lemma 2.3.14(ii) und

$$S_i = \left(Q'_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-2} Q'_j \right) \setminus Q'_{i-1}$$

induktiv schließen, dass jedes S_i die Vereinigung von endlich vielen paarweise disjunkten Quadern $Q_{i1}, \ldots, Q_{ik_i} \in \mathcal{Q}^n$ ist. Das liefert die Behauptung. $\square$

Lemma 2.3.17 *Seien* $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathcal{Q}^n$ *paarweise disjunkt und sei* $Q_1 \cup \cdots \cup Q_k \in \mathcal{Q}^n$. *Dann ist*

$$\mathrm{vol}(Q_1 \cup \cdots \cup Q_k) = \mathrm{vol}(Q_1) + \cdots + \mathrm{vol}(Q_k) \,.$$

Beweis. Übung. $\square$

Satz 2.3.18 *Es gibt genau einen Inhalt* $\mu : \mathcal{QS}^n \to [0, +\infty]$ *mit*

$$\mu(Q) = \mathrm{vol}(Q) \quad \textit{für alle} \quad Q \in \mathcal{Q}^n \,. \tag{2.3.11}$$

Beweis. Seien sowohl $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathcal{Q}^n$ als auch $Q'_1, \ldots, Q'_l \in \mathcal{Q}^n$ paarweise disjunkt und gelte

$$Q_1 \cup \cdots \cup Q_k = Q'_1 \cup \cdots \cup Q'_l \,.$$

Dann ist $\sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{vol}(Q_i) = \sum\limits_{j=1}^{l} \mathrm{vol}(Q'_j)$, denn wegen

$$Q_i = \bigcup_{j=1}^{l} (Q_i \cap Q'_j) \quad \text{und} \quad Q'_j = \bigcup_{i=1}^{k} (Q_i \cap Q'_j)$$

gilt nach Lemma 2.3.14(i) und Lemma 2.3.17

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}(Q_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}\left(\bigcup_{j=1}^{l}(Q_i \cap Q'_j)\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \mathrm{vol}(Q_i \cap Q'_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{l} \mathrm{vol}\left(\bigcup_{i=1}^{k}(Q_i \cap Q'_j)\right) = \sum_{j=1}^{l} \mathrm{vol}(Q'_j) \ .$$

Sei $S \in \mathcal{QS}^n$. Nach Folgerung 2.3.16 ist $S = Q_1 \cup \cdots \cup Q_k$ für gewisse paarweise disjunkte Quader $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathcal{Q}^n$. Wir setzen

$$\mu(S) := \sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}(Q_i) \ . \tag{2.3.12}$$

Nach der Überlegung oben erhalten wir auf diese Weise eine wohldefinierte Funktion $\mu : \mathcal{QS}^n \to [0, +\infty]$. Diese erfüllt trivialerweise (2.3.11). Außerdem ist offensichtlich $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(S_1 \cup S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2)$ für disjunkte Quadersummen $S_1, S_2 \in \mathcal{QS}^n$. Das heißt, μ ist ein Inhalt. Damit ist die Existenzaussage bewiesen.

Ist andererseits $\mu : \mathcal{QS}^n \to [0, +\infty]$ ein Inhalt mit der Eigenschaft (2.3.11) und ist $S = Q_1 \cup \cdots \cup Q_k$ für paarweise disjunkte Quader $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathcal{Q}^n$, so muss (2.3.12) gelten. Damit ist auch die Eindeutigkeitsaussage bewiesen. □

Satz 2.3.19 *Sei $\mu : \mathcal{QS}^n \to [0, +\infty]$ der durch (2.3.11) bestimmte Inhalt. Dann gilt:*

(i) *Für alle $S \in \mathcal{QS}^n$ ist $\mu(S) < +\infty$.*

(ii) *Ist $S \in \mathcal{QS}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$, so ist auch $S + v \in \mathcal{QS}^n$ und $\mu(S + v) = \mu(S)$.*

(iii) *μ ist ein σ-Inhalt.*

Beweis. (i) Das folgt sofort aus (2.3.12).

(ii) Ist $Q = [a, b[\ \in \mathcal{Q}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$, so ist $Q + v = [a + v, b + v[\ \in \mathcal{Q}^n$ und $\mathrm{vol}(Q + v) = \mathrm{vol}(Q)$. Daraus ergibt sich mit (2.3.12) die Behauptung.

(iii) Seien $S_1, S_2, \ldots \in \mathcal{QS}^n$ paarweise disjunkt und gelte $S := \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \mathcal{QS}^n$. Wir müssen zeigen, dass

$$\mu(S) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(S_i) \ . \tag{2.3.13}$$

Dazu setzen wir $T_k := S \setminus (S_1 \cup \cdots \cup S_k) = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} S_i$ für $k \in \mathbb{N}$. Da $\mathcal{QS}^n$ ein Mengenring ist, sind $T_1, T_2, \ldots \in \mathcal{QS}^n$. Nach (i) und Satz 2.2.6(iii) gilt

$$\mu(T_k) = \mu(S) - \mu(S_1 \cup \cdots \cup S_k) = \mu(S) - \sum_{i=1}^{k} \mu(S_i) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \ .$$

Demnach ist (2.3.13) gleichbedeutend mit

$$\lim_{k \to \infty} \mu(T_k) = 0 \ . \tag{2.3.14}$$

Angenommen, das gilt nicht. Dann gibt es ein $c > 0$ mit $\mu(T_k) \geq c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere sind alle Quadersummen T_k nichtleer. Damit können wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $R_k \in \mathcal{QS}^n$ mit $\overline{R_k} \subseteq T_k$ und

$$\mu(T_k) - \mu(R_k) \leq 2^{-k} c$$

wählen. Sei $P_k := R_1 \cap \cdots \cap R_k$. Wegen $P_1 = R_1$ und $\mu(T_1) - \mu(R_1) \leq c/2$ ist

$$\mu(P_1) \geq \mu(T_1) - \frac{c}{2} = \mu(T_1) + \big(2^{-1} - 1\big)\, c.$$

Gelte $\mu(P_k) \geq \mu(T_k) + \big(2^{-k} - 1\big)\, c$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Mit Satz 2.2.6(i) und

$$R_{k+1} \cup P_k \subseteq R_{k+1} \cup R_k \subseteq T_{k+1} \cup T_k \subseteq T_k$$

folgern wir

$$\begin{aligned}
\mu(P_{k+1}) &= \mu(R_{k+1} \cap P_k) = \mu(R_{k+1}) + \mu(P_k) - \mu(R_{k+1} \cup P_k) \\
&\geq \mu(R_{k+1}) + \mu(P_k) - \mu(T_k) \\
&\geq \mu(R_{k+1}) + \mu(T_k) + \big(2^{-k} - 1\big)\, c - \mu(T_k) \\
&\geq \mu(T_{k+1}) - 2{-}(k+1)c + \big(2^{-k} - 1\big)\, c \\
&= \mu(T_{k+1}) + \Big(2^{-(k+1)} - 1\Big)\, c\,.
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\mu(P_k) \geq \mu(T_k) + \big(2^{-k} - 1\big)\, c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wegen $\mu(T_k) \geq c$ erhalten wir daraus, dass $\mu(P_k) \geq 2^{-k} c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also sind alle P_k nichtleer und wir können für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in P_k$ wählen. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in P_1. Da $\overline{P_1}$ abgeschlossen und beschränkt ist, existieren eine Teilfolge $(x_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und ein $x \in \overline{P_1}$ mit $\lim_{l\to\infty} x_{k_l} = x$. Nach Konstruktion der Mengen P_k gilt $P_1 \supseteq P_2 \supseteq P_3 \supseteq \cdots$ und somit auch $\overline{P_1} \supseteq \overline{P_2} \supseteq \overline{P_3} \supseteq \cdots$. Folglich ist $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{P_k}$. Wegen $\overline{P_k} \subseteq \overline{R_k} \subseteq T_k$ ist dann auch $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} T_k$. Das ist aber ein Widerspruch zu $\bigcap_{k=1}^{\infty} T_k = \emptyset$. Also gilt (2.3.14) und (iii) ist bewiesen. □

Definition 2.3.20 *Sei $\mu : \mathcal{QS}^n \to [0, +\infty]$ der durch (2.3.11) bestimmte σ-Inhalt und sei $\mu_L^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ das aus μ gemäß Satz 2.3.5 konstruierte äußere Maß. Dieses äußere Maß wird* **äußeres Lebesgue-Maß** *genannt. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt* **Lebesgue-messbar** *$:\iff$ A ist μ_L^*-messbar. Die Einschränkung $\mu_L : \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ von μ_L^* auf die σ-Algebra $\mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$ der Lebesgue-messbaren Mengen heißt* **Lebesgue-Maß** *auf $\mathbb{R}^n$.*

Satz 2.3.21 (i) *Das Lebesgue-Maß $\mu_L : \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ ist ein vollständiges Maß.*

(ii) *$\mathcal{Q}^n \subseteq \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$ und $\mu_L(A) = \mathrm{vol}(A)$ für alle $A \in \mathcal{Q}^n$.*

(iii) *$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$, d.h. jede Borel-Menge in $\mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-messbar.*

(iv) *Ist $A \in \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$ und $v \in \mathbb{R}^n$, so ist auch $A + v \in \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$ und $\mu_L(A + v) = \mu_L(A)$.*

Beweis. (i) Die Aussage ist ein Spezialfall von Folgerung 2.3.12.

(ii) Die Behauptung folgt aus Lemma 2.3.9, (2.3.5) und (2.3.11).

(iii) Sei $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ das System der offenen Teilmengen $\mathbb{R}^n$. Jede Menge $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ ist abzählbare Vereinigung von n-dimensionalen halboffenen Quadern. Da $\mathcal{Q}^n \subseteq \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$ und da $\mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$ eine σ-Algebra ist, folgt $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$ und weiter $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)) \subseteq \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$.

(iv) Nach Satz 2.3.19(ii) und der Konstruktion von μ_L^* gilt $\mu_L^*(B + v) = \mu_L^*(B)$ für alle $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dies liefert die Behauptung. □

Satz 2.3.22 (i) *Zu jedem $A \in \mathcal{A}_L(R^n)$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A \subseteq U$ und $\mu_L(U \setminus A) < \varepsilon$.*

(ii) *Zu jedem $A \in \mathcal{A}_L(R^n)$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine abgeschlossene Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $C \subseteq A$ und $\mu_L(A \setminus C) < \varepsilon$.*

Beweis. (i) Sei $A \in \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$ und sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen zunächst voraus, dass A beschränkt ist und somit $\mu_L(A) < +\infty$ gilt. Dann existieren Quader $Q_1, Q_2, \ldots \in \mathcal{Q}^n$ mit $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$ und $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_i) < \mu_L(A) + \varepsilon/2$. Zu jedem Quader Q_i wählen wir einen Quader $Q_i' \in \mathcal{Q}^n$ und eine offene Menge $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ derart, dass $Q_i \subseteq V_i \subseteq Q_i'$ und $\operatorname{vol}(Q_i') \leq \operatorname{vol}(Q_i) + 2^{-(i+1)}\varepsilon$. Für die offene Menge $U := \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V_i$ gilt dann $A \subseteq U$ und

$$\mu_L(U) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_L(V_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_i') \leq \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_i) + \frac{\varepsilon}{2} < \mu_L(A) + \varepsilon \ ,$$

woraus $\mu_L(U \setminus A) = \mu_L(U) - \mu_L(A) < \varepsilon$ folgt.

Sei jetzt A beliebig. Wir wählen beschränkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$ mit $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A$. Nach dem, was wir bereits gezeigt haben, gibt es offene Mengen U_i mit $A_i \subseteq U_i$ und $\mu_L(U_i \setminus A_i) < 2^{-i}\varepsilon$. Setzen wir $U := \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i$, so erhalten wir $A \subseteq U$ und

$$\mu_L(U \setminus A) \leq \mu_L\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (U_i \setminus A_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_L(U_i \setminus A_i) < \varepsilon \ .$$

(ii) Sei wieder $A \in \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$. Nach (i) gibt es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n \setminus A \subseteq U$ und $\mu_L(U \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)) < \varepsilon$. Wir setzen $C := \mathbb{R}^n \setminus U$. Dann ist C abgeschlossen und $C \subseteq A$. Da $A \setminus C = A \setminus (\mathbb{R}^n \setminus U) = A \cap U = U \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)$, gilt $\mu_L(A \setminus C) = \mu_L(U \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)) < \varepsilon$. □

Das oben beschriebene Prinzip wird auch zur Konstruktion anderer Maße verwendet.

Beispiel 2.3.23 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und linksseitig stetig. Für $[a, b[\in \mathcal{Q}^1$ definieren wir

$$\operatorname{vol}_f([a, b[) := \begin{cases} f(b) - f(a) & \text{, falls } a < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Analog zu den Beweisen von Satz 2.3.18 und Satz 2.3.19(iii) sieht man, dass es genau einen Inhalt $\mu : \mathcal{QS}^1 \to [0, +\infty]$ mit $\mu(Q) = \operatorname{vol}_f(Q)$ für alle $Q \in \mathcal{Q}^1$ gibt und dass dieser Inhalt ein σ-Inhalt ist. Das aus diesem μ gemäß den Sätzen 2.3.5 und 2.3.10 gebildete Maß heißt **Lebesgue-Stieltjes-Maß** zu f. □

2.4 Integration messbarer Funktionen

Im folgenden sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein **Maßraum**, d.h. $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra über der Menge X und $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ist ein Maß. Statt "$\mathcal{A}$-messbar" werden wir einfach "messbar" schreiben.

Definition 2.4.1 (i) *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt* **einfach** $:\Longleftrightarrow$ *Sie ist messbar und nimmt nur endlich viele Werte an.*

(ii) *Eine einfache Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt* **integrierbar** $:\Longleftrightarrow \mu\left(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})\right) < +\infty$. *Es wird dann*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) := \sum_{r \in f(X)} r \cdot \mu\left(f^{-1}(\{r\})\right)$$

gesetzt.

Bemerkung 2.4.2 (i) Ist $f : X \to \mathbb{R}$ einfach, so ist

$$f = \sum_{r \in f(X)} r \cdot \chi_{A(r)} \quad \text{mit} \quad A(r) := f^{-1}(\{r\}) \in \mathcal{A} \, .$$

Ist umgekehrt

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i} \quad \text{mit} \quad c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R} \text{ und } A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A} \, , \tag{2.4.1}$$

so ist f nach Lemma 2.1.20 und Satz 2.1.21 messbar und $f(X)$ ist endlich. Folglich ist eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ genau dann einfach, wenn (2.4.1) gilt. Ferner ist eine Funktion der Gestalt (2.4.1) genau dann integrierbar, wenn $\mu(A_i) < +\infty$ für $c_i \neq 0$.

(ii) Bei der Definition von $\int f \,\mathrm{d}\mu$ für eine integrierbare einfache Funktion f wird die Vereinbarung $0 \cdot (+\infty) = 0$ benutzt. Es gilt also

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{r \in f(X) \setminus \{0\}} r \cdot \mu\left(f^{-1}(\{r\})\right) \, .$$

Manchmal ist es zweckmäßig, dies als formal unendliche Summe zu schreiben, nämlich

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{r \in \mathbb{R}} r \cdot \mu\left(f^{-1}(\{r\})\right) \, .$$

□

Satz 2.4.3 *Sind $f, g : X \to \mathbb{R}$ einfache Funktionen und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind die Funktionen $f + g$, λf und $|f|$ ebenfalls einfach.*

Beweis. Dies erhält man aus der Charakterisierung einfacher Funktionen durch (2.4.1). □

Satz 2.4.4 *Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ integrierbare einfache Funktionen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) *$f + g$ ist integrierbar und*

$$\int (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu \, .$$

(ii) *λf ist integrierbar und*

$$\int \lambda f \,\mathrm{d}\mu = \lambda \int f \,\mathrm{d}\mu \, .$$

(iii) *$|f|$ ist integrierbar und*

$$\left| \int f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu \, .$$

(iv) *Gilt $g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in X$, so ist*

$$\int g \,\mathrm{d}\mu \leq \int f \,\mathrm{d}\mu \, .$$

Beweis. (i) Ist $f(x)+g(x) \neq 0$, so ist $f(x) \neq 0$ oder $g(x) \neq 0$. Das impliziert

$$(f+g)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup g^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \,,$$

woraus

$$\mu\left((f+g)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})\right) \leq \mu\left(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})\right) + \mu\left(g^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})\right) < +\infty$$

folgt. Damit ist gezeigt, dass $f+g$ integrierbar ist. Weiter schließen wir

$$\begin{aligned}
&\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{r \in \mathbb{R}} r \cdot \mu\left((f+g)^{-1}(\{r\})\right) \\
&= \sum_{r \in \mathbb{R}} r \cdot \mu\left(\bigcup_{s \in \mathbb{R}} \left(f^{-1}(\{s\}) \cap g^{-1}(\{r-s\})\right)\right) \\
&= \sum_{r \in \mathbb{R}} r \sum_{s \in \mathbb{R}} \mu\left(f^{-1}(\{s\}) \cap g^{-1}(\{r-s\})\right) \\
&= \sum_{r \in \mathbb{R}} \sum_{s \in \mathbb{R}} (s+(r-s))\mu\left(f^{-1}(\{s\}) \cap g^{-1}(\{r-s\})\right) \\
&= \sum_{r \in \mathbb{R}} \sum_{s \in \mathbb{R}} s\mu\left(f^{-1}(\{s\}) \cap g^{-1}(\{r-s\})\right) + \sum_{r \in \mathbb{R}} \sum_{s \in \mathbb{R}} (r-s)\mu\left(f^{-1}(\{s\}) \cap g^{-1}(\{r-s\})\right) \\
&= \sum_{r \in \mathbb{R}} \sum_{s \in \mathbb{R}} s\mu\left(f^{-1}(\{s\}) \cap g^{-1}(\{r-s\})\right) + \sum_{r \in \mathbb{R}} \sum_{t \in \mathbb{R}} t\mu\left(f^{-1}(\{r-t\}) \cap g^{-1}(\{t\})\right) \\
&= \sum_{s \in \mathbb{R}} s \sum_{r \in \mathbb{R}} \mu\left(f^{-1}(\{s\}) \cap g^{-1}(\{r-s\})\right) + \sum_{t \in \mathbb{R}} t \sum_{r \in \mathbb{R}} \mu\left(f^{-1}(\{r-t\}) \cap g^{-1}(\{t\})\right) \\
&= \sum_{s \in \mathbb{R}} s \cdot \mu\left(f^{-1}(\{s\}) \cap \bigcup_{r \in \mathbb{R}} g^{-1}(\{r-s\})\right) + \sum_{t \in \mathbb{R}} t \cdot \mu\left(g^{-1}(\{t\}) \cap \bigcup_{r \in \mathbb{R}} f^{-1}(\{r-t\})\right) \\
&= \sum_{s \in \mathbb{R}} s \cdot \mu\left(f^{-1}(\{s\})\right) + \sum_{t \in \mathbb{R}} t \cdot \mu\left(g^{-1}(\{t\})\right) \\
&= \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu \,.
\end{aligned}$$

(ii) Übung.

(iii) Wegen $|f(x)| = 0 \iff f(x) = 0$ ist

$$|f|^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \,.$$

Folglich ist mit f auch $|f|$ integrierbar. Außerdem haben wir

$$\begin{aligned}
\left|\int f\,\mathrm{d}\mu\right| &= \left|\sum_{r \in \mathbb{R}} r \cdot \mu\left(f^{-1}(\{r\})\right)\right| \leq \sum_{r \in \mathbb{R}} |r| \cdot \mu\left(f^{-1}(\{r\})\right) \\
&= \sum_{r>0} |r| \left[\mu\left(f^{-1}(\{r\})\right) + \mu\left(f^{-1}(\{-r\})\right)\right] = \sum_{r>0} r \cdot \mu\left(|f|^{-1}(\{r\})\right) = \int |f|\,\mathrm{d}\mu \,.
\end{aligned}$$

(iv) Nach (i) und (ii) ist $f-g$ integrierbar und

$$\int (f-g)\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu - \int g\,\mathrm{d}\mu \,.$$

Gilt $g(x) \leq f(x)$, d.h. $(f-g)(x) \geq 0$ für alle $x \in X$, so ist nach Definition 2.4.1(ii)

$$\int (f-g)\,\mathrm{d}\mu \geq 0 \,.$$

Das liefert die Behauptung. □

Bemerkung 2.4.5 Ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine integrierbare einfache Funktion mit der Darstellung (2.4.1), so gilt nach Satz 2.4.4

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot \mu(A_i) \ .$$

$\square$

Bevor wir zur Definition des Integrals von beliebigen messbaren Funktionen kommen, beweisen wir die folgenden beiden Lemmas.

Lemma 2.4.6 *Seien $g_i : X \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, integrierbare einfache Funktionen mit*

$$0 \le g_1(x) \le g_2(x) \le \cdots \quad \textit{für alle} \quad x \in X \ . \tag{2.4.2}$$

Ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine integrierbare einfache Funktion und gilt

$$0 \le f(x) \le \lim_{i\to\infty} g_i(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in X \ , \tag{2.4.3}$$

so gilt auch

$$\int f \, \mathrm{d}\mu \le \lim_{i\to\infty} \int g_i \, \mathrm{d}\mu \ . \tag{2.4.4}$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $f = c\chi_A$ für eine reelle Zahl $c \ge 0$ und ein $A \in \mathcal{A}$. Ist $c = 0$, so ist (2.4.4) trivialerweise erfüllt. Sei also $c > 0$. Wir fixieren ein $a \in \,]0, c[$ und setzen

$$A_i := \{x \in X : g_i(x) > a\} = g_i^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{A} \ .$$

Wegen (2.4.2) gilt

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \ . \tag{2.4.5}$$

Außerdem ist

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \ . \tag{2.4.6}$$

Ist nämlich $x \in A$, so gilt nach (2.4.3)

$$c = f(x) \le \lim_{i\to\infty} g_i(x) \ ,$$

woraus $g_{i_0}(x) > a$, d.h. $x \in A_{i_0}$ für ein $i_0 \in \mathbb{N}$ folgt. Aus (2.4.5) und (2.4.6) erhalten wir unter Benutzung von Satz 2.2.2

$$\mu(A) \le \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) \ . \tag{2.4.7}$$

Außerdem haben wir

$$g_i(x) \ge a\chi_{A_i}(x) \tag{2.4.8}$$

für alle $x \in X$ und $i \in \mathbb{N}$. Ist nämlich $x \in A_i$, so gilt (2.4.8) nach Konstruktion von A_i. Ist hingegen $x \notin A_i$, so ist (2.4.8) eine Konsequenz von (2.4.2). Aus (2.4.8) schließen wir mittels Satz 2.4.4

$$\int g_i \, \mathrm{d}\mu \ge a \int \chi_{A_i} \, \mathrm{d}\mu = a\mu(A_i) \ ,$$

was zusammen mit (2.4.7)

$$\lim_{i\to\infty} \int g_i \, \mathrm{d}\mu \ge a \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) \ge a\mu(A) \ ,$$

also
$$\lim_{i\to\infty}\int g_i\,\mathrm{d}\mu \geq \frac{a}{c}\int f\,\mathrm{d}\mu$$
liefert. Da die letzte Ungleichung für jedes $a \in]0, c[$ gilt, folgt (2.4.4).

Sei jetzt f eine beliebige integrierbare einfache Funktion auf X mit (2.4.3). Seien $c_1, \ldots, c_k$ die Werte von f und sei $B_j := f^{-1}(\{c_j\}) \in \mathcal{A}$ für $j = 1, \ldots, k$. Wegen (2.4.3) gilt
$$c_j\chi_{B_j}(x) = f(x)\chi_{B_j}(x) \leq \lim_{i\to\infty} g_i(x)\chi_{B_j}(x)$$
für alle $x \in X$ und $j = 1, \ldots, k$. Da auch $g_i\chi_{B_j}$ integrierbare einfache Funktionen sind und
$$0 \leq g_1(x)\chi_{B_j}(x) \leq g_2(x)\chi_{B_2}(x) \leq \cdots$$
für alle $x \in X$ und $j = 1, \ldots, k$ gilt, folgt nach den Überlegungen oben
$$\int c_j\chi_{B_j}\,\mathrm{d}\mu \leq \lim_{i\to\infty}\int g_i\chi_{B_j}\,\mathrm{d}\mu \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, k\ .$$
Hieraus leiten wir mit Satz 2.4.4 und
$$\sum_{j=1}^{k}\chi_{B_j}(x) = 1 \quad \text{für alle} \quad x \in X$$
schließlich
$$\begin{aligned}\int f\,\mathrm{d}\mu = \int \sum_{j=1}^{k} c_j\chi_{B_j}\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{k}\int c_j\chi_{B_j}\,\mathrm{d}\mu \leq \sum_{j=1}^{k}\lim_{i\to\infty}\int g_i\chi_{B_j}\,\mathrm{d}\mu \\ = \lim_{i\to\infty}\int g_i\sum_{j=1}^{k}\chi_{B_j}\,\mathrm{d}\mu = \lim_{i\to\infty}\int g_i\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$
ab. □

Bemerkung 2.4.7 Sind die Funktionen g_i, $i \in \mathbb{N}$, wie in Lemma 2.4.6, so sind die Folgen $(g_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ und $\left(\int f_i\,\mathrm{d}\mu\right)_{i\in\mathbb{N}}$ aufgrund von (2.4.2) und Satz 2.4.4(iv) monoton wachsend und folglich existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{i\to\infty} g_i(x)$ und $\lim\limits_{i\to\infty}\int g_i\,\mathrm{d}\mu$ in $\overline{\mathbb{R}}$. □

Lemma 2.4.8 *Seien $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Folgen integrierbarer einfacher Funktionen auf X mit*
$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots\ , \quad 0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots \quad \text{und} \quad \lim_{i\to\infty} f_i(x) = \lim_{i\to\infty} g_i(x)$$
für alle $x \in X$. Dann gilt
$$\lim_{i\to\infty}\int f_i\,\mathrm{d}\mu = \lim_{i\to\infty}\int g_i\,\mathrm{d}\mu\ .$$

Beweis. Für beliebiges $i_0 \in \mathbb{N}$ und alle $x \in X$ gilt
$$0 \leq f_{i_0}(x) \leq \lim_{i\to\infty} f_i(x) = \lim_{i\to\infty} g_i(x)\ .$$
Nach Lemma 2.4.6 folgt
$$\int f_{i_0}\,\mathrm{d}\mu \leq \lim_{i\to\infty}\int g_i\,\mathrm{d}\mu \quad \text{für alle} \quad i_0 \in \mathbb{N}$$
und weiter
$$\lim_{i\to\infty}\int f_i\,\mathrm{d}\mu \leq \lim_{i\to\infty}\int g_i\,\mathrm{d}\mu\ .$$
Analog erhalten wir
$$\lim_{i\to\infty}\int g_i\,\mathrm{d}\mu \leq \lim_{i\to\infty}\int f_i\,\mathrm{d}\mu$$
und das Lemma ist bewiesen. □

Definition 2.4.9 (i) *Eine nichtnegative Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt* **integrierbar** $:\iff$ *Es existiert eine Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von integrierbaren einfachen Funktionen $f_i : X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften.*

(a) *Für alle $x \in X$ gilt $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots$ und $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$.*

(b) $\lim_{i\to\infty} \int f_i \,\mathrm{d}\mu < +\infty$.

In diesem Fall sei

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) := \lim_{i\to\infty} \int f_i \,\mathrm{d}\mu \,. \tag{2.4.9}$$

Andernfalls setzen wir

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) := +\infty \,.$$

(ii) *Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine beliebige Funktion. Ist wenigstens eine der nichtnegativen Funktionen $f^+ := \max\{0, f\}$ und $f^- := \max\{0, -f\}$ integrierbar, so sei*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) := \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu \,.$$

f heißt **integrierbar** $:\iff$ *f^+ und f^- sind integrierbar.*

Bemerkung 2.4.10 (i) Dass das Integral $\int f \,\mathrm{d}\mu$ für eine integrierbare nichtnegative f durch (2.4.9) korrekt definiert ist, ergibt sich aus Lemma 2.4.8.

(ii) Ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, so ist f nach den Sätzen 2.1.21 und 2.1.22 auch messbar. □

Zur Vereinfachung führen wir jetzt folgende Bezeichnung ein. Für Funktionen $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in \mathbb{N}$, und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ schreiben wir $f_i \nearrow f$, falls

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \quad \text{und} \quad f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X \,.$$

Im Zusammenhang mit Definition 2.4.9 stellt sich die Frage, ob und wie man zu einer gegebenen nichtnegativen messbaren Funktion f eine Folge (f_i) von nichtnegativen einfachen Funktionen mit $f_i \nearrow f$ konstruieren kann. Das nächste Lemma und dessen Beweis geben eine Antwort auf diese Frage.

Lemma 2.4.11 *Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine nichtnegative und messbare Funktion. Dann existiert eine Folge (f_i) von nichtnegativen einfachen Funktionen auf X mit $f_i \nearrow f$.*

Beweis. Bezeichne $\mathrm{GT}(t)$ den ganzen Teil von $t \in \mathbb{R}$, also $\mathrm{GT}(t) := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \le t\}$. Wir definieren $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für $i \in \mathbb{N}$ durch

$$f_i(x) := \frac{1}{2^i}\,\mathrm{GT}\left(2^i \min\left\{2^i, f(x)\right\}\right) \,.$$

Dann ist

$$f_i(x) = 2^i \quad \text{für} \quad f(x) \ge 2^i \tag{2.4.10}$$

und

$$f_i(x) = \frac{k}{2^i} \quad \text{für} \quad \frac{k}{2^i} \le f(x) < \frac{k+1}{2^i} \text{ und } k = 0, 1, \ldots, 4^i - 1 \,. \tag{2.4.11}$$

Die Funktionen f_i sind somit nichtnegativ und einfach. Außerdem erhält man aus

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{GT}(2t) \ge \mathrm{GT}(t) \quad \text{für jedes} \quad t \in [0, +\infty[\,,$$

dass

$$\frac{1}{2^{i+1}}\,\mathrm{GT}\left(2^{i+1}\min\left\{2^{i+1}, f(x)\right\}\right) \geq \frac{1}{2^i}\,\mathrm{GT}\left(2^{i}\min\left\{2^{i+1}, f(x)\right\}\right) \geq \frac{1}{2^i}\,\mathrm{GT}\left(2^{i}\min\left\{2^{i}, f(x)\right\}\right)\ ,$$

d.h.

$$f_{i+1}(x) \geq f_i(x)$$

für alle $x \in X$. Es gilt auch

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x) \tag{2.4.12}$$

für alle $x \in X$. Dies sieht man folgendermaßen ein. Ist $f(x) = +\infty$, so ist aufgrund von (2.4.10)

$$f_i(x) = 2^i \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N}\ .$$

Ist $f(x) < +\infty$, so existiert ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(x) < 2^{i_0}$. Nach (2.4.11) haben wir dann

$$|f(x) - f_i(x)| = f(x) - f_i(x) < \frac{1}{2^i} \quad \text{für alle} \quad i \geq i_0$$

In beiden Fällen folgt (2.4.12) und das Lemma ist bewiesen. □

Als nächstes wollen wir zeigen, dass man die Folge (f_i) aus Lemma 2.4.11 unter einer zusätzlichen Voraussetzung an das Maß μ so wählen kann, dass alle f_i integrierbar sind.

Definition 2.4.12 *Ein Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ über X heißt* **σ-endlich** *$:\iff$ Es existiert eine aufsteigende Folge von Mengen $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ in $\mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X$ und $\mu(A_i) < +\infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$.*

Beispiel 2.4.13 (i) Das Lebesgue-Maß $\mu_L : \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n) \to [0,+\infty]$ ist σ-endlich. Setzt man nämlich $A_i := [-i,i[^n$ für $i \in \mathbb{N}$, so besitzt die Folge (A_i) die in Definition 2.4.12 geforderten Eigenschaften.

(ii) Das Zählmaß (vgl. Bsp.2.2.5(i)) ist σ-endlich, falls die Grundmenge X höchstens abzählbar ist.

(iii) Jedes endliche Maß, also jedes Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ mit $\mu(A) < +\infty$ für alle $A \in \mathcal{A}$ ist trivialerweise σ-endlich. Insbesondere ist jedes Dirac-Maß (vgl. Bsp.2.2.5(ii)) σ-endlich. □

Lemma 2.4.14 *Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine nichtnegative messbare Funktion und sei μ σ-endlich. Dann gibt es eine Folge (f_i) von nichtnegativen integrierbaren einfachen Funktionen auf X mit $f_i \nearrow f$.*

Beweis. Nach Lemma 2.4.11 existieren nichtnegative einfache Funktionen $\tilde{f}_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in \mathbb{N}$, mit $\tilde{f}_i \nearrow f$. Da μ σ-endlich ist, gibt es Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X \tag{2.4.13}$$

sowie $\mu(A_i) < +\infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir definieren $f_i := \chi_{A_i}\tilde{f}_i$. Da $f_i^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \subseteq A_i$ und somit

$$\mu\left(f_i^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})\right) \leq \mu(A_i) < +\infty\ ,$$

sind die nichtnegativen einfachen Funktionen f_i integrierbar. Aus $\tilde{f}_i \nearrow f$ und (2.4.13) erhält man $f_i \nearrow f$. □

Beispiel 2.4.15 (i) Sei $X = \mathbb{N}$, sei $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und sei $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ das Zählmaß (vgl. Bsp.2.2.5(i)). Eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist genau dann einfach und integrierbar, wenn sie nur an endlich vielen Stellen $j_1, \ldots, j_m \in \mathbb{N}$ verschieden von Null ist. Es ist dann

$$g = \sum_{k=1}^{m} g(j_k)\chi_{\{j_k\}}$$

und folglich

$$\int g \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{m} g(j_k)\mu(\{j_k\}) = \sum_{k=1}^{m} g(j_k) \,.$$

Sei $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ nichtnegativ. Ist $f(j_0) = +\infty$ für ein $j_0 \in \mathbb{N}$ und ist (f_i) eine Folge nichtnegativer integrierbarer einfacher Funktionen auf $\mathbb{N}$ mit $f_i \nearrow f$, so gilt

$$\int f_i \,\mathrm{d}\mu \geq f_i(j_0) \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N}$$

und somit

$$\lim_{i\to\infty} \int f_i \,\mathrm{d}\mu \geq \lim_{i\to\infty} f_i(j_0) = f(j_0) = +\infty \,.$$

Also ist in diesem Fall f nicht integrierbar.

Jetzt nehmen wir an, dass $f(j) < +\infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wir definieren nichtnegative integrierbare einfache Funktionen $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, durch

$$f_i(j) := \begin{cases} f(j) & \text{für} \quad j \leq i \\ 0 & \text{für} \quad j > i \end{cases} \,.$$

Dann gilt $f_i \nearrow f$ und

$$\lim_{i\to\infty} \int f_i \,\mathrm{d}\mu = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{i} f(j) = \sum_{i=1}^{\infty} f(j) \,.$$

Also ist eine nichtnegative Funktion $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann integrierbar, wenn die Reihe $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f(j)$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, und in diesem Fall gilt

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} f(j) \,.$$

(ii) Sei X eine beliebige nichtleere Menge und sei $\xi \in X$. Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann bezüglich des Dirac-Maßes μ_ξ (vgl. Bsp.2.2.5(ii)) integrierbar, wenn $f(x_0) \in \mathbb{R}$. In diesem Fall ist

$$\int f \,\mathrm{d}\mu_\xi = f(x_0) \,.$$

□

Im folgenden werden wir einfache Eigenschaften integrierbarer Funktionen beweisen. Wir beginnen mit

Lemma 2.4.16 *Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ nichtnegativ und integrierbar. Dann ist auch $f + g$ integrierbar und es gilt*

$$\int (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu \,.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus den Sätzen 2.4.3 und 2.4.4 und Definition 2.4.9(i). □

Satz 2.4.17 *Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) $|f|$ *ist integrierbar und*

$$\left| \int f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int |f| \, \mathrm{d}\mu \, .$$

(ii) λf *ist integrierbar und*

$$\int \lambda f \, \mathrm{d}\mu = \lambda \int f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Beweis. (i) Dass f integrierbar ist, bedeutet nach Definition 2.4.9(ii), dass die nichtnegativen Funktionen f^+ und f^- integrierbar sind. Nach Lemma 2.4.16 ist dann auch $|f| = f^+ + f^-$ integrierbar und

$$\int |f| \, \mathrm{d}\mu = \int f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int f^- \, \mathrm{d}\mu \geq \left| \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int f^- \, \mathrm{d}\mu \right| = \left| \int f \, \mathrm{d}\mu \right| \, .$$

(ii) Übung. □

Lemma 2.4.18 *Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und gelte*

$$0 \leq g(x) \leq f(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in X \, . \tag{2.4.14}$$

Ist f integrierbar, so sind auch g und $f - g$ integrierbar und es gilt

$$\int (f - g) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu - \int g \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Beweis. Nach (2.4.14) sind die Funktionen f und g nichtnegativ. Sei f integrierbar und sei (f_i) eine Folge nichtnegativer integrierbarer einfacher Funktionen mit $f_i \nearrow f$. Desweiteren sei $(\tilde{g}_i)$ eine Folge nichtnegativer einfacher Funktionen mit $\tilde{g}_i \nearrow g$ (vgl. Lemma 2.4.11). Wir definieren $g_i : X \to \mathbb{R}$ für $i \in \mathbb{N}$ durch $g_i(x) := \min\{f_i(x), \tilde{g}_i(x)\}$. Dann sind auch alle g_i nichtnegative einfache Funktionen. Außerdem leitet man aus (2.4.14), $f_i \nearrow f$ und $\tilde{g}_i \nearrow g$ ab, dass $g_i \nearrow g$. Da

$$g_i(x) \leq f_i(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X \tag{2.4.15}$$

und somit $g_i^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq f_i^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ und da die Funktionen f_i integrierbar sind, ist

$$\mu\left(g_i^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})\right) \leq \mu\left(f_i^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})\right) < +\infty \, .$$

Also sind alle g_i integrierbar. Aus (2.4.15) folgt nun mit Satz 2.4.4(iv)

$$\int g_i \, \mathrm{d}\mu \leq \int f_i \, \mathrm{d}\mu \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N} \, ,$$

was

$$\lim_{i \to \infty} \int g_i \, \mathrm{d}\mu \leq \lim_{i \to \infty} \int f_i \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu < +\infty$$

impliziert. Folglich ist g integrierbar. Da mit (2.4.14) auch

$$0 \leq f(x) - g(x) \leq f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X$$

gilt, ergibt sich analog, dass $f - g$ integrierbar ist. Wir wenden jetzt Lemma 2.4.16 auf $f - g$ und g an und erhalten

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int ((f - g) + g) \, \mathrm{d}\mu = \int (f - g) \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu \, ,$$

d.h.

$$\int f \, \mathrm{d}\mu - \int g \, \mathrm{d}\mu = \int (f - g) \, \mathrm{d}\mu \, .$$

□

Folgerung 2.4.19 *Sind $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und gilt*

$$g(x) \leq f(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in X \ , \tag{2.4.16}$$

so ist

$$\int g \, \mathrm{d}\mu \leq \int f \, \mathrm{d}\mu \ .$$

Beweis. Gilt (2.4.16), so gilt auch

$$0 \leq g^+(x) \leq f^+(x) \quad \text{und} \quad 0 \leq f^-(x) \leq g^-(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X \ .$$

Dies impliziert nach Lemma 2.4.18

$$0 \leq \int (f^+ - g^+) \, \mathrm{d}\mu = \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int g^+ \mathrm{d}\mu$$

und

$$0 \leq \int (g^- - f^-) \, \mathrm{d}\mu = \int g^- \, \mathrm{d}\mu - \int f^- \, \mathrm{d}\mu \ ,$$

also

$$\int g^+ \, \mathrm{d}\mu \leq \int f^+ \, \mathrm{d}\mu \quad \text{und} \quad \int f^- \, \mathrm{d}\mu \leq \int g^- \, \mathrm{d}\mu \ .$$

Es folgt

$$\int g \, \mathrm{d}\mu = \int g^+ \, \mathrm{d}\mu - \int g^- \, \mathrm{d}\mu \leq \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int f^- \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu \ .$$

□

Folgerung 2.4.20 *Sei $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Existiert eine integrierbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit*

$$|g(x)| \leq f(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in X \ , \tag{2.4.17}$$

so ist g integrierbar.

Beweis. Da mit (2.4.17) auch

$$g^+(x) \leq f(x) \quad \text{und} \quad g^-(x) \leq f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X$$

gilt, folgt die Behauptung aus Lemma 2.4.18 und Definition 2.4.9(ii). □

Lemma 2.4.21 *Für jede integrierbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt:*

(i) *Ist $A \in \mathcal{A}$, so ist $\chi_A f$ integrierbar.*

(ii) *Sind $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ und gilt $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, so ist*

$$\int \chi_{A_1 \cup A_2} f \, \mathrm{d}\mu = \int \chi_{A_1} f \, \mathrm{d}\mu + \int \chi_{A_2} f \, \mathrm{d}\mu \ . \tag{2.4.18}$$

Beweis. Übung. □

Definition 2.4.22 *Ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $A \in \mathcal{A}$, so sei*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu := \int \chi_A f \, \mathrm{d}\mu \ .$$

Bemerkung 2.4.23 Mit Definition 2.4.22 erhält (2.4.18) die Gestalt

$$\int_{A_1 \cup A_2} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{A_1} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{A_2} f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

□

Satz 2.4.24 *Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Ist $f+g$ definiert, so ist auch $f+g$ integrierbar und*

$$\int (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu \, . \tag{2.4.19}$$

Beweis. Sei $f+g$ definiert, d.h. $f^{-1}(\{+\infty\}) \cap g^{-1}(\{-\infty\}) = \emptyset$ und $f^{-1}(\{-\infty\}) \cap g^{-1}(\{+\infty\}) = \emptyset$. Da f und g integrierbar sind, sind nach Satz 2.4.17(i) auch $|f|$ und $|g|$ integrierbar, was mit Lemma 2.4.16 die Integrierbarkeit von $|f| + |g|$ liefert. Hieraus und aus $|f+g| \leq |f| + |g|$ erhalten wir mit Folgerung 2.4.20, dass $f+g$ integrierbar ist.

Zum Beweis von (2.4.19) nehmen wir zunächst $g \geq 0$ an und setzen

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{x \in X : f(x) \geq 0\} \, , \\ A_2 &:= \{x \in X : f(x) < 0 \text{ und } f(x) + g(x) \geq 0\} \, , \\ A_3 &:= \{x \in X : f(x) + g(x) < 0\} \, . \end{aligned}$$

Da f und g messbar sind, sind $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$. Außerdem gilt

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{für} \quad i \neq j \tag{2.4.20}$$

und

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = X \, . \tag{2.4.21}$$

Nach Lemma 2.4.21(i) sind die Funktionen $\chi_{A_i} f$ und $\chi_{A_i} g$ integrierbar. Da $\chi_{A_1} f$ und $\chi_{A_1} g$ nichtnegativ sind, gilt nach Lemma 2.4.16

$$\int \chi_{A_1}(f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int (\chi_{A_1} f + \chi_{A_1} g) \, \mathrm{d}\mu = \int \chi_{A_1} f \, \mathrm{d}\mu + \int \chi_{A_1} g \, \mathrm{d}\mu \, . \tag{2.4.22}$$

Ist $x \in A_2$, so ist $0 < -f(x) \leq g(x)$. Somit gilt $0 \leq -\chi_{A_2} f \leq \chi_{A_2} g$, woraus mit Satz 2.4.17(ii) und Lemma 2.4.18

$$\begin{aligned} \int \chi_{A_2}(f+g) \, \mathrm{d}\mu &= \int (\chi_{A_2} g - (-\chi_{A_2} f)) \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int \chi_{A_2} g \, \mathrm{d}\mu - \int (-\chi_{A_2} f) \, \mathrm{d}\mu = \int \chi_{A_2} f \, \mathrm{d}\mu + \int \chi_{A_2} g \, \mathrm{d}\mu \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

folgt. Ist $x \in A_3$, so haben wir $0 \leq g(x) < -f(x)$. Folglich gilt $0 \leq \chi_{A_3} g \leq -\chi_{A_3} f$. Hieraus schließen wir wie oben, dass

$$\begin{aligned} \int \chi_{A_3}(f+g) \, \mathrm{d}\mu &= -\int (-\chi_{A_3} f - \chi_{A_3} g) \, \mathrm{d}\mu \\ &= -\left(\int (-\chi_{A_3} f) \, \mathrm{d}\mu - \int \chi_{A_3} g \, \mathrm{d}\mu \right) = \int \chi_{A_3} f \, \mathrm{d}\mu + \int \chi_{A_3} g \, \mathrm{d}\mu \, . \end{aligned} \tag{2.4.24}$$

Aus (2.4.20)-(2.4.24) folgt mit Lemma 2.4.21(ii)

$$\begin{aligned} \int (f+g) \, \mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^{3} \int \chi_{A_i}(f+g) \, \mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{i=1}^{3} \left(\int \chi_{A_i} f \, \mathrm{d}\mu + \int \chi_{A_i} g \, \mathrm{d}\mu \right) = \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu \, . \end{aligned}$$

Da f bei den eben angestellten Betrachtungen eine beliebige integrierbare Funktion ist, erhalten wir auch

$$\int (f-g)\,\mathrm{d}\mu = -\int (-f+g)d\mu \; = -\left(\int (-f)\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu\right) = \int f\,\mathrm{d}\mu - \int g\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Ist nun $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine beliebige integrierbare Funktion, so schließen wir

$$\begin{aligned}\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu &= \int (f+g^+-g^-)\,\mathrm{d}\mu = \int (f+g^+)\,\mathrm{d}\mu - \int g^-\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g^+\,\mathrm{d}\mu - \int g^-\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu\,.\end{aligned}$$

□

Definition 2.4.25 *Man sagt, dass eine von $x \in X$ abhängige Aussage $E(x)$* **fast überall** *oder* **für fast alle** *x (bezüglich μ) gilt* $:\Longleftrightarrow$

$$\{x \in X : E(x) \text{ ist falsch}\} \in \mathcal{A} \quad \text{und} \quad \mu(\{x \in X : E(x) \text{ ist falsch}\}) = 0\,.$$

Satz 2.4.26 *Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann gilt:*

(i) *f ist fast überall endlich, d.h. $\mu(\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}) = 0$.*

(ii) *Ist $f \geq 0$ und $\int f\,\mathrm{d}\mu = 0$, so ist f fast überall 0, d.h. $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0$.*

Beweis. (i) Wir setzen $A^+ := \{x \in X : f(x) = +\infty\}$ und $A^- := \{x \in X : f(x) = -\infty\}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt dann $k\chi_{A^+} \leq f^+$, was mittels Folgerung 2.4.19

$$k\,\mu\left(A^+\right) = \int k\chi_{A^+}\,\mathrm{d}\mu \leq \int f^+\,\mathrm{d}\mu\,,$$

d.h.

$$\mu\left(A^+\right) \leq \frac{1}{k}\int f^+\,\mathrm{d}\mu$$

liefert. Da $\int f^+\,\mathrm{d}\mu < +\infty$, folgt $\mu\left(A^+\right) = 0$. Analog verifiziert man $\mu\left(A^-\right) = 0$. Insgesamt erhalten wir

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}) = \mu\left(A^+ \cup A^-\right) = \mu\left(A^+\right) + \mu\left(A^-\right) = 0\,.$$

(ii) Übung. □

Definition 2.4.27 *Wir nennen zwei messbare Funktionen $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$* **äquivalent** *(in Zeichen: $f \sim g$) $:\Longleftrightarrow$ f und g sind fast überall gleich, d.h. $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.*

Satz 2.4.28 *Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ äquivalente messbare Funktionen und sei f integrierbar. Dann ist auch g integrierbar und*

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \int g\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Beweis. Seien zunächst f und g nichtnegativ. Da f integrierbar ist, existiert eine Folge (f_i) von nichtnegativen integrierbaren einfachen Funktionen mit $f_i \nearrow f$. Sei $A := \{x \in X : g(x) > f(x)\}$. Wegen $f \sim g$ und $A \subseteq \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ ist

$$\mu(A) = 0\,. \tag{2.4.25}$$

Wir definieren $\tilde{f} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\tilde{f}_i : X \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, durch

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad x \in X \setminus A \\ +\infty & \text{für} \quad x \in A \end{cases} \qquad \text{und} \quad \tilde{f}_i(x) := \begin{cases} f_i(x) & \text{für} \quad x \in X \setminus A \\ i & \text{für} \quad x \in A \end{cases} .$$

Dann sind alle $\tilde{f}_i$ nichtnegative integrierbare einfache Funktionen und es gilt $\tilde{f}_i \nearrow \tilde{f}$. Aus

$$\tilde{f}_i^{-1}(\{r\}) = \begin{cases} f_i^{-1}(\{r\}) \setminus A & \text{für} \quad r \neq i \\ f_i^{-1}(\{r\}) \cup A & \text{für} \quad r = i \end{cases}$$

und (2.4.25) leiten wir

$$\begin{aligned} \int f_i \, \mathrm{d}\mu &= \sum_{r \in \mathbb{R}} r \cdot \mu\left(f_i^{-1}(\{r\})\right) \\ &= i \cdot \left[\mu\left(f_i^{-1}(\{i\})\right) + \mu\left(A \setminus f_i^{-1}(\{i\})\right)\right] \\ &\qquad + \sum_{r \in \mathbb{R}\setminus\{i\}} r \cdot \left[\mu\left(f_i^{-1}(\{r\}) \setminus A\right) + \mu\left(f_i^{-1}(\{r\} \cap A)\right)\right] \\ &= i \cdot \mu\left(f_i^{-1}(\{i\}) \cup A\right) + \sum_{r \in \mathbb{R}\setminus\{i\}} r \cdot \mu\left(f_i^{-1}(\{r\}) \setminus A\right) \\ &= \sum_{r \in \mathbb{R}} r \cdot \mu\left(\tilde{f}_i^{-1}(\{r\})\right) \\ &= \int \tilde{f}_i \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

ab. Dies liefert

$$\lim_{i \to \infty} \int \tilde{f}_i \, \mathrm{d}\mu = \lim_{i \to \infty} \int f_i \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu .$$

Folglich ist $\tilde{f}$ integrierbar und $\int \tilde{f} \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu$. Da $0 \leq g \leq \tilde{f}$, erhalten wir mittels Lemma 2.4.18, dass g integrierbar ist. Außerdem gilt nach Folgerung 2.4.19

$$\int g \, \mathrm{d}\mu \leq \int \tilde{f} \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu .$$

Analog kann man

$$\int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu$$

schließen. Damit ist die Behauptung für nichtnegative f und g gezeigt.

Seien nun f und g beliebig. Aus $f \sim g$ folgt $f^+ \sim g^+$ und $f^- \sim g^-$. Wir wenden die obige Betrachtung auf f^+ und g^+ und auf f^- und g^- an und erhalten die Behauptung. □

Bemerkung 2.4.29 Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann ist $f + g$ i.allg. nicht definiert. Nach Satz 2.4.26(i) und Satz 2.4.28 existieren aber integrierbare Funktionen $\tilde{f}, \tilde{g} : X \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f} \sim f$ und $\tilde{g} \sim g$. Da $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ nur endliche Werte annehmen, ist $\tilde{f} + \tilde{g}$ definiert. Nach den Sätzen 2.4.24 und 2.4.28 haben wir außerdem

$$\int (\tilde{f} + \tilde{g}) \, \mathrm{d}\mu = \int \tilde{f} \, \mathrm{d}\mu + \int \tilde{g} \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu .$$

□

2.5 Vergleich von Riemann- und Lebesgue-Integration

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Ist $A \in \mathcal{A}$ nichtleer, so sei $\mathcal{A}^A := \{B \in \mathcal{A} : B \subseteq A\}$ und $\mu^A := \mu\big|_{\mathcal{A}^A}$.

Lemma 2.5.1 *Für jede nichtleere Menge $A \in \mathcal{A}$ gilt:*

(i) $\left(A, \mathcal{A}^A, \mu^A\right)$ *ist ein Maßraum.*

(ii) *Eine Funktion $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann bezüglich μ^A integrierbar, wenn die Funktion*

$$\tilde{f} : X \to \overline{\mathbb{R}}\,, \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad x \in A \\ 0 & \text{für} \quad x \in X \setminus A \end{cases}\,,$$

bezüglich μ integrierbar ist, und in diesem Fall gilt

$$\int f \, \mathrm{d}\mu^A = \int \tilde{f} \, \mathrm{d}\mu\,.$$

(iii) *Ist $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ bezüglich μ^A integrierbar, so ist für jede nichtleere Menge $B \in \mathcal{A}^A$ die Einschränkung $f\big|_B$ von f auf B bezüglich μ^B integrierbar und*

$$\int f\big|_B \, \mathrm{d}\mu = \int_B f \, \mathrm{d}\mu^A\,.$$

Beweis. Übung. $\square$

Definition 2.5.2 *Wir nennen $\mu^A : \mathcal{A}^A \to [0, +\infty]$ das* **von μ induzierte Maß** *auf A.*

Für $A \in \mathcal{A}$ und $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ setzen wir

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu := \int f \, \mathrm{d}\mu^A\,,$$

falls der Ausdruck auf der rechten Seite definiert ist.

Definition 2.5.3 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Eine Funktion $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt* **Lebesgue-integrierbar** $:\iff$ *f ist bezüglich des vom Lebesgue-Maß μ_L induzierten Maßes μ_L^A integrierbar.*

Der einzige Satz in diesem Abschnitt ist

Satz 2.5.4 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist f auch Lebesgue-integrierbar und*

$$\int_I f(x) \, \mathrm{d}x = \int_I f \, \mathrm{d}\mu_L\,.$$

Beweis. Da mit f auch $|f|$ und somit auch

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \quad \text{und} \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

Riemann-integrierbar sind, können wir nach Definition 2.4.9(ii) o.B.d.A. annehmen, dass f nichtnegativ ist. Sei $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $I = [a, b]$ mit

$$\int_I f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{i \to \infty} \underline{S}(f, Z_i)$$

und sei $Z_i = \{t_{i,0}, t_{i,1}, \ldots, t_{i,k(i)}\}$, wobei

$$a = t_{i,0} < t_{i,1} < \cdots < t_{i,k(i)} = b\,.$$

Dabei können wir o.B.d.A. annehmen:

(1) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist Z_{i+1} eine Verfeinerung von Z_i.

(2) $\lim\limits_{i\to\infty} \max\limits_{l} (t_{i,l} - t_{i,l-1}) = 0$.

Wir definieren $f_i : I \to \mathbb{R}$ durch

$$f_i(x) := \inf f([t_{i,l-1}, t_{i,l}]) \quad \text{für} \quad x \in [t_{i,l-1}, t_{i,l}[\text{ und } l = 1, \ldots, k(i) - 1$$

und

$$f_i(x) := \inf f([t_{i,k(i)-1}, t_{i,k(i)}]) \quad \text{für} \quad x \in [t_{i,k(i)-1}, t_{i,k(i)}] \ .$$

Dann sind f_i, $i \in \mathbb{N}$, nichtnegative Lebesgue-integrierbare einfache Funktionen und

$$\int_I f_i \,\mathrm{d}\mu_L = \underline{S}\,(f, Z_i) \ .$$

Wegen (1) gilt außerdem

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \quad \text{für alle} \quad x \in I \ .$$

Folglich ist die Funktion $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) := \lim\limits_{i\to\infty} f_i(x)$, Lebesgue-integrierbar und

$$\int_I \tilde{f} \,\mathrm{d}\mu_L = \lim_{i\to\infty} \int f_i \,\mathrm{d}\mu_L = \lim_{i\to\infty} \underline{S}(f, Z_i) = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Sei $A := \{x \in I : f \text{ ist stetig in } x\}$. Nach dem Lebesgueschen Integrierbarkeitskriterium ist $I \setminus A$ eine Lebesguesche Nullmenge, d.h. $I \setminus A \in \mathcal{A}_L(\mathbb{R})$ und $\mu_L(I \setminus A) = 0$. Ferner gilt wegen (2)

$$\tilde{f}(x) = f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in A \ .$$

Da $\tilde{f}$ messbar und μ_L vollständig ist, ist dann auch f messbar. Desweiteren sind die Funktionen f und $\tilde{f}$ bezüglich μ_L äuivalent. Mittels Satz 2.4.28 erhalten wir, dass f Lebesgue-integrierbar ist und

$$\int_I f \,\mathrm{d}\mu_L = \int_I \tilde{f} \,\mathrm{d}\mu_L = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

□

Bemerkung 2.5.5 (i) Die Umkehrung von Satz 2.5.4 gilt nicht, d.h. nicht jede beschränkte und Lebesgue-integrierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar. Man betrachte z.B. die Dirichlet-Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} \ , \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für} \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \ .$$

Diese Funktion ist überall unstetig und somit nach dem Lebesgueschen Integrierbarkeitskriterium nicht Riemann-integrierbar. Andererseits gilt $f = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ und folglich ist f eine Lebesgue-integrierbare einfache Funktion.

(ii) Es gibt Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar sind. Das ist z.B. für

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$$

der Fall.

(iii) Satz 2.5.4 gilt in analoger Form für Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher. □

2.6 Konvergenzsätze

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ wieder ein fixierter Maßraum. In diesem Abschnitt behandeln wir folgende Frage. Unter welchen Bedingungen ist der Grenzwert f einer Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von integrierbaren Funktionen auf X integrierbar und wann stimmt $\int f \,\mathrm{d}\mu$ mit dem Grenzwert $\lim\limits_{i\to\infty} \int f_i \,\mathrm{d}\mu$ überein.

Wir beginnen mit

Satz 2.6.1 (B. Levi) *Seien $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, integrierbare Funktionen mit*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \quad \textit{für alle} \quad x \in X \tag{2.6.1}$$

und sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ durch $f(x) := \lim\limits_{i\to\infty} f_i(x)$ gegeben. Dann gilt:

(i) *f ist genau dann integrierbar, wenn*

$$\lim_{i\to\infty} \int f_i \,\mathrm{d}\mu < +\infty \,. \tag{2.6.2}$$

(ii) *Ist f integrierbar, so gilt*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{i\to\infty} \int f_i \,\mathrm{d}\mu \,. \tag{2.6.3}$$

Beweis. Indem wir gegebenenfalls anstelle der Funktionen f_i die Funktionen $f_i - f_1$ betrachten, können wir o.B.d.A. annehmen, dass alle f_i nichtnegativ sind. Seien $f_{i,j} : X \to \mathbb{R}$, $i, j \in \mathbb{N}$, integrierbare einfache Funktionen mit

$$0 \leq f_{i,1}(x) \leq f_{i,2}(x) \leq \cdots \quad \text{und} \quad \lim_{j\to\infty} f_{i,j}(x) = f_i(x)$$

für alle $x \in X$. Wir definieren $g_j : X \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, durch

$$g_j(x) := \max\{f_{1,j}(x), f_{2,j}(x), \dots, f_{j,j}(x)\} \,.$$

Dann sind alle g_j nichtnegative integrierbare einfache Funktionen und es gilt

$$g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots \,. \tag{2.6.4}$$

Aus $g_j(x) \geq f_{i,j}(x)$ für $1 \leq i \leq j$ folgt

$$\lim_{j\to\infty} g_j(x) \geq \lim_{j\to\infty} f_{i,j}(x) = f_i(x)$$

und weiter

$$\lim_{j\to\infty} g_j(x) \geq \lim_{i\to\infty} f_i(x) = f(x) \,. \tag{2.6.5}$$

Andererseits können wir aus $f_{i,j}(x) \leq f_i(x)$ für $i, j \in \mathbb{N}$ und (2.6.1) die Beziehung

$$\max\{f_{1,j}(x), \dots, f_{j,j}(x)\} \leq \max\{f_1(x), \dots, f_j(x)\} = f_j(x) \,,$$

also

$$g_j(x) \leq f_j(x) \tag{2.6.6}$$

ableiten, welche wiederum

$$\lim_{j\to\infty} g_j(x) \leq \lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x) \tag{2.6.7}$$

liefert. Aus (2.6.4), (2.6.5) und (2.6.7) folgt $g_j \nearrow f$. Außerdem erhalten wir aus (2.6.6) mittels Folgerung 2.4.19, dass

$$\int g_j \,\mathrm{d}\mu \leq \int f_j \,\mathrm{d}\mu \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N} \,. \tag{2.6.8}$$

Gelte (2.6.2). Dann gilt nach (2.6.8) auch

$$\lim_{j\to\infty} \int g_j \, \mathrm{d}\mu < +\infty \, .$$

Dies und $g_j \nearrow f$ implizieren, dass f integrierbar ist. Jetzt nehmen wir an, dass f integrierbar ist. Da $f_j(x) \le f(x)$ für alle $j \in \mathbb{N}$, haben wir dann

$$\int f_j \, \mathrm{d}\mu \le \int f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N} \tag{2.6.9}$$

und folglich (2.6.2). Damit ist (i) bewiesen.

Ist nun f integrierbar, so ist

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int g_j \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Mittels (2.6.8) und (2.6.9) schließen wir

$$\int f \, \mathrm{d}\mu \le \lim_{j\to\infty} \int f_j \, \mathrm{d}\mu \le \int f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Also gilt (2.6.3), womit auch die Aussage (ii) bewiesen ist. □

Der letzte Satz wird auch als **Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz** zitiert. Das folgende Beispiel zeigt, dass dieser Satz ohne die Voraussetzung (2.6.1) falsch ist.

Beispiel 2.6.2 Seien $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, durch

$$f_i(x) := \begin{cases} i & \text{für } 0 < x < 1/i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Die Funktionen f_i sind offensichtlich Lebesgue-integrierbar und $\int f_i \, \mathrm{d}\mu_L = 1$. Andererseits gilt $\lim\limits_{i\to\infty} f_i(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich ist

$$\int \lim_{i\to\infty} f_i \, \mathrm{d}\mu_L \neq \lim_{i\to\infty} \int f_i \, \mathrm{d}\mu_L \, .$$

□

Folgerung 2.6.3 *Seien $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, nichtnegative integrierbare Funktionen. Gilt*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, \mathrm{d}\mu < +\infty \, ,$$

so ist $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und

$$\int \sum_{i=1}^{\infty} f_i \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Beweis. Man wende Satz 2.6.1 auf die Folge der Partialsummen von $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i$ an. □

Folgerung 2.6.4 *Seien $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, nichtnegative integrierbare Funktionen mit $f_1(x) \ge f_2(x) \ge \cdots$ für alle $x \in X$. Dann ist $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lim\limits_{i\to\infty} f_i(x)$, integrierbar und*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{i\to\infty} \int f_i \, \mathrm{d}\mu \, . \tag{2.6.10}$$

Beweis. Die Funktion f ist als Grenzwert messbarer Funktionen messbar. Außerdem ist $0 \leq f(x) \leq f_1(x)$ für alle $x \in X$. Folglich sind f und $f_1 - f$ nach Lemma 2.4.18 integrierbar. Ferner haben wir $(f_1 - f_i) \nearrow (f_1 - f)$. Somit gilt nach Satz 2.6.1(i)

$$\int (f_1 - f)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{i\to\infty} \int (f_1 - f_i)\,\mathrm{d}\mu\,,$$

woraus durch Subtraktion von $\int f_1\,\mathrm{d}\mu$ die Gleichung (2.6.10) folgt. □

Satz 2.6.5 (Lemma von Fatou) *Seien $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, nichtnegative integrierbare Funktionen und existiere ein $c \in \mathbb{R}$ mit*

$$\int f_i\,\mathrm{d}\mu \leq c \quad \textit{für alle} \quad i \in \mathbb{N}\,. \tag{2.6.11}$$

Dann ist die durch $f(x) := \liminf\limits_{i\to\infty} f_i(x)$ definierte Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und

$$\int f\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{i\to\infty} \int f_i\,\mathrm{d}\mu\,. \tag{2.6.12}$$

Beweis. Wir definieren $g_j : X \to \mathbb{R}$ für $j \in \mathbb{N}$ durch $g_j(x) := \inf\limits_{i\geq j} f_i(x)$. Dann sind nach Satz 2.1.23 alle g_j messbar. Außerdem gilt

$$0 \leq g_j(x) \leq f_i(x) \quad \text{für} \quad j \in \mathbb{N} \text{ und } i \geq j\,. \tag{2.6.13}$$

Mit Lemma 2.4.18 folgt, dass alle g_j integrierbar sind. Aus (2.6.11) und (2.6.13) erhalten wir dann mittels Folgerung 2.4.19

$$\int g_j\,\mathrm{d}\mu \leq \int f_i\,\mathrm{d}\mu \leq c \quad \text{für} \quad j \in \mathbb{N} \text{ und } i \geq j\,. \tag{2.6.14}$$

Desweiteren gilt $g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots$ und

$$\lim_{j\to\infty} g_j(x) = \lim_{j\to\infty} \left(\inf_{i\geq j} f_i(x) \right) = \liminf_{i\to\infty} f_i(x) = f(x)\,.$$

Mit Satz 2.6.1 folgt, dass f integrierbar ist und dass

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int g_j\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Da wegen (2.6.14)

$$\lim_{j\to\infty} \int g_j\,\mathrm{d}\mu \leq \lim_{j\to\infty} \left(\inf_{i\geq j} \int f_i\,\mathrm{d}\mu \right) = \liminf_{i\to\infty} \int f_i\,\mathrm{d}\mu\,,$$

ist damit der Satz bewiesen. □

Bemerkung 2.6.6 Nach Beispiel 2.6.2 gilt in (2.6.12) i.allg. keine Gleichheit. □

Satz 2.6.7 (Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz) *Seien $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, und $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Außerdem gelte:*

(a) *Die Folge (f_i) konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$.*

(b) *Für alle $x \in X$ ist $|f_i(x)| \leq g(x)$.*

Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\lim_{i\to\infty} \int |f_i - f| \, \mathrm{d}\mu = 0 \,. \tag{2.6.15}$$

Insbesondere ist

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{i\to\infty} \int f_i \, \mathrm{d}\mu \,. \tag{2.6.16}$$

Beweis. Die Funktion f ist nach Satz 2.1.22 messbar. Außerdem gilt wegen (a) und (b)

$$|f(x)| \le g(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X \,. \tag{2.6.17}$$

Hieraus ergibt sich mit Folgerung 2.4.20, dass f integrierbar ist. Wir definieren $h_i : X \to \mathbb{R}$ für $i \in \mathbb{N}$ durch $h_i(x) := \sup_{j \ge i} |f_j(x) - f(x)|$. Die Funktionen h_i sind nichtnegativ und nach Satz 2.1.23 messbar. Desweiteren erhalten wir aus (b) und (2.6.17), dass $h_i(x) \le 2g(x)$. Demzufolge sind alle h_i integrierbar. Da außerdem $h_1(x) \ge h_2(x) \ge \cdots$ und $\lim_{i\to\infty} h_i(x) = 0$, gilt nach Folgerung 2.6.4

$$\lim_{i\to\infty} \int h_i \, \mathrm{d}\mu = 0 \,,$$

was wegen $|f_i(x) - f(x)| \le h_i(x)$ die Gleichung (2.6.15) impliziert. Die Gleichung (2.6.16) erhält man schließlich aus (2.6.15) und

$$\left| \int f_i \, \mathrm{d}\mu - \int f \, \mathrm{d}\mu \right| = \left| \int (f_i - f) \, \mathrm{d}\mu \right| \le \int |f_i - f| \, \mathrm{d}\mu \,.$$

□

Das folgende Beispiel zeigt, dass Satz 2.6.7 ohne die Voraussetzung (b) falsch ist.

Beispiel 2.6.8 Seien $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, durch

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |x| < i \\ 0 & \text{für} \quad |x| \ge i \end{cases}$$

definiert. Dann sind alle f_i Lebesgue-integrierbar, aber die Grenzfunktion $\lim_{i\to\infty} f_i$ ist nicht Lebesgue-integrierbar, denn $f_i \nearrow 1$ und

$$\lim_{i\to\infty} \int f_i \, \mathrm{d}\mu_L = +\infty \,.$$

□

Aus Satz 2.6.7 erhalten wir

Satz 2.6.9 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und habe $f : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften.*

(a) *Für jedes $t \in I$ ist die Funktion $x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar.*

(b) *Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $t \in I \mapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$ differenzierbar.*

(c) *Es existiert eine Lebesgue-integrierbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ mit*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \le g(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n \ \textit{und} \ t \in I \,.$$

Dann ist die Funktion $h : I \to \mathbb{R}$, $h(t) := \int f(x,t)\,\mathrm{d}\mu_L(x)$, differenzierbar und

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}\mu_L(x) \quad \textit{für alle} \quad t \in I\ .$$

Beweis. Sei (s_i) eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = 0$. Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{i\to\infty} \int \frac{f(x,t+s_i) - f(x,t)}{s_i}\,\mathrm{d}\mu_L(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}\mu_L(x)\ . \tag{2.6.18}$$

Dazu fixieren wir $t \in I$ und betrachten die durch

$$\varphi_i(x) := \frac{f(x,t+s_i) - f(x,t)}{s_i} \quad \text{und} \quad \varphi(x) := \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

definierten Funktionen $\varphi_i, \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die φ_i bilden wegen (a) und (b) eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen, die punktweise gegen φ konvergiert. Außerdem können wir aus (c) mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

$$|\varphi_i(x)| \le g(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ableiten. Nach Satz 2.6.7 folgt (2.6.18). □

Im Rest dieses Abschnitts soll noch auf verschiedene Konvergenzbegriffe für Folgen messbarer Funktionen eingegangen werden.

Definition 2.6.10 (i) *Eine Folge von Funktionen $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$* **konvergiert fast überall** *gegen eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (in Zeichen:* ae-lim $f_i = f$*) $:\Longleftrightarrow$ Es existiert eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit*

$$\mu(A) = 0 \qquad \textit{und} \qquad \lim_{i\to\infty} f_i(x) = f(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in X \setminus A\ .$$

(ii) *Eine Folge von messbaren Funktionen $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$* **konvergiert im Maß** *gegen eine messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (in Zeichen: μ-lim $f_i = f$) $:\Longleftrightarrow$ Für alle $\varepsilon > 0$ ist*

$$\lim_{i\to\infty} \mu(\{x \in X : f_i(x) \ge f(x) + \varepsilon\} \cup \{x \in X : f_i(x) \le f(x) - \varepsilon\}) = 0\ . \tag{2.6.19}$$

(iii) *Eine Folge von integrierbaren Funktionen $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$* **konvergiert in** L_1 *gegen eine integrierbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (in Zeichen: L_1-lim $f_i = f$) $:\Longleftrightarrow$*

$$\lim_{i\to\infty} \int |f_i - f|\,\mathrm{d}\mu = 0\ .$$

Bemerkung 2.6.11 Sind die Funktionen f_i und f derart, dass $f_i(x) - f(x)$ für jedes $x \in X$ und jedes $i \in \mathbb{N}$ definiert ist, so kann (2.6.19) als

$$\lim_{i\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_i(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) = 0$$

geschrieben werden. □

Bemerkung 2.6.12 Satz 2.6.7 bleibt richtig, wenn die Voraussetzung (a) durch ae-lim $f_i = f$ für eine messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ersetzt wird. Genauso genügt es bei Satz 2.6.1 vorauszusetzen, dass $f_i \nearrow f$ fast überall gilt und f messbar ist. □

Zwischen den in Definition 2.6.10 eingeführten Konvergenzbegriffen gelten folgende Beziehungen. Für Beweise verweisen wir auf Halmos, Measure Theory.

Satz 2.6.13 *Für messbare Funktionen $f_i, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt:*

(i) *Ist $\mu(X) < +\infty$ und gilt* ae-$\lim f_i = f$, *so gilt auch* μ-$\lim f_i = f$.

(ii) *Gilt* μ-$\lim f_i = f$, *so besitzt (f_i) eine Teilfolge (f_{i_k}) mit* ae-$\lim f_{i_k} = f$. □

Satz 2.6.14 *Sind $f_i, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und gilt* L_1-$\lim f_i = f$, *so gilt auch* μ-$\lim f_i = f$. □

Beispiel 2.6.15 Wir betrachten die Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_i(x) := |x|/i$, $i \in \mathbb{N}$. Dann sind alle f_i Lebesgue-messbar, d.h. $\mathcal{A}_L(\mathbb{R})$-messbar und es gilt $\lim f_i = 0$, also auch ae-$\lim f_i = 0$. Aber es gilt nicht μ_L-$\lim f_i = 0$, denn für $\varepsilon > 0$ und $i \in \mathbb{N}$ ist

$$\mu_L(\{x \in \mathbb{R} : |x|/i \geq \varepsilon\}) = \mu_L(\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq i\varepsilon\}) = +\infty \,.$$

Folglich ist Satz 2.6.13(i) ohne die Voraussetzung $\mu(X) < +\infty$ falsch. □

Beispiel 2.6.16 Wir definieren folgendermaßen eine Folge von Lebesgue-messbaren Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es sei $A_{k,l} := [(l-1)/k, l/k]$ für $k \in \mathbb{N}$ und $l = 1, \ldots, k$ und $f_1 := \chi_{A_{1,1}}$, $f_2 := \chi_{A_{2,1}}$, $f_3 := \chi_{A_{2,2}}$, $f_4 := \chi_{A_{3,1}}$, $f_5 := \chi_{A_{3,2}}$, $f_6 := \chi_{A_{3,3}}$, $f_7 := \chi_{A_{4,1}}$, ... Dann gilt μ_L-$\lim f_i = 0$, denn für $\varepsilon > 0$ ist

$$\mu_L(\{x \in \mathbb{R} : \chi_{A_{k,l}}(x) \geq \varepsilon\}) \leq \mu_L(A_{k,l}) = \frac{1}{k} \,.$$

Aber es gilt nicht ae-$\lim f_i = 0$, denn für jedes $x \in [0,1]$ ist die Folge $(f_i(x))$ divergent. Andererseits bilden die Funktionen $\chi_{A_{k,k}}$ eine Teilfolge (f_{i_k}) von (f_i) mit ae-$\lim f_{i_k} = 0$. □

Beispiel 2.6.17 Die Funktionen

$$f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,, \quad f_i(x) := \begin{cases} i^2 & \text{für } 0 < x < 1/i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \,,$$

sind Lebesgue-integrierbar. Außerdem gilt μ_L-$\lim f_i = 0$, denn für $\varepsilon > 0$ ist

$$\mu_L(\{x \in \mathbb{R} : |f_i(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \mu_L(]0, 1/i[) = \frac{1}{i} \,.$$

Da aber

$$\int |f_i| \, \mathrm{d}\mu_L = i \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N} \,,$$

gilt nicht L_1-$\lim f_i = 0$. Also ist die Umkehrung von Satz 2.6.14 falsch. □

Wie man aus dem nächsten Satz sieht, sind die Grenzwerte bezüglich der in Definition 2.6.10 eingeführten Konvergenzbegriffe i.allg. nicht eindeutig.

Satz 2.6.18 *Seien $f_i, f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.*

(i) *Gilt* ae-$\lim f_i = f$, *so gilt* ae-$\lim f_i = g$ *genau dann, wenn $f \sim g$.*

(ii) *Gilt* μ-$\lim f_i = f$, *so gilt* μ-$\lim f_i = g$ *genau dann, wenn $f \sim g$.*

(iii) *Sind die Funktionen f_i, f und g integrierbar und gilt* L_1-$\lim f_i = f$, *so gilt* L_1-$\lim f_i = g$ *genau dann, wenn $f \sim g$.*

Beweis. (i) Dies ist offensichtlich.

(ii) Für messbare Funktionen $h_1, h_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\varepsilon > 0$ sei

$$A^+(h_1, h_2, \varepsilon) := \{x \in X : h_1(x) \geq h_2(x) + \varepsilon\} ,$$
$$A^-(h_1, h_2, \varepsilon) := \{x \in X : h_1(x) \leq h_2(x) - \varepsilon\} .$$

Es gilt

$$A^+(f, g, \varepsilon) \subseteq A^-(f_i, f, \varepsilon/2) \cup A^+(f_i, g, \varepsilon/2) \quad \text{für alle} \quad \varepsilon > 0 \text{ und } i \in \mathbb{N} . \tag{2.6.20}$$

Aus $x \notin A^-(f_i, f, \varepsilon/2) \cup A^+(f_i, g, \varepsilon/2)$, d.h. $f_i(x) > f(x) - \varepsilon/2$ und $f_i(x) < g(x) + \varepsilon/2$ folgt nämlich $f(x) - \varepsilon/2 < g(x) + \varepsilon/2$, d.h. $x \notin A^+(f, g, \varepsilon)$. Genauso sieht man, dass

$$A^-(f, g, \varepsilon) \subseteq A^+(f_i, f, \varepsilon/2) \cup A^-(f_i, g, \varepsilon/2) \quad \text{für alle} \quad \varepsilon > 0 \text{ und } i \in \mathbb{N} . \tag{2.6.21}$$

Gelte nun $\mu\text{-}\lim f_i = f$ und $\mu\text{-}\lim f_i = g$. Wegen (2.6.20) und (2.6.21) ist dann

$$\mu\left(A^+(f, g, \varepsilon)\right) \leq \lim_{i\to\infty} \mu\left(A^-(f_i, f, \varepsilon/2)\right) + \lim_{i\to\infty} \mu\left(A^+(f_i, g, \varepsilon/2)\right) = 0$$

und

$$\mu\left(A^-(f, g, \varepsilon)\right) \leq \lim_{i\to\infty} \mu\left(A^+(f_i, f, \varepsilon/2)\right) + \lim_{i\to\infty} \mu\left(A^-(f_i, g, \varepsilon/2)\right) = 0$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Da

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(A^+(f, g, 1/k) \cup A^-(f, g, 1/k)\right) ,$$

folgt $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, d.h. $f \sim g$. Umgekehrt ist es einfach einzusehen, dass aus $\mu\text{-}\lim f_i = f$ und $f \sim g$ die Beziehung $\mu\text{-}\lim f_i = g$ folgt.

(iii) Die Behauptung erhält man aus Satz 2.4.26(ii) und Satz 2.4.28. □

2.7 Die L_p-Räume

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ wieder ein fixierter Maßraum, sei $p \in [1, +\infty[$ und sei $\mathcal{L}_p(X; \mathbb{R}) = \mathcal{L}_p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ die Menge der messbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$, für die $|f|^p$ integrierbar ist. Ist $f \in \mathcal{L}_p(X; \mathbb{R})$, so sei

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} .$$

Zunächst beweisen wir zwei fundamentale Ungleichungen.

Satz 2.7.1 (Höldersche Ungleichung) *Seien $p, q \in \,]1, +\infty[$ mit $1/p + 1/q = 1$ und sei $f \in \mathcal{L}_p(X; \mathbb{R})$ und $g \in \mathcal{L}_q(X; \mathbb{R})$. Dann ist $f \cdot g \in \mathcal{L}_1(X; \mathbb{R})$ und*

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q . \tag{2.7.1}$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, erinnern wir an folgendes Resultat.

Lemma 2.7.2 (Youngsche Ungleichung) *Seien $p, q \in \,]1, +\infty[$ mit $1/p + 1/q = 1$. Für alle reellen Zahlen $a, b \geq 0$ gilt dann*

$$a^{1/p} \, b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} . \tag{2.7.2}$$

□

Beweis von Satz 2.7.1. Nach Satz 2.1.21(iii) ist $f \cdot g$ messbar. Ist $\|f\|_p = 0$, d.h. $\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu = 0$, so ist $|f|$ nach Satz 2.4.26(ii) fast überall 0. Dann ist auch $|f \cdot g|$ fast überall 0. Nach Satz 2.4.28 folgt, dass $|f \cdot g|$ integrierbar ist und dass $\int |f \cdot g| \,\mathrm{d}\mu = 0$. Also ist (2.7.1) in diesem Fall trivialerweise erfüllt. Analog verifiziert man die Behauptung des Satzes für den Fall, dass $\|g\|_q = 0$.

Gelte jetzt $\|f\|_p \neq 0$ und $\|g\|_q \neq 0$. Indem wir in (2.7.2)

$$a := \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} \quad \text{und} \quad b := \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

setzen, erhalten wir

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \left(\frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q} \right) \quad \text{für alle} \quad x \in X.$$

Da $|f|^p$ und $|g|^q$ integrierbar sind, ist dann nach Folgerung 2.4.20 auch $|f \cdot g|$ integrierbar. Außerdem gilt

$$\|f \cdot g\|_1 = \int |f \cdot g| \,\mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \left(\frac{1}{p\|f\|_p^p} \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \int |g|^q \,\mathrm{d}\mu \right) = \|f\|_p \, \|g\|_q \,.$$

□

Satz 2.7.3 (Minkowskische Ungleichung) *Sei $p \in [1, +\infty[$ und seien $f, g \in \mathcal{L}_p(X;\mathbb{R})$. Dann ist auch $f + g \in \mathcal{L}_p(X;\mathbb{R})$ und*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \,. \tag{2.7.3}$$

Beweis. Nach Satz 2.1.21(i) ist $f + g$ messbar. Für $p = 1$ ergibt sich die Behauptung somit aus

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad \text{für alle} \quad x \in X$$

und den Folgerungen 2.4.19 und 2.4.20. Sei $p > 1$. Da

$$|r + s|^p \leq (|r| + |s|)^p \leq (2 \max\{|r|, |s|\})^p = 2^p \max\{|r|^p, |s|^p\} \leq 2^p \left(|r|^p + |s|^p\right)$$

für beliebige $r, s \in \mathbb{R}$, haben wir

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p \left\{|f(x)|^p + |g(x)|^p\right\} \quad \text{für alle} \quad x \in X \,.$$

Dies impliziert nach Folgerung 2.4.20, dass $f + g \in \mathcal{L}_p(X;\mathbb{R})$. Sei $q := p/(p-1)$. Dann ist $q > 1$ und $1/p + 1/q = 1$. Desweiteren gilt $\left(|f + g|^{p-1}\right)^q = |f + g|^p$. Folglich ist $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}_q(X;\mathbb{R})$. Mittels der Hölderschen Ungleichung schließen wir

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_p^p &= \int |f + g|^p \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int |f| \cdot |f + g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu + \int |g| \cdot |f + g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \left\| f \cdot |f + g|^{p-1} \right\|_1 + \left\| g \cdot |f + g|^{p-1} \right\|_1 \\
&\leq \|f\|_p \cdot \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q + \|g\|_p \cdot \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int |f + g|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/q} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p/q} \,.
\end{aligned}$$

Da $p - p/q = 1$, folgt (2.7.3). □

Folgerung 2.7.4 *Für jedes $p \in [1, +\infty[$ ist $\mathcal{L}_p(X;\mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum und die Abbildung $f \in \mathcal{L}_p(X;\mathbb{R}) \mapsto \|f\|_p \in \mathbb{R}$ eine Halbnorm, d.h. sie besitzt alle Eigenschaften einer Norm bis auf die Bedingung, dass $\|f\|_p = 0$ nur gelten kann, wenn $f = 0$ ist.* □

Ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, so sei $[f]$ die Äquivalenzklasse von f, also die Menge aller messbaren Funktionen $g : X \to \mathbb{R}$ mit $g \sim f$. Wir setzen

$$L_p(X;\mathbb{R}) := L_p(X,\mathcal{A},\mu;\mathbb{R}) := \{[f] : f \in \mathcal{L}_p(X;\mathbb{R})\}$$

und

$$[f] + [g] := [f+g]\ , \tag{2.7.4}$$
$$\lambda[f] := [\lambda f]\ , \tag{2.7.5}$$
$$\|[f]\|_p := \|f\|_p \tag{2.7.6}$$

für $[f], [g] \in L_p(X;\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Satz 2.7.5 *Für jedes $p \in [1,+\infty[$ ist $(L_p(X;\mathbb{R}), \|\ \|_p)$ ein reeller normierter Raum.*

Beweis. Mit Hilfe von Satz 2.7.3 verifiziert man leicht, dass (2.7.4) und (2.7.5) eine Vektorraumstruktur auf $L_p(X;\mathbb{R})$ definieren. Seien $f, g \in \mathcal{L}_p(X;\mathbb{R})$. Gilt $f \sim g$, so gilt auch $|f|^p \sim |g|^p$, was nach Satz 2.4.28 die Gleichung $\|f\|_p = \|g\|_p$ impliziert. Somit ist $\|[f]\|_p$ durch (2.7.6) korrekt definiert. Außerdem folgt nach Satz 2.4.26(ii) aus $\|[f]\|_p = 0$ die Beziehung $f \sim 0$, d.h. $[f] = [0]$. Hieraus erhalten wir zusammen mit Folgerung 2.7.4, dass $\|\ \|_p$ eine Norm auf $L_p(X;\mathbb{R})$ ist. □

Satz 2.7.6 *Für jedes $p \in [1,+\infty[$ ist der normierte Raum $(L_p(X;\mathbb{R}), \|\ \|_p)$ ein Banach-Raum.*

Beweis. Sei $([f_i])_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L_p(X;\mathbb{R})$, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|[f_i] - [f_j]\|_p = \|f_i - f_j\|_p < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad i, j \geq i_0\ .$$

Folglich können wir zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $i(k) \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\|f_i - f_{i(k)}\right\|_p < 2^{-2k} \quad \text{für alle} \quad i \geq i(k) \tag{2.7.7}$$

wählen. O.B.d.A. sei $i(k) < i(k+1)$. Wir setzen $A_k := \left\{x \in X : \left|f_{i(k+1)}(x) - f_{i(k)}(x)\right| > 2^{-k}\right\}$, $B_k := \bigcap\limits_{l=k}^{\infty}(X \setminus A_l)$ und $B := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ und zeigen, dass

$$\mu(X \setminus B) = 0\ . \tag{2.7.8}$$

Wegen (2.7.7) gilt

$$2^{-2kp} > \int \left|f_{i(k+1)} - f_{i(k)}\right|^p \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{A_k} \left|f_{i(k+1)} - f_{i(k)}\right|^p \,\mathrm{d}\mu \geq 2^{-kp}\mu(A_k)$$

und somit $\mu(A_k) < 2^{-kp}$. Es folgt

$$\mu(X \setminus B_k) = \mu\left(\bigcup_{l=k}^{\infty} A_l\right) \leq \sum_{l=k}^{\infty} \mu(A_l) < \sum_{l=k}^{\infty} 2^{-lp} = 2^{-kp}\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-lp} = \frac{2^{-kp}}{1-2^{-p}} = \frac{2^p}{2^{kp}(2^p-1)}\ .$$

Da

$$X \setminus B = X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}(X \setminus B_k)$$

und $X \setminus B_1 \supseteq X \setminus B_2 \supseteq \cdots$, erhalten wir

$$\mu(X \setminus B) = \lim_{k\to\infty} \mu(X \setminus B_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{2^p}{2^{kp}(2^p-1)} = 0\ .$$

Als nächstes bemerken wir, dass für jedes $x \in B$ die Folge $\big(f_{i(k)}(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Ist nämlich $x \in B$, so ist $x \in B_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und somit $x \notin A_l$ für alle $l \geq k$, d.h. es gilt

$$\big|f_{i(l+1)}(x) - f_{i(l)}(x)\big| \leq 2^{-l} \quad \text{für alle} \quad l \geq k \; .$$

Nach dem Majorantenkriterium folgt, dass die Reihe $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \big(f_{i(l+1)}(x) - f_{i(l)}(x)\big)$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Da

$$f_{i(k)}(x) = f_{i(1)}(x) + \sum_{l=1}^{k-1} \big(f_{i(l+1)}(x) - f_{i(l)}(x)\big) \; ,$$

konvergiert damit auch $\big(f_{i(k)}(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$.

Sei nun $f : X \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} f_{i(k)}(x) & \text{für } x \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Es sei also $f := \lim\limits_{k\to\infty} \chi_B f_{i(k)}$. Wir zeigen, dass $f \in \mathcal{L}_p(X;\mathbb{R})$ und

$$\lim_{i\to\infty} \|f - f_i\|_p = 0 \; . \tag{2.7.9}$$

Zunächst stellen wir fest, dass f als Grenzwert messbarer Funktionen wieder messbar ist. Wir fixieren $k \in \mathbb{N}$ und definieren $g_l : X \to \mathbb{R}$ durch $g_l(x) := \big|f_{i(l)}(x) - f_{i(k)}(x)\big|^p$. Wegen (2.7.7) gilt

$$\int_X g_l \, \mathrm{d}\mu < 2^{-2kp} \quad \text{für alle} \quad l \geq k \; .$$

Die Funktion $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g(x) := \liminf\limits_{l\to\infty} g_l(x)$, ist somit nach dem Lemma von Fatou (Satz 2.6.5) integrierbar und

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{l\to\infty} \int_X g_l \, \mathrm{d}\mu \leq 2^{-2kp} \; .$$

Wegen

$$g(x) = \lim_{l\to\infty} \big|f_{i(l)}(x) - f_{i(k)}(x)\big|^p = \big|f(x) - f_{i(k)}(x)\big|^p \quad \text{für} \quad x \in B$$

und (2.7.8), ist $g \sim \big|f - f_{i(k)}\big|^p$. Nach Satz 2.4.28 ist demnach auch $|f - f_{i(k)}|^p$ integrierbar und folglich $f - f_{i(k)} \in \mathcal{L}_p(X;\mathbb{R})$. Weiter gilt

$$\|f - f_{i(k)}\|_p = \left(\int g \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leq 2^{-2k} \; . \tag{2.7.10}$$

Mit Folgerung 2.7.4 ergibt sich

$$f = \big(f - f_{i(k)}\big) + f_{i(k)} \in \mathcal{L}_p(X;\mathbb{R}) \; .$$

Außerdem haben wir nach (2.7.7) und (2.7.10)

$$\|f - f_i\|_p \leq \big\|f - f_{i(k)}\big\|_p + \big\|f_{i(k)} - f_i\big\|_p \leq 2^{-2k} + 2^{-2k} = 2^{-2k+1} \quad \text{für} \quad i \geq i(k) \; ,$$

woraus schließlich (2.7.9) folgt. $\square$

Die L_p-Räume für komplexwertige Funktionen führen wir in analoger Weise ein. Sei dazu $\mathbb{C}$ mit der σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ ihrer Borel-Mengen versehen. Für $p \in [1, +\infty[$ sei $\mathcal{L}_p(X;\mathbb{C}) = \mathcal{L}_p(X,\mathcal{A},\mu;\mathbb{C})$ die Menge der messbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$, für die $|f|^p$ integrierbar ist. Wir setzen

$$L_p(X;\mathbb{C}) := L_p(X,\mathcal{A},\mu;\mathbb{C}) = \{[f] : f \in \mathcal{L}_p(X;\mathbb{C})\} \; ,$$

wobei $[f]$ die Menge der messbaren Funktionen $g : X \to \mathbb{C}$ bezeichnet, die fast überall gleich f sind. Ist $f \in \mathcal{L}_p(X;\mathbb{C})$, so sei

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p := \left(\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \; .$$

Bemerkung 2.7.7 Wie man leicht überprüft, gelten für $\mathcal{L}_p(X;\mathbb{C})$ und $L_p(X;\mathbb{C})$ die oben bewiesenen Sätze in analoger Form. Insbesondere ist $(L_p(X;\mathbb{C}), \| \ \|_p)$ für jedes $p \in [1, +\infty[$ ein komplexer Banach-Raum. $\square$

Im weiteren werden wir wie üblich für die Äquivalenzklasse $[f]$ einfach f schreiben.

Die L_2-Räume spielen eine exponierte Rolle, da sie eine zusätzliche Struktur besitzen. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und seien $f_1, f_2 \in L_2(X;\mathbb{K})$. Dann ist auch $\overline{f_2} \in L_2(X;\mathbb{K})$. Mit Satz 2.7.1 folgt, dass $f_1\overline{f_2}$ integrierbar ist. Wir setzen

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \int f_1 \overline{f_2} \, \mathrm{d}\mu \ .$$

Dabei sei $\int f \, \mathrm{d}\mu$ für $f : X \to \mathbb{C}$ durch $\int f \, \mathrm{d}\mu := \int \mathrm{Re}(f) \, \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int \mathrm{Im}(f) \, \mathrm{d}\mu$ definiert. Auf diese Weise erhalten wir ein Skalarprodukt auf $L_2(X;\mathbb{K})$.

Satz 2.7.8 $L_2(X;\mathbb{K})$ *ist ein Hilbert-Raum.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 2.7.6, Bemerkung 2.7.7 und

$$\langle f, f \rangle = \|f\|_2^2 \quad \text{für alle} \quad f \in L_2(X;\mathbb{K}) \ .$$

$\square$

Bemerkung 2.7.9 Mit Hilfe der Parallelogrammidentität überprüft man, dass $L_p(X;\mathbb{K})$ für $p \neq 2$ kein Hilbert-Raum ist. $\square$

Wir betrachten jetzt Beispiele für (vollständige) Orthonormalsysteme in $L_2(I;\mathbb{K})$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein gewisses Intervall ist und bezüglich des Lebesgue-Maßes integriert wird.

Beispiel 2.7.10 Für $l \in \mathbb{N}$ sei $A_{2l-1} := [l-1, l[$ und $A_{2l} := [-l, -l+1[$. Es ist also

$$A_1 := [0,1[\ , \quad A_2 := [-1,0[\ , \quad A_3 := [1,2[\ , \quad A_4 := [-2,-1[\ , \quad \ldots$$

Wir setzen $\varphi_k := \chi_{A_k}$. Dann ist $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Dieses System ist aber nicht vollständig. Ist z.B. $B := [0, 1/2[$, so ist $\chi_B \in L_2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, aber

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle \chi_B, \varphi_k \rangle \varphi_k = \langle \chi_B, \varphi_1 \rangle \varphi_1 = \frac{1}{2}\varphi_1 \neq \chi_B \ .$$

$\square$

Beispiel 2.7.11 Seien die Funktionen $f_k : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, durch $f_k(x) := x^k$ definiert. Dann ist $\{f_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig. Indem wir auf diese Menge das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren anwenden, erhalten wir ein Orthonormalsystem $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $L_2([-1,1];\mathbb{R})$. Man berechnet, dass

$$\varphi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \ , \quad \varphi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \ , \quad \varphi_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(x^2 - \frac{2}{3} \right) \ .$$

Zur Bestimmung von φ_k für beliebiges k benutzen wir folgende Überlegung. Seien $(g_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(h_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ zwei Orthonormalsysteme in $L_2([-1,1];\mathbb{R})$ und seien g_k, h_k für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ Polynome vom Grad k. Wir beweisen induktiv, dass dann

$$g_k = c_k h_k \quad \text{für ein} \quad c_k \in \{-1, 1\} \ . \tag{2.7.11}$$

Für $k = 0$ ist das trivial. Gelte (2.7.11) für alle $k \leq l$. Da g_{l+1} eine Linearkombination von $h_0, \ldots, h_{l+1}$ ist, haben wir

$$g_{l+1} = \sum_{i=0}^{l+1} \lambda_i h_i = \sum_{i=0}^{l} \frac{\lambda_i}{c_i} g_i + \lambda_{l+1} h_{l+1} \ .$$

Ist $k \leq l$, so gilt

$$0 = \langle g_k, g_{l+1} \rangle = \sum_{i=0}^{l} \frac{\lambda_i}{c_i} \langle g_k, g_i \rangle + \lambda_{l+1} c_k \langle h_k, h_{l+1} \rangle = \frac{\lambda_k}{c_k} \|g_k\|_2^2$$

und somit $\lambda_k = 0$. Also ist $g_{l+1} = \lambda_{l+1} h_{l+1}$, woraus wegen $\|g_{l+1}\|_2 = \|h_{l+1}\|_2 = 1$ die Beziehung (2.7.11) folgt.

Seien $\psi_k : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, die so genannten **Legendre-Polynome**, d.h. es sei

$$\psi_k(x) := \frac{1}{2^k \cdot k!} Q_k^{(k)} \ ,$$

wobei $Q_k(x) := \left(x^2 - 1\right)^k$. Offenbar ist ψ_k ein Polynom vom Grad k. Nach Satz 2.5.4 haben wir

$$\langle \psi_k, \psi_l \rangle = \int_{[-1,1]} \psi_k \psi_l \, \mathrm{d}\mu_L = \frac{1}{2^{k+l} \cdot k! \cdot l!} \int_{-1}^{1} Q_k^{(k)}(x) \, Q_l^{(l)}(x) \, \mathrm{d}x \ .$$

Da $Q_k^{(j)}(-1) = Q_k^{(j)}(1) = 0$ für $j = 0, \ldots, k-1$, erhalten wir mit k-maliger partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} Q_k^{(k)}(x) \, Q_l^{(l)}(x) \, \mathrm{d}x &= -\int_{-1}^{1} Q_k^{(k-1)}(x) \, Q_l^{(l+1)}(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} Q_k^{(k-2)}(x) \, Q_l^{(l+2)}(x) \, \mathrm{d}x = \cdots = (-1)^k \int_{-1}^{1} Q_k(x) \, Q_l^{(l+k)}(x) \, \mathrm{d}x \ . \end{aligned}$$

Ist nun $k \neq l$ und o.B.d.A $k > l$, so ist $Q_l^{(l+k)} = 0$ und folglich gilt $\langle \psi_k, \psi_l \rangle = 0$. Ferner berechnen wir mit

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2k+1}(t) \, \mathrm{d}t = \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k+1)!} \ ,$$

dass

$$\|\psi_k\|_2^2 = \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^k \, \mathrm{d}x = \frac{(2k)!}{2^{2k-1} (k!)^2} \int_0^{\pi/2} \cos^{2k+1}(t) \, \mathrm{d}t = \frac{2}{2k+1} \ .$$

Nach der Überlegung oben folgt

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \psi_k \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Der nächste Satz impliziert, dass das Orthonormalsystem $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ auch vollständig ist. □

Satz 2.7.12 *Sei $p \in [1, +\infty[$ und sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Dann existiert zu jedem $f \in L_p(I; \mathbb{K})$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom $Q : I \to \mathbb{K}$ mit $\|f - Q\|_p < \varepsilon$. Das heißt, die Polynome bilden eine dichte Teilmenge von $L_p(I; \mathbb{K})$.*

Beweis. Günther u.a., Grundkurs Analysis, Teil 3, Abschnitt 12.1.4. □

Beispiel 2.7.13 Seien $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, durch $f_k(x) := x^k \, \mathrm{e}^{-x^2/2}$ definiert. Dann bilden die Funktionen f_k eine linear unabhängige Teilmenge von $L_2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Indem wir wieder das Schmidtsche

Orthogonalisierungsverfahren anwenden, erhalten wir ein Orthonormalsystem $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Analog zum Beispiel 2.7.11 sieht man, dass

$$\varphi_k = \frac{1}{\sqrt{2^k \cdot k! \cdot \sqrt{\pi}}}\, h_k \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0 \;,$$

wobei h_k, $k \in \mathbb{N}_0$, die so genannten **Hermiteschen Funktionen** sind, d.h.

$$h_k(x) := H_k(x)\, \mathrm{e}^{-x^2/2} \quad \text{und} \quad H_k(x) := (-1)^k\, \mathrm{e}^{x^2}\, \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\, \mathrm{e}^{-x^2} \;.$$

Die Polynome H_k werden **Hermitesche Polynome** genannt. Auch in diesem Beispiel ist das Orthonormalsystem $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ vollständig (vgl. Königsberger, Analysis 2, Abschnitt 10.3.V). □

Beispiel 2.7.14 Seien $\varphi_k : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, und $\psi_m : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}$, durch

$$\varphi_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \;, \quad \varphi_{2l}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(lx) \;, \quad \varphi_{2l-1}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(lx) \;, \quad l \in \mathbb{N} \;,$$

und

$$\psi_m(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}$$

definiert. Man rechnet einfach nach, dass $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ein Orthonormalsystem in $L_2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ und $(\psi_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem in $L_2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ ist. Außerdem kann man zeigen, dass beide Orthonormalsysteme vollständig sind (vgl. Günther u.a., Grundkurs Analysis, Teil 3, Abschnitt 12.1.4). Die Elemente der linearen Hülle von $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ (bzw. $\{\psi_m : m \in \mathbb{Z}\}$) heißen **trigonometrische Polynome** über $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$). Die Fourier-Reihen zu den Orthonormalsystemen $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(\psi_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ werden **trigonometrische Fourier-Reihen** genannt. □

Ist $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L_2(X; \mathbb{R})$, so konvergiert für jede Funktion $f \in L_2(X; \mathbb{R})$ die Fourier-Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$ in $L_2(X; \mathbb{R})$ gegen f, d.h. es gilt

$$\lim_{i\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{i} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|_2 = 0 \;.$$

Damit weiß man aber i. allg. noch nichts über die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x)$ für ein $x \in X$. Zu diesem Problem führen wir folgendes Resultat an.

Satz 2.7.15 (Satz von Dirichlet–Jordan) *Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische Funktion der Periode 2π, sei $f := g\big|_{[-\pi,\pi]}$ und sei $a \in [-\pi, \pi]$. Ist $f \in L_2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ und existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $g\big|_{]a-\varepsilon,a]}$ und $g\big|_{[a,a+\varepsilon[}$ monoton sind, so gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(a) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x\to a+} g(x) + \lim_{x\to a-} g(x) \right) \;,$$

wobei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ das Orthonormalsystem in $L_2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ aus Beispiel 2.7.14 ist.

Beweis. Günther u.a., Grundkurs Analysis, Teil 3, Abschnitt 12.2.2. □

Beispiel 2.7.16 Wir wenden Satz 2.7.15 auf $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$, an. Da

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x &= \pi^2 \ , \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(lx)\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\pi} x\,\cos(lx)\,\mathrm{d}x = 2\,\frac{\cos(l\pi)-1}{l^2} \ , \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(lx)\,\mathrm{d}x &= 0 \ , \end{aligned}$$

erhalten wir

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos((2m-1)x)}{(2m-1)^2} \quad \text{für alle} \quad x \in [-\pi, \pi] \ .$$

Für $x = 0$ ergibt das die Beziehung

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8} \ .$$

□

2.8 Integration in Produkträumen

Für Beweise zu den in diesem Abschnitt ohne Beweis angegebenen Sätzen verweisen wir auf Günther u.a., Grundkurs Analysis, Teil 3, Abschnitt 10.5.

Sei $\mathcal{A}_1$ eine σ-Algebra über X_1 und $\mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra über X_2. Wir setzen

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \ ,$$

wobei $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1 \text{ und } A_2 \in \mathcal{A}_2\}$. Ist $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$, so sei

$$s_1(A, x_2) := \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in A\} \quad \text{und} \quad s_2(A, x_1) := \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in A\} \ .$$

Lemma 2.8.1 (i) *Sei $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Für alle $x_2 \in X_2$ ist $s_1(A, x_2) \in \mathcal{A}_1$ und für alle $x_1 \in X_1$ ist $s_2(A, x_1) \in \mathcal{A}_2$.*

(ii) *Sei $f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-messbare Funktion. Für alle $x_2 \in X_2$ ist*

$$f(\,\cdot\,, x_2) : x_1 \in X_1 \mapsto f(x_1, x_2) \in \overline{\mathbb{R}}$$

$\mathcal{A}_1$-messbar und für alle $x_1 \in X_1$ ist

$$f(x_1, \,\cdot\,) : x_2 \in X_2 \mapsto f(x_1, x_2) \in \overline{\mathbb{R}}$$

$\mathcal{A}_2$-messbar.

Beweis. (i) Sei $\mathcal{M} := \{B \subseteq X_1 \times X_2 : s_1(B, x_2) \in \mathcal{A}_1 \text{ für alle } x_2 \in X_2\}$. Dann ist $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{M}$, denn für beliebige $M_1 \subseteq X_1$ und $M_2 \subseteq X_2$ ist

$$s_1(M_1 \times M_2, x_2) = \begin{cases} M_1 & \text{für } x_2 \in M_2 \\ \emptyset & \text{für } x_2 \notin M_2 \end{cases} \ .$$

Aus

$$\begin{aligned} s_1((X_1 \times X_2) \setminus B, x_2) &= \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \notin B\} \\ &= X_1 \setminus \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in B\} = X_1 \setminus s_1(B, x_2) \end{aligned}$$

für jedes $B \subseteq X_1 \times X_2$ und

$$s_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, x_2\right) = \left\{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right\}$$
$$= \bigcup_{i=1}^{\infty}\{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in B_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} s_1(B_i, x_2)$$

für beliebige $B_i \subseteq X_1 \times X_2$ erhalten wir, dass $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist. Folglich haben wir

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{M} .$$

Ist also $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, so gilt $s_1(A, x_2) \in \mathcal{A}_1$ für alle $x_2 \in X_2$. Analog erhält man die entsprechende Aussage für $s_2(A, x_1)$.

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x_2 \in X_2$. Nach Voraussetzung gilt $f^{-1}(]a, +\infty]) \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Da

$$\begin{aligned} f(\,\cdot\,, x_2)^{-1}(]a, +\infty]) &= \{x_1 \in X_1 : f(x_1, x_2) \in\,]a, +\infty]\} \\ &= \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in f^{-1}(]a, +\infty])\} \\ &= s_1(f^{-1}(]a, +\infty]), x_2) , \end{aligned}$$

folgt mittels (i), dass $f(\,\cdot\,, x_2)^{-1}(]a, +\infty]) \in \mathcal{A}_1$. Also ist $f(\,\cdot\,, x_2)$ $\mathcal{A}_1$-messbar ist. Genauso sieht man, dass $f(x_1, \,\cdot\,)$ für jedes $x_1 \in X_1$ $\mathcal{A}_2$-messbar ist. $\square$

Seien $\mu_1 : \mathcal{A}_1 \to [0, +\infty]$ und $\mu_2 : \mathcal{A}_2 \to [0, +\infty]$ Maße. Wir nutzen Lemma 2.8.1(i) und definieren für $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ Funktionen $\eta_1(A) : X_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\eta_2(A) : X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$\eta_1(A)(x_1) := \mu_2(s_2(A, x_1)) \quad \text{und} \quad \eta_2(A)(x_2) := \mu_1(s_1(A, x_2)) .$$

Sei $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Dann haben wir

$$\eta_1(A_1 \times A_2)(x_1) = \mu_2(s_2(A_1 \times A_2, x_1)) = \begin{cases} \mu_2(A_2) & \text{für } x_1 \in A_1 \\ 0 & \text{für } x_1 \notin A_1 \end{cases} .$$

Demnach ist $\eta_1(A_1 \times A_2) = \mu_2(A_2)\chi_{A_1}$ und analog $\eta_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\chi_{A_2}$. Insbesondere ist $\eta_1(A_1 \times A_2)$ $\mathcal{A}_1$-messbar und $\eta_2(A_1 \times A_2)$ $\mathcal{A}_2$-messbar. Außerdem sieht man, dass

$$\int \eta_1(A_1 \times A_2)\, \mathrm{d}\mu_1 = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) = \int \eta_2(A_1 \times A_2)\, \mathrm{d}\mu_2 .$$

Allgemeiner hat man

Satz 2.8.2 *Seien $\mu_1 : \mathcal{A}_1 \to [0, +\infty]$ und $\mu_2 : \mathcal{A}_2 \to [0, +\infty]$ σ-endliche Maße. Für alle $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gilt dann:*

(i) *$\eta_1(A)$ ist $\mathcal{A}_1$-messbar und $\eta_2(A)$ ist $\mathcal{A}_2$-messbar.*

(ii) *$\int \eta_1(A)\, \mathrm{d}\mu_1 = \int \eta_2(A)\, \mathrm{d}\mu_2$.* $\square$

Wir definieren $\mu_1 \otimes \mu_2 : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \to [0, +\infty]$ durch

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) := \int \eta_1(A)\, \mathrm{d}\mu_1 .$$

Satz 2.8.3 *Seien $\mu_1 : \mathcal{A}_1 \to [0, +\infty]$ und $\mu_2 : \mathcal{A}_2 \to [0, +\infty]$ σ-endliche Maße. Dann gilt:*

(i) *$\mu_1 \otimes \mu_2$ ist ein σ-endliches Maß und*

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \quad \textit{für alle} \quad A_1 \in \mathcal{A}_1 \textit{ und } A_2 \in \mathcal{A}_2 . \tag{2.8.1}$$

(ii) *Ist* $\mu : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \to [0, +\infty]$ *ein Maß mit (2.8.1), so ist* $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$. □

Definition 2.8.4 *Das Maß* $\mu_1 \otimes \mu_2$ *wird das* **Produktmaß** *von* μ_1 *und* μ_2 *genannt.*

Der Hauptsatz dieses Abschnittes ist

Satz 2.8.5 (Fubini) *Seien* $\mu_1 : \mathcal{A}_1 \to [0, +\infty]$ *und* $\mu_2 : \mathcal{A}_2 \to [0, +\infty]$ σ*-endliche Maße und sei* $f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ *eine bezüglich* $\mu_1 \otimes \mu_2$ *integrierbare Funktion. Außerdem seien* $F_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ *und* $F_2 : X_2 \to \mathbb{R}$ *folgendermaßen definiert. Ist* $f(x_1, \,\cdot\,) : X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ *bezüglich* μ_2 *integrierbar, so sei* $F_1(x_1) := \int f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_2(x_2)$. *Andernfalls sei* $F_1(x_1) := 0$. *Analog ist* $F_2(x_2) := \int f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_1(x_1)$, *falls* $f(\,\cdot\,, x_2) : X_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ *bezüglich* μ_1 *integrierbar ist, und* $F_2(x_2) := 0$ *sonst. Dann gilt:*

(i) *Für fast alle* $x_1 \in X_1$ *ist* $f(x_1, \,\cdot\,)$ *bezüglich* μ_2 *integrierbar und für fast alle* $x_2 \in X_2$ *ist* $f(\,\cdot\,, x_2)$ *bezüglich* μ_1 *integrierbar.*

(ii) *Die Funktion* F_1 *ist bezüglich* μ_1 *integrierbar und die Funktion* F_2 *ist bezüglich* μ_2 *integrierbar.*

(iii) *Es ist*

$$\int f\, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int F_1\, \mathrm{d}\mu_1 = \int F_2\, \mathrm{d}\mu_2 \,. \tag{2.8.2}$$

Beweis. Sei $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ derart, dass $\mu_1 \otimes \mu_2(A) < +\infty$. Da nach Definition von $\mu_1 \otimes \mu_2$ und nach Satz 2.8.2

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int \eta_1(A)\, \mathrm{d}\mu_1 = \int \eta_2(A)\, \mathrm{d}\mu_2 \,, \tag{2.8.3}$$

ist dann $\eta_1(A) : X_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ bezüglich μ_1 integrierbar und $\eta_2(A) : X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ bezüglich μ_2 integrierbar. Insbesondere haben wir nach Satz 2.4.26(i), dass $\eta_1(A)(x_1) < +\infty$, d.h. $\mu_2(s_2(A, x_1)) < +\infty$ für fast alle $x_1 \in X_1$. Wegen $\chi_A(x_1, \,\cdot\,) = \chi_{s_2(A,x_1)}$ ist somit $\chi_A(x_1, \,\cdot\,) : X_2 \to \mathbb{R}$ für fast alle $x_1 \in X_1$ bezüglich μ_2 integrierbar. Genauso ist $\chi_A(\,\cdot\,, x_2) : X_1 \to \mathbb{R}$ für fast alle $x_2 \in X_2$ bezüglich μ_1 integrierbar. Außerdem gilt

$$\int \chi_A(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_2(x_2) = \eta_1(A)(x_1) \quad \text{und} \quad \int \chi_A(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_1(x_1) = \eta_2(A)(x_2) \,,$$

womit (2.8.3) die Form

$$\begin{aligned}
\int \chi_A(x_1, x_2)\, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) &= \int \left(\int \chi_A(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\
&= \int \left(\int \chi_A(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2)
\end{aligned}$$

erhält. Damit haben wir den Satz für den Fall bewiesen, dass f eine charakteristische Funktion ist. Folglich ist der Satz auch für einfache Funktionen richtig.

Sei f nichtnegativ. Wir wählen integrierbare einfache Funktionen $f_i : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ mit $f_i \nearrow f$. Da dann auch $f_i(x_1, \,\cdot\,) \nearrow f(x_1, \,\cdot\,)$ für jedes $x_1 \in X_1$, folgt mit Satz 2.6.1

$$\begin{aligned}
\int f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) &= \lim_{i \to \infty} \int f_i(x_1, x_2)\, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) \\
&= \lim_{i \to \infty} \int \left(\int f_i(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\
&= \int \left(\lim_{i \to \infty} \int f_i(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\
&= \int \left(\int f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \,.
\end{aligned}$$

Analog sieht man

$$\int f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}(\mu_1\otimes\mu_2)(x_1,x_2) = \int\left(\int f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)\right)\mathrm{d}\mu_2(x_2)\ .$$

Nach den Sätzen 2.4.26 und 2.4.28 liefert dies die Behauptungen.

Ist nun f eine beliebige integrierbare Funktion, so erhält man die Behauptungen, indem man die Überlegung oben auf f^+ und f^- anwendet. □

Bemerkung 2.8.6 Unter Berücksichtigung von Satz 2.4.28 kann man (2.8.2) als

$$\begin{aligned}\int f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}(\mu_1\otimes\mu_2)(x_1,x_2) &= \int\left(\int f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)\right)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\\ &= \int\left(\int f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)\right)\mathrm{d}\mu_2(x_2)\end{aligned}$$

schreiben. □

Im folgenden sei $\mu_L^n : \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n) \to [0,+\infty]$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$.

Lemma 2.8.7 *Für alle $n,m \in \mathbb{N}$ ist $\mu_L^n \otimes \mu_L^m \neq \mu_L^{n+m}$.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig und sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ derart, dass $M \notin \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^m)$. Nach Lemma 2.8.1(i) ist dann $\{x\} \times M \notin \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^m)$. Andererseits ist

$$\mu_L^n \otimes \mu_L^m(\{x\}\times\mathbb{R}^m) = \mu_L^n(\{x\})\mu_L^m(\mathbb{R}^m) = 0\ .$$

Also ist das Maß $\mu_L^n \otimes \mu_L^m$ nicht vollständig. Da μ_L^{n+m} nach Satz 2.3.21 aber vollständig ist, folgt die Behauptung. □

Satz 2.8.8 *Für alle $n,m \in \mathbb{N}$ ist das Lebesgue-Maß μ_L^{n+m} die Vervollständigung des Produktes $\mu_L^n \otimes \mu_L^m$, d.h. es gilt:*

(i) $\mathcal{A}_L(\mathbb{R}^{n+m}) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)\otimes\mathcal{A}_L(\mathbb{R}^m) \cup \mathcal{A}_0(\mu_L^n\otimes\mu_L^m))$, *wobei $\mathcal{A}_0(\mu_L^n\otimes\mu_L^m)$ das System derjenigen Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ ist , für die eine Menge $B_0 \in \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)\otimes\mathcal{A}_L(\mathbb{R}^m)$ mit $M \subseteq B_0$ und $\mu_L^n\otimes\mu_L^m(B_0) = 0$ existiert.*

(ii) $\mu_L^{n+m}(B) = \mu_L^n\otimes\mu_L^m(B)$ *für alle $B \in \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)\otimes\mathcal{A}_L(\mathbb{R}^m)$.* □

Satz 2.8.9 *Seien $m,n \in \mathbb{N}$. Setzt man in Satz 2.8.5 $\mu_1 := \mu_L^n$ und $\mu_2 := \mu_L^m$, so gelten die Behauptungen des Satzes auch für jede bezüglich μ_L^{n+m} integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$, wobei in (iii) das Maß $\mu_1 \otimes \mu_2$ durch μ_L^{n+m} zu ersetzen ist.* □

2.9 Der Satz von Radon–Nikodym

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X und seien $\mu, \nu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ Maße.

Definition 2.9.1 *Das Maß ν heißt* **absolut stetig** *bezüglich μ (in Zeichen: $\nu \ll \mu$) $:\iff$ Für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ gilt auch $\nu(A) = 0$.*

Beispiel 2.9.2 Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ nichtnegativ und messbar. Dann definiert

$$\nu_f(A) := \int_A f\,\mathrm{d}\mu$$

ein Maß $\nu_f : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ mit $\nu_f \ll \mu$. □

Der Satz von Radon–Nikodym besagt, dass auch die Umkehrung des Beispiels richtig ist. Zum Beweis dieses Satzes werden wir das folgende Lemma benutzen. Auf dessen Beweis werden wir später eingehen.

Lemma 2.9.3 *Seien μ und ν endlich, d.h. $\mu(X) < +\infty$ und $\nu(X) < +\infty$, sei $\nu(X) > 0$ und gelte $\nu \ll \mu$. Dann existiert eine nichtnegative messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\int_X f \,\mathrm{d}\mu > 0$ und $\int_A f \,\mathrm{d}\mu \leq \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.*

Satz 2.9.4 (Radon–Nikodym) *Seien μ und ν σ-endlich und gelte $\nu \ll \mu$. Dann gibt es eine nichtnegative messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit*

$$\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu \quad \textit{für alle} \quad A \in \mathcal{A} \,. \tag{2.9.1}$$

Ist $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion mit $\nu(A) = \int_A g \,\mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$, so sind g und f bezüglich μ äquivalent.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass μ und ν endlich sind. Bezeichne $\mathcal{K}$ die Menge aller nichtnegativen messbaren Funktionen $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit

$$\int_A h \,\mathrm{d}\mu \leq \nu(A) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{A} \,.$$

Da $0 \in \mathcal{K}$, ist $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Sind $h, h^* \in \mathcal{K}$, so ist auch $\max(h, h^*) \in \mathcal{K}$. Ist nämlich $A \in \mathcal{A}$ und ist $B := \{x \in A : h(x) \geq h^*(x)\}$, so haben wir

$$\int_A \max(h, h^*) \,\mathrm{d}\mu = \int_B h \,\mathrm{d}\mu + \int_{A \setminus B} h^* \,\mathrm{d}\mu \leq \nu(B) + \nu(A \setminus B) = \nu(A) \,.$$

Sei $\alpha := \sup\left\{\int_X h \,\mathrm{d}\mu : h \in \mathcal{K}\right\}$. Wir wählen $g_1, g_2, \ldots \in \mathcal{K}$ mit $\lim\limits_{i\to\infty} \int_X g_i \,\mathrm{d}\mu = \alpha$ und setzen $h_i := \max\{g_1, \ldots, g_i\}$. Dann ist (h_i) eine monoton wachsende Folge in $\mathcal{K}$. Da $g_i \leq h_i$ und somit

$$\int_X g_i \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X h_i \,\mathrm{d}\mu \leq \alpha \,,$$

gilt außerdem $\lim\limits_{i\to\infty} \int_X h_i \,\mathrm{d}\mu = \alpha$. Sei $f := \lim\limits_{i\to\infty} h_i$. Da nach Satz 2.6.1

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{i\to\infty} \int_A h_i \,\mathrm{d}\mu \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{A} \,,$$

ist $f \in \mathcal{K}$ und $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \alpha$. Wir zeigen, dass f der Bedingung (2.9.1) genügt. Angenommen, dass ist nicht der Fall. Dann existiert ein $C \in \mathcal{A}$ mit $\int_C f \,\mathrm{d}\mu < \nu(C)$. Wir definieren $\nu_1 : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ durch $\nu_1(A) := \nu(A) - \int_A f \,\mathrm{d}\mu$. Wie man leicht sieht, ist ν_1 ein Maß mit $\nu_1 \ll \mu$. Außerdem ist $\nu_1(C) > 0$ und somit auch $\nu_1(X) > 0$. Nach Lemma 2.9.3 existiert folglich eine nichtnegative messbare Funktion $f_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu > 0$ und $\int_A f_1 \,\mathrm{d}\mu \leq \nu_1(A)$, d.h. $\int_A (f + f_1) \,\mathrm{d}\mu \leq \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Also ist $f + f_1 \in \mathcal{K}$. Andererseits gilt

$$\int_X (f + f_1) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu = \alpha + \int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu > \alpha \,.$$

Damit haben wir einen Widerspruch zur Definition von α erhalten und (2.9.1) ist bewiesen.

Seien μ und ν jetzt σ-endlich. Dann gibt es höchstens abzählbar viele paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $X = \bigcup\limits_k A_k$ sowie $\mu(A_k) < +\infty$ und $\nu(A_k) < +\infty$ für alle k. Wie bereits bewiesen, können wir zu jedem k eine nichtnegative messbare Funktion $\varphi_k : A_k \to \overline{\mathbb{R}}$ so wählen, dass $\int_A \varphi_k \, \mathrm{d}\mu = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq A_k$. Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dadurch bestimmt, dass $f\big|_{A_k} = \varphi_k$. Dann ist f nichtnegativ und messbar und für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\nu(A) = \sum_k \nu(A \cap A_k) = \sum_k \int_{A \cap A_k} \varphi_k \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Sei nun $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion mit $\nu(A) = \int_A g \, \mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Wir müssen zeigen, dass

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0 \, . \tag{2.9.2}$$

Für $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$ sei

$$\begin{aligned} B_k^+(a,b) &:= \{x \in A_k : f(x) \leq a \text{ und } g(x) \geq b\} \, , \\ B_k^-(a,b) &:= \{x \in A_k : f(x) \geq b \text{ und } g(x) \leq a\} \, . \end{aligned}$$

Dann gilt

$$a\mu\left(B_k^+(a,b)\right) = \int_{B_k^+(a,b)} a \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{B_k^+(a,b)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{B_k^+(a,b)} g \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{B_k^+(a,b)} b \, \mathrm{d}\mu = b\mu\left(B_k^+(a,b)\right) \, ,$$

d.h. $(b-a)\mu\left(B_k^+(a,b)\right) \leq 0$. Das impliziert $\mu(B_k^+(a,b)) = 0$. Analog zeigt man $\mu(B_k^-(a,b)) = 0$. Da $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ die Vereinigung aller solcher Mengen $B_k^+(a,b)$ und $B_k^-(a,b)$ ist, folgt (2.9.2). □

Definition 2.9.5 *Die bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmte messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit (2.9.1) wird die* **Radon-Nikodym-Ableitung** *von ν nach μ genannt und mit $\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ bezeichnet.*

Beispiel 2.9.6 Sei $\nu : \mathcal{A}_L(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$, d.h. ein Maß mit $\nu(\mathbb{R}) = 1$, und gelte $\nu \ll \mu_L$. Dann ist die Radon-Nikodym-Ableitung $\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu_L} : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ die so genannte **Verteilungsdichte** von ν. □

Satz 2.9.7 *Seien μ und ν σ-endlich, gelte $\nu \ll \mu$ und sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ bezüglich ν integrierbar. Dann ist $f \cdot \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ bezüglich μ integrierbar und*

$$\int f \, \mathrm{d}\nu = \int f \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Beweis. Wir haben

$$\int \chi_A \, \mathrm{d}\nu = \nu(A) = \int_A \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \, \mathrm{d}\mu = \int \chi_A \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \, \mathrm{d}\mu$$

für jedes $A \in \mathcal{A}$ und folglich auch

$$\int g \, \mathrm{d}\nu = \int g \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \, \mathrm{d}\mu \tag{2.9.3}$$

für jede bezüglich ν integrierbare einfache Funktion $g : X \to \mathbb{R}$. Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ bezüglich ν integrierbar und gelte o.B.d.A. $f \geq 0$. Sei (f_i) eine Folge nichtnegativer einfacher Funktionen auf X mit $f_i \nearrow f$. Dann ist $\left(f_i \cdot \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\right)$ eine Folge von bezüglich μ integrierbaren Funktionen mit $f_i \cdot \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \nearrow f \cdot \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$. Nach Definition von $\int f \, \mathrm{d}\nu$ und wegen (2.9.3) gilt außerdem

$$\int f \, \mathrm{d}\nu = \lim_{i \to \infty} \int f_i \, \mathrm{d}\nu = \lim_{i \to \infty} \int f_i \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Indem man Satz 2.6.1 anwendet, erhält man die Behauptung. $\square$

Die folgenden Betrachtungen zielen auf den Beweis von Lemma 2.9.3. Sei dabei $\mathcal{A}$ weiterhin eine σ-Algebra über X.

Definition 2.9.8 *Eine Funktion $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ heißt* **endliches signiertes Maß** $:\iff$ *ω ist σ-additiv.*

Lemma 2.9.9 *Für jedes endliche signierte Maß $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ist $\omega(\emptyset) = 0$.*

Beweis. Sei $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein endliches signiertes Maß. Dann gilt

$$\omega(\emptyset) = \omega\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \emptyset\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega(\emptyset) \ .$$

Da $-\infty < \omega(\emptyset) < +\infty$, folgt $\omega(\emptyset) = 0$. $\square$

Beispiel 2.9.10 Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar bezüglich des Maßes $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$. Dann definiert

$$\omega_f(A) := \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$

ein endliches signiertes Maß $\omega_f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. $\square$

Satz 2.9.11 (Hahnscher Zerlegungssatz) *Sei $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein endliches signiertes Maß. Dann existieren Mengen $A^+, A^- \in \mathcal{A}$ mit folgenden Eigenschaften.*

(a) *$A^+ \cap A^- = \emptyset$ und $A^+ \cup A^- = X$.*

(b) *Für alle $A \in \mathcal{A}$ ist $\omega(A \cap A^+) \geq 0$ und $\omega(A \cap A^-) \leq 0$.* $\square$

Satz 2.9.12 (Jordanscher Zerlegungssatz) *Sei $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein endliches signiertes Maß. Dann existieren endliche Maße $\omega^+, \omega^- : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ mit*

$$\omega(A) = \omega^+(A) - \omega^-(A) \quad \textit{für alle} \quad A \in \mathcal{A} \ .$$

Beweis. Seien A^+ und A^- wie in Satz 2.9.11. Wir definieren $\omega^+, \omega^- : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ durch

$$\omega^+(A) := \omega(A \cap A^+) \quad \text{und} \quad \omega^-(A) := -\omega(A \cap A^-) \ .$$

Dann sind ω^+ und ω^- offensichtlich endliche Maße und für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\omega(A) = \omega\big((A \cap A^+) \cup (A \cap A^-)\big) = \omega(A \cap A^+) + \omega(A \cap A^-) = \omega^+(A) - \omega^-(A) \ .$$

$\square$

Bemerkung 2.9.13 Eine Zerlegung (A^+, A^-) wie in Satz 2.9.11 wird **Hahn-Zerlegung** des endlichen signierten Maßes ω genannt. Eine solche Zerlegung ist i.allg. nicht eindeutig. Ist nämlich $B \in \mathcal{A}$ und gilt $\omega(B) = 0$, so ist mit (A^+, A^-) auch $(A^+ \cup B, A^- \setminus B)$ eine Hahn–Zerlegung von ω. Hingegen ist die in Satz 2.9.12 angegebene Aufspaltung $\omega = \omega^+ - \omega^-$ eindeutig bestimmt. Diese Aufspaltung wird **Jordan-Zerlegung** von ω genannt. $\square$

Definition 2.9.14 *Sei $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein endliches signiertes Maß und sei $\omega = \omega^+ - \omega^-$ die Jordan-Zerlegung von ω. Dann wird $|\omega| := \omega^+ + \omega^- : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ die* **Variation** *von ω genannt.*

Offensichtlich gilt:

Lemma 2.9.15 *Die Variation* $|\omega| : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ *eines endlichen signierten Maßes* $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *ist ein endliches Maß.* $\square$

Bemerkung 2.9.16 Für ein endliches signiertes Maß $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ und ein $A \in \mathcal{A}$ sind $|\omega(A)|$ und $|\omega|(A)$ i.allg. unterschiedliche Zahlen. Es gilt aber $|\omega(A)| \leq |\omega|(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. $\square$

Beispiel 2.9.17 Seien f und ω_f wie in Beispiel 2.9.10. Dann bilden die Mengen

$$A_f^+ := \{x \in X : f(x) \geq 0\} \quad \text{und} \quad A_f^- := \{x \in X : f(x) < 0\}$$

eine Hahn-Zerlegung von ω_f. Die Jordan-Zerlegung von $\omega_f = \omega_f^+ - \omega_f^-$ und die Variation $|\omega_f|$ von ω_f sind folglich durch

$$\omega_f^+(A) = \int_A f^+ \,\mathrm{d}\mu\,, \quad \omega_f^-(A) = \int_A f^- \,\mathrm{d}\mu \quad \text{und} \quad |\omega_f|(A) = \int_A |f| \,\mathrm{d}\mu$$

gegeben. $\square$

Beweis von Lemma 2.9.3. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\omega_k := \nu - \frac{1}{k}\mu$ ein endliches signiertes Maß. Sei (A_k^+, A_k^-) eine Hahn-Zerlegung von ω_k. Dann haben wir

$$\nu(A) \geq \frac{1}{k}\mu(A) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{A} \text{ mit } A \subseteq A_k^+$$

und

$$\nu(A) \leq \frac{1}{k}\mu(A) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{A} \text{ mit } A \subseteq A_k^-\,.$$

Sei $B := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^-$. Dann ist $B \in \mathcal{A}$ und es gilt $\nu(B) \leq \frac{1}{k}\mu(B)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h. $\nu(B) = 0$. Da $\nu(X) > 0$, folgt $\nu(X \setminus B) > 0$. Wegen

$$X \setminus B = X \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^- = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus A_k^-) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^+$$

gibt es somit ein $l \in \mathbb{N}$ mit $\nu(A_l^+) > 0$. Da $\nu \ll \mu$, ist dann auch $\mu(A_l^+) > 0$. Wir setzen $f := \frac{1}{l}\chi_{A_l^+}$. Offensichtlich ist f nichtnegativ und messbar. Weiter haben wir

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{l}\mu(A_l^+) > 0$$

und

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{l}\mu(A \cap A_l^+) \leq \nu(A \cap A_l^+) \leq \nu(A)$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. $\square$

Im Rest dieses Abschnitt geht es um eine Version des Satzes von Radon–Nikodym für endliche signierte Maße. Dazu verallgemeinern wir die Definition 2.9.1.

Definition 2.9.18 *Ein endliches signiertes Maß* $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *heißt* **absolut stetig** *bezüglich des Maßes* μ *(in Zeichen:* $\omega \ll \mu$*)* $:\Longleftrightarrow$ *Für jedes* $A \in \mathcal{A}$ *mit* $\mu(A) = 0$ *gilt auch* $\omega(A) = 0$.

Beispiel 2.9.19 Seien f und ω_f wie in Beispiel 2.9.10. Dann gilt $\omega_f \ll \mu$. $\square$

Lemma 2.9.20 *Sei $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein endliches signiertes Maß und sei $\omega = \omega^+ - \omega^-$ die Jordan-Zerlegung von ω. Gilt $\omega \ll \mu$, so gilt auch $\omega^+ \ll \mu$, $\omega^- \ll \mu$ und $|\omega| \ll \mu$.*

Beweis. Gelte $\omega \ll \mu$, sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ und sei (A^+, A^-) eine Hahn-Zerlegung von ω. Dann ist auch $\mu(A \cap A^+) = 0$ und $\mu(A \cap A^+) = 0$. Wegen $\omega \ll \mu$ folgt

$$\omega^+(A) = \omega(A \cap A^+) = 0 \quad \text{und} \quad \omega^-(A) = \omega(A \cap A^-) = 0 \, .$$

Damit ist auch

$$|\omega|(A) = \omega^+(A) + \omega^-(A) = 0 \, .$$

□

Satz 2.9.21 *Sei das Maß μ σ-endlich und sei $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein endliches signiertes Maß mit $\omega \ll \mu$. Dann existiert eine bezüglich μ integrierbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit*

$$\omega(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu \quad \textit{für alle} \quad A \in \mathcal{A} \, .$$

Ist $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine bezüglich μ integrierbare Funktion mit $\omega(A) = \int_A g \, \mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$, so sind g und f bezüglich μ äquivalent.

Beweis. Man benutze Lemma 2.9.20 und wende Satz 2.9.4 auf ω^+ und ω^- an. □

Wir bemerken noch, dass man auch bezüglich endlicher signierte Maße integrieren kann und zwar folgendermaßen.

Definition 2.9.22 *Sei $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein endliches signiertes Maß und sei $\omega = \omega^+ - \omega^-$ die Jordan-Zerlegung von ω. Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt* **integrierbar bezüglich** *ω $:\Longleftrightarrow$ f ist bezüglich ω^+ und ω^- integrierbar. Es wird dann*

$$\int f \, \mathrm{d}\omega := \int f \, \mathrm{d}\omega^+ - \int f \, \mathrm{d}\omega^-$$

gesetzt.

2.10 Transformation von Integralen

Im folgenden sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra über Y und $\Phi : X \to Y$ eine $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbare Abbildung. Wir definieren $\Phi_*\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ durch

$$(\Phi_*\mu)(B) = \mu\left(\Phi^{-1}(B)\right) \, .$$

Man überprüft leicht:

Lemma 2.10.1 (i) *Die Funktion $\Phi_*\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ ist ein Maß.*

(ii) *Ist μ σ-endlich, so ist auch $\Phi_*\mu$ σ-endlich.* □

Satz 2.10.2 *Sei $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ bezüglich $\Phi_*\mu$ integrierbar. Dann ist $g \circ \Phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ bezüglich μ integrierbar und*

$$\int g \, \mathrm{d}(\Phi_*\mu) = \int g \circ \Phi \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Beweis. Die Behauptung gilt für den Fall, dass g eine charakteristische Funktion ist. Ist nämlich $B \in \mathcal{B}$, so ist $\chi_B \circ \Phi = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$ und

$$\int \chi_B \,\mathrm{d}(\Phi_*\mu) = (\Phi_*\mu)(B) = \mu\left(\Phi^{-1}(B)\right) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \mathrm{d}\mu = \int \chi_B \circ \Phi \,\mathrm{d}\mu \,.$$

Folglich gilt die Behauptung auch für den Fall, dass g eine einfache Funktion ist. Hieraus erhält man mit Hilfe von Satz 2.6.1 wie im Beweis von Satz 2.9.7 die Behauptung für nichtnegative und damit schließlich auch für beliebige Funktionen g. $\square$

Folgerung 2.10.3 *Sei $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ bezüglich $\Phi_*\mu$ integrierbar. Dann gilt*

$$\int_B g \,\mathrm{d}(\Phi_*\mu) = \int_{\Phi^{-1}(B)} g \circ \Phi \,\mathrm{d}\mu \quad \textit{für alle} \quad B \in \mathcal{B} \,.$$

Beweis. Sei $B \in \mathcal{B}$. Nach Satz 2.10.2 und wegen $\chi_B \circ \Phi = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$ haben wir

$$\begin{aligned}\int_B g \,\mathrm{d}(\Phi_*\mu) &= \int \chi_B \cdot g \,\mathrm{d}(\Phi_*\mu) \\ &= \int (\chi_B \circ \Phi) \cdot (g \circ \Phi) \,\mathrm{d}\mu = \int \chi_{\Phi^{-1}(B)} \cdot (g \circ \Phi) \,\mathrm{d}\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} g \circ \Phi \,\mathrm{d}\mu \,.\end{aligned}$$

$\square$

Folgerung 2.10.4 *Sei $\nu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ ein Maß mit $\Phi_*\mu \ll \nu$ und seien μ und ν σ-endlich. Ist dann $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ bezüglich $\Phi_*\mu$ integrierbar, so gilt*

$$\int_B \left(g \cdot \frac{\mathrm{d}(\Phi_*\mu)}{\mathrm{d}\nu} \right) \mathrm{d}\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} g \circ \Phi \,\mathrm{d}\mu \quad \textit{für alle} \quad B \in \mathcal{B} \,.$$

Beweis. Dies ist eine Konsequenz von Satz 2.9.7 und Folgerung 2.10.3. $\square$

Im Rest dieses Abschnittes wollen wir die obigen Überlegungen auf das Lebesgue-Maß anwenden.

Im folgenden:

$\mu_L : \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ Lebesgue-Maß, $\mu_L^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ äußeres Lebesgue-Maß
$N \subseteq \mathbb{R}^n$ **Nullmenge** $:\Longleftrightarrow$ N Lebesguesche Nullmenge, d.h. $\mu_L^*(N) = 0$
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer

Lemma 2.10.5 *Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, so existieren eine Nullmenge N und kompakte Mengen $K_1, K_2, \ldots$ mit $A = N \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$.*

Beweis. Übung. $\square$

Satz 2.10.6 *Sei $\Psi : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und gelte: Ist $M \subseteq U$ eine Nullmenge, so ist auch $\Psi(M)$ eine Nullmenge. Behauptung: Ist $A \subseteq U$ Lebesgue-messbar, so auch auch $\Psi(A)$.*

Beweis. Sei $A \subseteq U$ Lebesgue-messbar. Dann existieren nach Lemma 2.10.5 eine Nullmenge $N \subseteq U$ und kompakte Mengen $K_1, K_2, \ldots \subseteq U$ mit $A = N \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Da Ψ stetig ist, sind die Mengen $\Psi(K_i)$ ebenfalls kompakt, also insbesondere abgeschlossen und damit als Borel-Mengen Lebesgue-messbar. Desweiteren ist $\Psi(N)$ nach Voraussetzung eine Nullmenge und damit insbesondere Lebesgue-messbar. Folglich ist auch $\Psi(A) = \Psi(N) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \Psi(K_i)$ Lebesgue-messbar. $\square$

Satz 2.10.7 *Sei $\Psi : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Behauptung: Ist $M \subseteq U$ eine Nullmenge, so auch $\Psi(M)$.*

Beweis. Es ist $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ für gewisse abgeschlossene Kugeln $K_1, K_2, \ldots$. Genügt zu zeigen, dass $M \cap K_i$ Nullmenge ist. O.B.d.A. gibt es somit eine abgeschlossene Kugel K mit $M \subseteq K \subseteq U$. Sei $c > 0$ derart, dass

$$\left| \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_l}(x) \right| \leq c \quad \text{für alle} \quad x \in K \text{ und } k, l = 1, \ldots, n \, .$$

Sei $Q \subseteq K$ ein halboffener Quader und seien $x, x' \in Q$. Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\Psi_k(x) - \Psi_k(x') = \mathrm{D}\Psi_k(\xi)(x - x') = \langle \operatorname{grad}(\Psi_k)(\xi), x - x' \rangle$$

für ein $\xi \in K$. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$|\Psi_k(x) - \Psi_k(x')| \leq \| \operatorname{grad}(\Psi_k)(\xi)\| \cdot \|x - x'\| \leq \sqrt{n} c \, \|x - x'\| \, .$$

Also gilt

$$\|\Psi(x) - \Psi(x')\| \leq nc \, \|x - x'\| \quad \text{für alle} \quad x, x' \in Q \, .$$

Demnach ist $\Psi(Q)$ in einem halboffenen Quader enthalten, dessen Kantenlängen das nc-Fache der Kantenlängen von Q sind. Nach Definition der äußeren Lebesgueschen Maßes ergibt sich $\mu_L^*(\Psi(M)) \leq nc \, \mu_L^*(M)$. Da $\mu_L^*(M) = 0$, folgt $\mu_L^*(\Psi(M)) = 0$. ☐

Folgerung 2.10.8 *Sei $\Psi : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Behauptung: Ist $A \subseteq U$ Lebesgue-messbar, so auch $\Psi(A)$.*

Beweis. Das folgt aus den Sätzen 2.10.6 und 2.10.7. ☐

Betrachten jetzt:
$U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ C^1-Diffeomorphismus
μ_L^U Lebesgue-Maß auf U, d.h. die Einschränkung von μ_L auf $\mathcal{A}_L(U) := \{A \in \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n) : A \subseteq U\}$, genauso $\mu_L^V : \mathcal{A}_L(V) \to [0, +\infty]$

Folgerung 2.10.9 (i) *$\Phi^{-1} : V \to U$ ist $(\mathcal{A}_L(V), \mathcal{A}_L(U))$-messbar.*

(ii) *$\Phi_*^{-1}\mu_L^V : \mathcal{A}_L(U) \to [0, +\infty]$ ist absolut stetig bezüglich μ_L^U.*

Beweis. Folgerung 2.10.8 liefert die Behauptung (i), Satz 2.10.7 die Behauptung (ii). ☐

Also existiert die Radon-Nikodym-Ableitung von $\Phi_*^{-1}\mu_L^V$ nach μ_L^U.

Satz 2.10.10 *Es ist*

$$\frac{\mathrm{d}\left(\Phi_*^{-1}\mu_L^V\right)}{\mathrm{d}\mu_L^U} = |\det(\mathrm{D}\Phi)| \, ,$$

d.h.

$$\mu_L(\Phi(A)) = \int_A |\det(\mathrm{D}\Phi)| \, \mathrm{d}\mu_L \quad \textit{für alle} \quad A \in \mathcal{A}_L(U) \, .$$

Zum Beweis von Satz 2.10.10 benutzen wir

Lemma 2.10.11 *Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear, sei $v \in \mathbb{R}^n$ und sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $F(x) := L(x) + v$ definiert. Dann gilt $\mu_L(F(Q)) = |\det(L)| \cdot \mu_L(Q)$ für alle halboffenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Da μ_L translationsinvariant ist, genügt es $\mu_L(L(Q)) = |\det(L)| \cdot \mu_L(Q)$ zu zeigen. Dies kann man elementar nachrechnen. $\square$

Beweis von Satz 2.10.10. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sei $\|x\|_\infty := \max_k |x_k|$. Dann ist $\| \ \|_\infty$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wir versehen $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit der zugehörigen Operatornorm, welche wir auch mit $\| \ \|_\infty$ bezeichnen.

Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ ein halboffener Würfel, d.h. ein halboffener Quader, dessen Kantenlängen alle gleich sind, und gelte $\overline{W} \subseteq U$. Wir zeigen:

$$\mu_L(\Phi(W)) \leq \int_W |\det(\mathrm{D}\Phi)| \, \mathrm{d}\mu_L \, .$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da $\mathrm{D}\Phi : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $x \in U \mapsto \left\|\mathrm{D}\left(\Phi^{-1}\right)(\Phi(x))\right\|_\infty \in \mathbb{R}$ stetig und $\overline{W}$ und $\Phi\left(\overline{W}\right)$ kompakt sind, existieren $\delta > 0$ und $c > 0$ mit

$$\|\mathrm{D}\Phi(x) - \mathrm{D}\Phi(x')\| \leq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x, x' \in \overline{W} \text{ mit } \|x - x'\| < \delta$$

(Eine stetige Abbildung ist auf Kompaktum gleichmäßig stetig.) und

$$\left\|\mathrm{D}\left(\Phi^{-1}\right)(\Phi(x))\right\|_\infty \leq c \quad \text{für alle} \quad x \in \overline{W} \, .$$

Unterteile W in halboffene Würfel $W_1, \ldots, W_m$ mit Kantenlänge $\alpha < \delta$, wähle $z_k \in \overline{W_k}$ mit

$$|\det(\mathrm{D}\Phi(z_k))| \leq |\det(\mathrm{D}\Phi(x))| \quad \text{für alle} \quad x \in \overline{W_k}$$

und definiere $F_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $F_k(x) := \Phi(z_k) + \mathrm{D}\Phi(z_k)(x - z_k)$. Sei $x \in \overline{W_k}$. Da

$$\|tx + (1-t)z_k - z_k\|_\infty = |t| \cdot \|x - z_k\|_\infty \leq \alpha < \delta \quad \text{für} \quad t \in [0,1] \, ,$$

ist dann

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x) - F_k(x)\|_\infty &= \|\Phi(x) - \Phi(z_k) - \mathrm{D}\Phi(z_k)(x - z_k)\|_\infty \\
&= \left\| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(tx + (1-t)z_k) \, \mathrm{d}t - \mathrm{D}\Phi(z_k)(x - z_k) \right\|_\infty \\
&= \left\| \int_0^1 \mathrm{D}\Phi(tx + (1-t)z_k)(x - z_k) \, \mathrm{d}t - \mathrm{D}\Phi(z_k)(x - z_k) \right\|_\infty \\
&= \left\| \int_0^1 (\mathrm{D}\Phi(tx + (1-t)z_k) - \mathrm{D}\Phi(z_k))(x - z_k) \, \mathrm{d}t \right\|_\infty \\
&\leq \int_0^1 \|(\mathrm{D}\Phi(tx + (1-t)z_k) - \mathrm{D}\Phi(z_k))(x - z_k)\|_\infty \, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \|\mathrm{D}\Phi(tx + (1-t)z_k) - \mathrm{D}\Phi(z_k)\|_\infty \cdot \|x - z_k\|_\infty \, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \varepsilon \, \|x - z_k\|_\infty \, \mathrm{d}t \\
&\leq \varepsilon\alpha \, .
\end{aligned}$$

Folglich: $\Phi(\overline{W_k}) \subseteq \overline{B}_{\varepsilon\alpha}(F_k(\overline{W_k})) := \{y \in \mathbb{R}^n : \text{es existiert ein } y' \in F_k(\overline{W_k}) \text{ mit } \|y - y'\|_\infty \leq \varepsilon\alpha\}$.

Seien $y, z \in \overline{B}_{\varepsilon\alpha}(F_k(\overline{W_k}))$ und seien $y', z' \in F_k(\overline{W_k})$ derart, dass $\|y - y'\|_\infty \leq \varepsilon\alpha$ und $\|z - z'\|_\infty \leq \varepsilon\alpha$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\left\|F_k^{-1}(y) - F_k^{-1}(y')\right\|_\infty = \left\|(\mathrm{D}\Phi(z_k))^{-1}(y - y')\right\|_\infty &= \left\|\mathrm{D}\left(\Phi^{-1}\right)(\Phi(z_k))(y - y')\right\|_\infty \\
&\leq \left\|\mathrm{D}\left(\Phi^{-1}\right)(\Phi(z_k))\right\|_\infty \cdot \|y - y'\|_\infty \leq c\varepsilon\alpha
\end{aligned}$$

und genauso $\left\|F_k^{-1}(z) - F_k^{-1}(z')\right\|_\infty \leq c\varepsilon\alpha$. Da $F_k^{-1}(y'), F_k^{-1}(z') \in \overline{W_k}$, haben wir außerdem $\left\|F_k^{-1}(y') - F_k^{-1}(z')\right\|_\infty \leq \alpha$. Es folgt $\left\|F_k^{-1}(y) - F_k^{-1}(z)\right\|_\infty \leq (1+2c\varepsilon)\alpha$. Somit gibt es einen halboffenen Würfel W_k' der Kantenlänge $(1+3c\varepsilon)\alpha$ mit $F_k^{-1}(\overline{B}_{\varepsilon\alpha}(F_k(\overline{W_k}))) \subseteq W_k'$, also mit $\overline{B}_{\varepsilon\alpha}(F_k(\overline{W_k})) \subseteq F_k(W_k')$. Dann gilt auch $\Phi(W_k) \subseteq F_k(W_k')$. Wir schließen mit Lemma 2.10.11

$$\begin{aligned} \mu_L(\Phi(W_k)) &\leq \mu_L(F_k(W_k')) = |\det(\mathrm{D}\Phi(z_k))| \cdot \mu_L(W_k') = |\det(\mathrm{D}\Phi(z_k))|(1+3c\varepsilon)^n\alpha^n \\ &= (1+3c\varepsilon)^n |\det(\mathrm{D}\Phi(z_k))| \mu_L(W_k) \leq (1+3c\varepsilon)^n \int_{W_k} |\det(\mathrm{D}\Phi)| \,\mathrm{d}\mu_L \ . \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \mu_L(\Phi(W)) = \sum_{k=1}^m \mu_L(\Phi(W_k)) &\leq (1+3c\varepsilon)^n \sum_{k=1}^m \int_{W_k} |\det(\mathrm{D}\Phi)| \,\mathrm{d}\mu_L \\ &= (1+3c\varepsilon)^n \int_W |\det(\mathrm{D}\Phi)| \,\mathrm{d}\mu_L \ . \end{aligned}$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt

$$\mu_L(\Phi(W)) \leq \int_W |\det(\mathrm{D}\Phi)| \,\mathrm{d}\mu_L \ .$$

Sei nun $Q \subseteq Q$ ein halboffener Quader. Dann ist Q die disjunkte Vereinigung von höchstens abzählbar vielen halboffenen Würfeln W mit $\overline{W} \subseteq U$. Folglich gilt auch

$$\mu_L(\Phi(Q)) \leq \int_Q |\det(\mathrm{D}\Phi)| \,\mathrm{d}\mu_L \ .$$

Dies impliziert nach Definition von μ_L, dass

$$\mu_L(\Phi(A)) \leq \int_A |\det(\mathrm{D}\Phi)| \,\mathrm{d}\mu_L \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{A}_L(U) \ .$$

Indem wir Φ durch Φ^{-1} ersetzen, sehen wir, dass

$$\mu_L\left(\Phi^{-1}(B)\right) \leq \int_B \left|\det\left(\mathrm{D}\left(\Phi^{-1}\right)\right)\right| \,\mathrm{d}\mu_L \quad \text{für alle} \quad B \in \mathcal{A}_L(V) \ .$$

Für $B \in \mathcal{A}_L(V)$ gilt also

$$\begin{aligned} \int \chi_B \,\mathrm{d}\left(\Phi_*\mu_L^U\right) = (\Phi_*\mu_L^V)(B) = \mu_L\left(\Phi^{-1}(B)\right) &\leq \int_B \left|\det\left(\mathrm{D}\left(\Phi^{-1}\right)\right)\right| \,\mathrm{d}\mu_L \\ &= \int \chi_B \cdot \left|\det\left(\mathrm{D}\left(\Phi^{-1}\right)\right)\right| \,\mathrm{d}\mu_L^V \ . \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich in üblicher Weise, dass für jede nichtnegative messbare Funktion $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$

$$\int f \,\mathrm{d}\left(\Phi_*\mu_L^U\right) \leq \int f \cdot \left|\det\left(\mathrm{D}\left(\Phi^{-1}\right)\right)\right| \,\mathrm{d}\mu_L^V \ .$$

Nutzen wir nun noch Folgerung 2.10.3, so erhalten wir für $A \in \mathcal{A}_L(U)$

$$\begin{aligned} \mu_L(\Phi(A)) &\leq \int_A |\det(\mathrm{D}\Phi)| \,\mathrm{d}\mu_L \\ &= \int_{\Phi^{-1}(\Phi(A))} |\det(\mathrm{D}\Phi)| \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \,\mathrm{d}\mu_L^U \\ &= \int_{\Phi(A)} |\det(\mathrm{D}\Phi)| \circ \Phi^{-1} \,\mathrm{d}\left(\Phi_*\mu_L^U\right) \\ &\leq \int_{\Phi(A)} \left(|\det(\mathrm{D}\Phi)| \circ \Phi^{-1}\right) \cdot \left|\det\left(\mathrm{D}\left(\Phi^{-1}\right)\right)\right| \,\mathrm{d}\mu_L^V \\ &= \int_{\Phi(A)} \mathrm{d}\mu_L = \mu_L(\Phi(A)) \end{aligned}$$

und somit

$$\mu_L(\Phi(A)) = \int_A |\det(\mathrm{D}\Phi)| \,\mathrm{d}\mu_L \ .$$

□

Satz 2.10.12 *Sei $g : V \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbar. Dann gilt*

$$\int_{\Phi(A)} g \,\mathrm{d}\mu_L = \int_A (g \circ \Phi) \cdot |\det(\mathrm{D}\Phi)| \,\mathrm{d}\mu_L \quad \textit{für alle} \quad A \in \mathcal{A}_L(U) \ .$$

Beweis. Wir benutzen Folgerung 2.10.4 und Satz 2.10.10 und schließen

$$\begin{aligned}\int_{\Phi(A)} g \,\mathrm{d}\mu_L = \int_{\Phi(A)} (g \circ \Phi) \circ \Phi^{-1} \,\mathrm{d}\mu_L^V &= \int_A (g \circ \Phi) \cdot \frac{\mathrm{d}\left(\Phi_*^{-1}\mu_L^V\right)}{\mathrm{d}\mu_L^U} \,\mathrm{d}\mu_L^U \\ &= \int_A (g \circ \Phi) \cdot |\det(\mathrm{D}\Phi)| \,\mathrm{d}\mu_L \ .\end{aligned}$$

□

Beispiel 2.10.13 Berechnung von $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2\right) \,\mathrm{d}x$ □

Beispiel 2.10.14 Berechnung des Flächeninhaltes von $D_r := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq r\right\}$ □

Beispiel 2.10.15 Berechnung von $\int_{D_r} \|x\|^2 \,\mathrm{d}\mu_L(x)$ □

2.11 Flächenintegrale

Definition 2.11.1 *Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und sei $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : U \to \mathbb{R}^3$ eine injektive stetig differenzierbare Abbildung mit*

$$\mathrm{rg}(\mathrm{D}\psi(x)) = 2 \quad \textit{für alle} \quad x \in U \ . \tag{2.11.1}$$

Dann nennen wir die Menge $\Omega := \psi(U)$ eine **Fläche** *im $\mathbb{R}^3$ und ψ eine* **Parametrisierung** *von Ω.*

Bekanntlich bedeutet (2.11.1), dass die Vektoren

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x) = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x), \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}(x), \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}(x)\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x) = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}(x), \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}(x), \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2}(x)\right)$$

für jedes $x \in U$ linear unabhängig sind.

Beispiel 2.11.2 Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und sei $h : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir definieren $\psi : U \to \mathbb{R}^3$ durch $\psi(x_1, x_2) := (x_1, x_2, h(x_1, x_2))$. Offensichtlich ist ψ injektiv und stetig differenzierbar. Außerdem gilt

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial x_1}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial x_2}\right) \ .$$

Also ist der Graph$(h) = \psi(U)$ eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ und ψ ist eine Parametrisierung dieser Fläche. Eine solche Parametrisierung wird auch **explizite Darstellung** der Fläche genannt. □

Beispiel 2.11.3 Sei $r > 0$ und sei $S_r^2 := \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 : \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = r^2\}$. Dann ist die durch

$$\psi(x_1, x_2) := (r\cos(x_1)\cos(x_2), r\sin(x_1)\cos(x_2), r\sin(x_2))$$

definierte Abbildung $\psi :]0, 2\pi[\times]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung von $S_r^2 \setminus K_r$, wobei $K_r := \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in S_r^2 : \xi_1 \geq 0 \text{ und } \xi_2 = 0\}$. $\square$

Sei im folgenden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit Parametrisierung $\psi : U \to \mathbb{R}^3$ und seien $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$, und $G : U \to \mathbb{R}$ durch

$$g_{ij}(x) := \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(u) \right\rangle \quad \text{und} \quad G(x) := \det \begin{pmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) \end{pmatrix}$$

definiert.

Lemma 2.11.4 *Für alle $x \in U$ ist $G(x) > 0$.*

Beweis. Es ist

$$G = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right\rangle^2 .$$

Somit folgt die Behauptung aus der Schwarzschen Ungleichung. $\square$

Sei $\tilde{\psi} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ eine weitere Parametrisierung von Ω und seien $\tilde{g}_{ij} : \tilde{U} \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$, und $\tilde{G} : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{g}_{ij}(y) := \left\langle \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y_i}(y), \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y_j}(y) \right\rangle \quad \text{und} \quad \tilde{G}(y) := \det \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11}(y) & \tilde{g}_{12}(y) \\ \tilde{g}_{21}(y) & \tilde{g}_{22}(y) \end{pmatrix}$$

gegeben. Desweiteren sei $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : U \to \tilde{U}$ durch $\psi = \tilde{\psi} \circ \Phi$ bestimmt.

Lemma 2.11.5 (i) *Die Abbildung Φ ist ein Diffeomorphismus.*

(ii) *Ist $B \subseteq \Omega$ und ist $\psi^{-1}(B)$ Lebesgue-messbar, so ist auch $\tilde{\psi}^{-1}(B)$ Lebesgue-messbar.*

(iii) *Für alle $x \in U$ ist $G(x) = \tilde{G}(\Phi(x)) \cdot (\det(\mathrm{D}\Phi(x)))^2$.*

Beweis. (i) Man wende den Satz über implizite Funktionen an. Vgl. Walter, Analysis II, Abschnitt 8.3.

(ii) Das ergibt sich aus $\tilde{\psi}^{-1}(B) = \Phi\left(\psi^{-1}(B)\right)$ und Folgerung 2.10.8.

(iii) Wegen $\psi = \tilde{\psi} \circ \Phi$ ist

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y_k}(\Phi(x)) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}(x)$$

Somit gilt

$$g_{ij}(x) = \sum_{k,l=1}^{2} \left\langle \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y_k}(\Phi(x)) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y_l}(\Phi(x)) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j}(x) \right\rangle = \sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}(x)\, \tilde{g}_{kl}(\Phi(x)) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j}(x)$$

für $i, j = 1, 2$, d.h.

$$\begin{pmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x) \right)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11}(\Phi(x)) & \tilde{g}_{12}(\Phi(x)) \\ \tilde{g}_{21}(\Phi(x)) & \tilde{g}_{22}(\Phi(x)) \end{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x) .$$

Hieraus folgt die Behauptung. $\square$

Die folgende Definition hängt nach Lemma 2.11.5(ii) nicht von der Wahl der Parametrisierung ψ ab.

Definition 2.11.6 *Eine Menge $B \subseteq \Omega$ heißt* **messbar** $:\iff \psi^{-1}(B)$ *ist Lebesgue-messbar.*

Lemma 2.11.7 *Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und sei $B \subseteq \Omega$ messbar. Dann ist*

$$\int_{\psi^{-1}(B)} (f \circ \psi) \cdot \sqrt{G} \, \mathrm{d}\mu_L = \int_{\tilde{\psi}^{-1}(B)} (f \circ \tilde{\psi}) \cdot \sqrt{\tilde{G}} \, \mathrm{d}\mu_L \ ,$$

wobei die Existenz eines der Integrale die Existenz des anderen impliziert.

Beweis. Wir wenden Satz 2.10.12 und Lemma 2.11.5(iii) an und schließen

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\psi}^{-1}(B)} (f \circ \tilde{\psi}) \cdot \sqrt{\tilde{G}} \, \mathrm{d}\mu_L &= \int_{\Phi(\psi^{-1}(B))} (f \circ \tilde{\psi}) \cdot \sqrt{\tilde{G}} \, \mathrm{d}\mu_L \\ &= \int_{\psi^{-1}(B)} (f \circ \tilde{\psi} \circ \Phi) \cdot \sqrt{\tilde{G} \circ \Phi} \cdot |\det(\mathrm{D}\Phi)| \, \mathrm{d}\mu_L \\ &= \int_{\psi^{-1}(B)} (f \circ \psi) \cdot \sqrt{G} \, \mathrm{d}\mu_L \ . \end{aligned}$$

□

Lemma 2.11.7 zeigt, dass auch die folgende Definition nicht von der Wahl der Parametrisierung ψ abhängt.

Definition 2.11.8 *Für eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und eine messbare Menge $B \subseteq \Omega$ sei*

$$\int_B f \, \mathrm{d}\Omega := \int_{\psi^{-1}(B)} (f \circ \psi) \cdot \sqrt{G} \, \mathrm{d}\mu_L \ ,$$

vorausgesetzt das Integral auf der rechten Seite existiert.

Beispiel 2.11.9 Sei $\Omega = \mathrm{Graph}(h)$ für $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2) := \cosh(x_2)$, sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1$ definiert und sei $B := \{(x_1, x_2, \cosh(x_2)) : 0 \le x_1 \le 1 \text{ und } 0 \le x_2 \le 1\}$. Wir berechnen $\int_B f \, \mathrm{d}\Omega$. Dazu parametrisieren wir Ω durch $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\psi(x_1, x_2) := (x_1, x_2, \cosh(x_2))$. Dann ist

$$g_{11}(x_1, x_2) = 1 \ , \quad g_{12}(x_1, x_2) = g_{21}(x_1, x_2) = 0 \ , \quad g_{22}(x_1, x_2) = 1 + \sinh^2(x_2)$$

und somit

$$\sqrt{G(x_1, x_2)} = \sqrt{1 + \sinh^2(x_2)} = \cosh(x_2) \ .$$

Also ist

$$\int_B f \, \mathrm{d}\Omega = \int_{[0,1]\times[0,1]} x_1 \cosh(x_2) \, \mathrm{d}\mu_L(x_1, x_2) = \int_0^1 x_1 \, \mathrm{d}x_1 \cdot \int_0^1 \cosh(x_2) \, \mathrm{d}x_2 = \frac{\sinh(1)}{2} \ .$$

□

Der Fläche Ω können wir jetzt folgendermaßen einen Flächeninhalt zuordnen.

Definition 2.11.10 *Der* **Flächeninhalt** *von Ω ist*

$$\mathrm{vol}(\Omega) := \int_\Omega \mathrm{d}\Omega \ .$$

Im allgemeinen ist eine Fläche nicht durch eine einzige Parametrisierung darstellbar. In solchen Fällen zerlegt man die Fläche in geeignete Teilmengen, integriert über diese und addiert dann die Integrale auf. Dies soll anhand des nächsten Beispiels erläutert werden.

Beispiel 2.11.11 Sei $\sigma :]a,b[\to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und gelte $\sigma(t) > 0$ für alle $t \in]a,b[$. Dann heißt

$$\Omega := \left\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3 : \xi_3 \in]a,b[\text{ und } \xi_1^2+\xi_2^2 = \sigma(\xi_3)^2\right\}$$

die von σ erzeugte **Rotationsfläche**. Die Einschränkungen von

$$\psi : \mathbb{R} \times]a,b[\to \mathbb{R}^3 , \quad \psi(x_1,x_2) := (\cos(x_1)\sigma(x_2), \sin(x_1)\sigma(x_2), x_2) ,$$

auf $U_1 :=]0,2\pi[\times]a,b[$ und $U_2 :=]-\pi,\pi[\times]a,b[$ sind Parametrisierungen von $\psi(U_1)$ bzw. $\psi(U_2)$. Wir setzen

$$B_1 := \psi(]0,\pi] \times]a,b[) \subseteq \psi(U_1) \quad \text{und} \quad B_2 := \psi(]-\pi,0] \times]a,b[) \subseteq \psi(U_2)$$

Dann ist $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ und $B_1 \cup B_2 = \Omega$. Da

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x_1,x_2) = (-\sin(x_1)\sigma(x_2), \cos(x_1)\sigma(x_2), 0)$$

und

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x_1,x_2) = (\cos(x_1)\sigma'(x_2), \sin(x_1)\sigma'(x_2), 1) ,$$

ist

$$g_{11}(x_1,x_2) = \sigma(x_2)^2 , \quad g_{12}(x_1,x_2) = g_{21}(x_1,x_2) = 0 , \quad g_{22}(x_1,x_2) = 1 + \sigma'(x_2)^2$$

und somit

$$\sqrt{G(x_1,x_2)} = \sigma(x_2)\sqrt{1+\sigma'(x_2)^2} .$$

Insgesamt erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(\Omega) = \int_{B_1} \mathrm{d}\Omega + \int_{B_2} \mathrm{d}\Omega &= \int_{]-\pi,\pi]\times]a,b[} \sigma(x_2)\sqrt{1+\sigma'(x_2)^2}\,\mathrm{d}\mu_L(x_1,x_2) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x_1 \cdot \int_a^b \sigma(x_2)\sqrt{1+\sigma'(x_2)^2}\,\mathrm{d}x_2 \\
&= 2\pi \int_a^b \sigma(t)\sqrt{1+\sigma'(t)^2}\,\mathrm{d}t .
\end{aligned}$$

Ist z.B. $a = 0$, $b = 1$ und $\sigma(t) := t$, so ist $\operatorname{vol}(\Omega) = \sqrt{2}\,\pi$. □

Wir wollen jetzt noch ein weiteres Flächenintegral einführen. Dazu benötigen wir den Begriff der Orientierung.

Definition 2.11.12 *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche und sei $\psi : U \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung von Ω.*

(i) *Eine Parametrisierung $\tilde\psi : \tilde U \to \mathbb{R}^3$ von Ω heißt* **äquivalent** *zu ψ :$\Longleftrightarrow$ Der durch $\psi = \tilde\psi \circ \Phi$ bestimmte Diffeomorphismus $\Phi : U \to \tilde U$ genügt der Bedingung*

$$\det(\mathrm{D}\Phi(x)) > 0 \quad \textit{für alle} \quad x \in U .$$

(ii) *Eine* **Orientierung** *von Ω ist eine Äquivalenzklasse von Parametrisierungen von Ω.*

(iii) *Ω heißt* **orientiert** :$\Longleftrightarrow$ *Es ist eine Orientierung von Ω fixiert.*

Sei in den nachstehenden Überlegungen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche und seien $\psi : U \to \mathbb{R}^3$ und $\tilde\psi : \tilde U \to \mathbb{R}^3$ zwei Parametrisierungen von Ω aus der fixierten Orientierung.

Lemma 2.11.13 *Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, sei $B \subseteq \Omega$ messbar und sei $1 \le i < j \le 3$. Dann ist*

$$\int_{\psi^{-1}(B)} (f \circ \psi) \cdot \det(\mathrm{D}(\psi_i, \psi_j))\, \mathrm{d}\mu_L = \int_{\tilde{\psi}^{-1}(B)} (f \circ \tilde{\psi}) \cdot \det(\mathrm{D}(\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j))\, \mathrm{d}\mu_L\ ,$$

wobei die Existenz eines der Integrale die Existenz des anderen impliziert.

Beweis. Sei wieder $\Phi : U \to \tilde{U}$ durch $\psi = \tilde{\psi} \circ \Phi$ bestimmt. Nach Voraussetzung ist $\det(\mathrm{D}\Phi) > 0$. Außerdem gilt nach Kettenregel

$$\mathrm{D}(\psi_i, \psi_j)(x) = \mathrm{D}(\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j)(\Phi(x)) \circ \mathrm{D}\Phi(x)\ .$$

Mit Satz 2.10.12 folgt

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{\psi}^{-1}(B)} (f \circ \tilde{\psi}) \cdot \det(\mathrm{D}(\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j))\, \mathrm{d}\mu_L &= \int_{\psi^{-1}(B)} (f \circ \psi) \cdot (\det(\mathrm{D}(\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j)) \circ \Phi) \cdot \det(\mathrm{D}\Phi)\, \mathrm{d}\mu_L \\ &= \int_{\psi^{-1}(B)} (f \circ \psi) \cdot \det(\mathrm{D}(\psi_i, \psi_j))\, \mathrm{d}\mu_L\ .\end{aligned}$$

□

Lemma 2.11.13 rechtfertigt

Definition 2.11.14 *Für eine Abbildung $F = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ und eine messbare Menge $B \subseteq \Omega$ sei*

$$\begin{aligned}\int_B *\langle F(\xi), \mathrm{d}\xi\rangle &:= \int_B (F_1(\xi)\, \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3 - F_2(\xi)\, \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_3 + F_3(\xi)\, \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2) \\ &:= \int_{\psi^{-1}(B)} ((F_1 \circ \psi) \cdot \det(\mathrm{D}(\psi_2, \psi_3)) - (F_2 \circ \psi) \cdot \det(\mathrm{D}(\psi_1, \psi_3)) \\ &\qquad\qquad + (F_3 \circ \psi) \cdot \det(\mathrm{D}(\psi_1, \psi_2))\, \mathrm{d}\mu_L\ ,\end{aligned}$$

vorausgesetzt das letzte Integral existiert.

Beispiel 2.11.15 Seien Ω, B und ψ wie in Beispiel 2.11.9 und sei Ω mit der durch ψ repräsentierten Orientierung versehen. Man berechnet, dass

$$\det(\mathrm{D}(\psi_1, \psi_2)(x_1, x_2)) = 1\ , \quad \det(\mathrm{D}(\psi_1, \psi_3)(x_1, x_2)) = \sinh(x_2)\ , \quad \det(\mathrm{D}(\psi_2, \psi_3)(x_1, x_2)) = 0\ .$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\int_B *\langle \xi, \mathrm{d}\xi\rangle &= \int_{[0,1]\times[0,1]} (-x_2 \sinh(x_2) + \cosh(x_2))\, \mathrm{d}\mu_L(x_1, x_2) \\ &= -\int_0^1 x_2 \sinh(x_2)\, \mathrm{d}x_2 + \int_0^1 \cosh(x_2)\, \mathrm{d}x_2 = -\cosh(1) + 2\sinh(1)\ .\end{aligned}$$

□

Sei $\mathfrak{n} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\mathfrak{n}(\psi(x)) = \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right\|^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\ .$$

Wie man leicht sieht, hängt die Definition von der Orientierung von Ω, nicht aber von der Wahl der Parametrisierung aus der Orientierung ab.

Definition 2.11.16 *Die Abbildung $\mathfrak{n} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ wird das* **Einheitsnormalenfeld** *von Ω genannt.*

Satz 2.11.17 *Für jede Abbildung $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ und jede messbare Menge $B \subseteq \Omega$ gilt*

$$\int_B *\langle F(\xi), \mathrm{d}\xi \rangle = \int_B \langle F, \mathfrak{n} \rangle \, \mathrm{d}\Omega \ .$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial x_2} &= \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_3}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right) \\
&= (\det(D(\psi_2, \psi_3)), -\det(D(\psi_1, \psi_3)), \det(D(\psi_1, \psi_2)) \ .
\end{aligned}$$

Da bekanntlich

$$\|v \times w\|^2 = \det \begin{pmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle w, v \rangle & \langle w, w \rangle \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad v, w \in \mathbb{R}^3 \ ,$$

haben wir weiter

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right\| = \sqrt{G} \ .$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\int_B \langle F, \mathfrak{n} \rangle \, \mathrm{d}\Omega &= \int_{\psi^{-1}(B)} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right\|^{-1} \left\langle F \circ \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right\rangle \sqrt{G} \, \mathrm{d}\mu_L \\
&= \int_{\psi^{-1}(B)} \left\langle F \circ \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right\rangle \mathrm{d}\mu_L \\
&= \int_B *\langle F(\xi), \mathrm{d}\xi \rangle \ .
\end{aligned}$$

□

Kann die Fläche Ω nicht durch eine einzige Parametrisierung beschrieben werden, so berechnet man $\int_B *\langle F(\xi), \mathrm{d}\xi \rangle$ wieder mittels einer geeigneten Zerlegung von Ω.

Wir betrachten jetzt folgende Situation. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine von einer Fläche Ω berandete offene beschränkte Menge. Zum Beispiel sei M eine offene Kugel. Sei Ω so orientiert, dass das Einheitsnormalenfeld $\mathfrak{n}$ von Ω nach außen gerichtet ist, d.h. zu jedem $\xi \in \Omega$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\xi + t\mathfrak{n}(\xi) \notin \Omega$ für alle $t \in]0, \varepsilon[$. Außerdem sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge mit $M \cup \Omega \subseteq V$. Ist F ein differenzierbares Vektorfeld auf V, d.h. eine differenzierbare Abbildung $F : V \to \mathbb{R}^3$, so bezeichne $\operatorname{div}(F)$ die Divergenz von F. Es ist also

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial F_3}{\partial \xi_3} : V \to \mathbb{R} \ .$$

Satz 2.11.18 (Gaussscher Satz im Raum) *Seien M, Ω und V wie oben angegeben. Für alle stetig differenzierbaren Vektorfelder F auf V gilt dann*

$$\int_\Omega *\langle F(\xi), \mathrm{d}\xi \rangle = \int_M \operatorname{div}(F) \, \mathrm{d}\mu_L \ .$$

Beweis. Vgl. Günther u.a., Grundkurs Analysis, Teil 3, Anschnitt 11.5.2. □

Satz 2.11.18 wird auch als **Satz von Gauss-Ostrogradski** zitiert.

Beispiel 2.11.19 Wir betrachten die offene Kugel $B_r^3 = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^3 : \|\xi\| = r \right\}$, $r > 0$, und das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(\xi) := \xi$. Da B_r^3 von S_r^2 berandet wird, gilt nach den Sätzen 2.11.17 und 2.11.18

$$\int_{S_r^2} \langle F, \mathfrak{n} \rangle \, \mathrm{d}S_r^2 = \int_{B_r^3} \operatorname{div}(F) \, \mathrm{d}\mu_L \ .$$

Da außerdem $\mathfrak{n}(\xi) = r^{-1}\xi$ und $\operatorname{div}(F)(\xi) = 3$, folgt

$$r \operatorname{vol}\left(S_r^2\right) = r \int_{S_r^2} \mathrm{d}S_r^2 = \int_{S_r^2} \langle F, \mathfrak{n} \rangle \, \mathrm{d}S_r^2 = \int_{B_r^3} \operatorname{div}(F) \, \mathrm{d}\mu_L = 3 \int_{B_r^3} \mathrm{d}\mu_L = 3 \operatorname{vol}\left(B_r^3\right) \; .$$

□

Wir erinnern daran, dass der Laplace-Operator $\Delta : C^2(V, \mathbb{R}) \to C^0(V, \mathbb{R})$ durch

$$\Delta(f) := \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_3^2}$$

definiert ist.

Satz 2.11.20 (Greensche Formel) *Seien M, Ω, V und $\mathfrak{n}$ wie oben beschrieben. Für alle $f_1 \in C^1(V, \mathbb{R})$ und alle $f_2 \in C^2(V, \mathbb{R})$ gilt dann*

$$\int_M (f_1 \Delta(f_2) + \langle \operatorname{grad}(f_1), \operatorname{grad}(f_2) \rangle) \, \mathrm{d}\mu_L = \int_\Omega f_1 \langle \operatorname{grad}(f_2), \mathfrak{n} \rangle \, \mathrm{d}\Omega \; .$$

Beweis. Man wende die Sätze 2.11.17 und 2.11.18 auf das Vektorfeld $F = f_1 \operatorname{grad}(f_2)$ an. □