

# **Vorlesung Analysis IV**

Sommersemester 2001

Lutz Habermann

11. Oktober 2001

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vektoranalysis</b>	<b>1</b>
1.1	Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ . . . . .	1
1.2	Tangentialräume und Vektorfelder . . . . .	6
1.3	Gradient, Divergenz und Laplace-Operator . . . . .	13
1.4	Differentialformen und äußeres Differential . . . . .	21
1.5	Orientierung und Volumenform . . . . .	28
1.6	Integration von $d$ -Formen und der Satz von Stokes . . . . .	35
1.7	Klassische Integralsätze . . . . .	41
1.8	Maxwell-Gleichungen . . . . .	46
<b>2</b>	<b>Komplexe Funktionen</b>	<b>49</b>
2.1	Komplex differenzierbare Funktionen . . . . .	49
2.2	Beispiele holomorpher Funktionen . . . . .	57
2.3	Komplexe Kurvenintegrale . . . . .	62
2.4	Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformel . . . . .	68
2.5	Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen . . . . .	74
2.6	Laurent-Reihen und Residuen . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Elemente der Variationsrechnung</b>	<b>85</b>
3.1	Differenzierbarkeit auf Banach-Räumen . . . . .	85
3.2	Aufgabenstellung und Euler-Lagrange-Gleichung . . . . .	88
3.3	Beispiele für Variationsprobleme . . . . .	90
3.4	Laplace-Poisson-Gleichung . . . . .	94
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>97</b>

# Kapitel 1

## Vektoranalysis

### 1.1 Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$

Die Elemente von  $\mathbb{R}^n$  schreiben wir in der Form

$$x = (x^1, \dots, x^n) \quad \text{mit} \quad x^i \in \mathbb{R} \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n .$$

Mit  $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$  bezeichnen wir das System der offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  und mit  $\mathfrak{U}(a)$  für  $a \in \mathbb{R}^n$  das System der Umgebungen von  $a$ , d.h.

$$\mathfrak{U}(a) := \{U \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n) : a \in U\} .$$

Im folgenden sei  $U \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ .

**Definition 1.1.1** Eine Abbildung  $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **einmal stetig differenzierbar** oder  **$C^1$ -Abbildung**, falls die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{und} \quad j = 1, \dots, n$$

existieren und stetig sind. Sie heißt  **$k$ -mal stetig differenzierbar** oder  **$C^k$ -Abbildung** für eine natürliche Zahl  $k \geq 2$ , falls alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}$  existieren und  $(k - 1)$ -mal stetig differenzierbar sind.

Den Raum aller  $C^k$ -Abbildungen  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  für  $k \in \mathbb{N}$  bezeichnen wir mit  $C^k(U, \mathbb{R}^m)$ . Außerdem sei  $C^0(U, \mathbb{R}^m)$  der Raum aller stetigen Abbildungen  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Es gilt

$$C^0(U, \mathbb{R}^m) \supseteq C^1(U, \mathbb{R}^m) \supseteq C^2(U, \mathbb{R}^m) \dots .$$

**Definition 1.1.2** Eine Abbildung  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **glatt** oder  **$C^\infty$ -Abbildung**, falls

$$\varphi \in C^k(U, \mathbb{R}^m) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} .$$

Der Raum aller glatten Abbildungen  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^m) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(U, \mathbb{R}^m) .$$

Sei auch  $V \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ .

**Definition 1.1.3** Eine Abbildung  $\varphi : U \rightarrow V$  heißt  $C^l$ -Diffeomorphismus, wobei  $l \in \mathbb{N}$  oder  $l = \infty$ , falls  $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$  existiert und

$$\varphi \in C^l(U, \mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \varphi^{-1} \in C^l(V, \mathbb{R}^n) .$$

Ist  $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m) \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$  und  $x \in U$ , so bezeichne  $D\varphi(x)$  sowohl die Jacobi-Matrix

$$D\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}$$

als auch die dazu korrespondierende lineare Abbildung  $D\varphi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Bekanntlich gilt:

**Satz 1.1.4** Sei  $\varphi \in C^l(U, \mathbb{R}^n)$  mit  $l \in \mathbb{N}$  oder  $l = \infty$  und sei  $a \in U$ . Ist  $D\varphi(a)$  invertierbar, so existiert ein solches  $U_0 \in \mathfrak{U}(a)$  mit  $U_0 \subseteq U$ , dass

$$\varphi|_{U_0} : U_0 \rightarrow \varphi(U_0)$$

ein  $C^l$ -Diffeomorphismus ist. □

**Beispiel 1.1.5** Die Abbildung  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = x^3$ , ist bijektiv und glatt. Sie ist aber kein  $C^1$ -Diffeomorphismus, denn  $\varphi^{-1}$  ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar. □

**Vereinbarung:** Im weiteren ist mit ‘‘Diffeomorphismus’’ stets ‘‘ $C^\infty$ -Diffeomorphismus’’ gemeint.

Sei jetzt  $d \in \{0, \dots, n\}$  und sei

$$\mathbb{R}_n^d := \{x \in \mathbb{R}^n : x^{d+1} = \dots = x^n = 0\} \quad \text{und} \quad H_n^d := \{x \in \mathbb{R}_n^d : x^d \geq 0\} .$$

**Definition 1.1.6** (1) Eine nichtleere Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt  **$d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$** , falls für jeden Punkt  $a \in M$  eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

(i) Es existieren ein  $U \in \mathfrak{U}(a)$  und ein Diffeomorphismus  $\varphi : U \rightarrow V$  auf ein  $V \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}_n^d \cap V .$$

(ii) Es existieren ein  $U \in \mathfrak{U}(a)$  und ein Diffeomorphismus  $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n) : U \rightarrow V$  auf ein  $V \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\varphi(M \cap U) = H_n^d \cap V \quad \text{und} \quad \varphi^d(a) = 0 .$$

Ein Paar  $(U, \varphi)$  wie in (i) oder (ii) wird **Karte von  $M$  um  $a$**  genannt. Ein System  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  von Karten von  $M$  heißt **Atlas von  $M$** , falls

$$M \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i .$$

Die Menge aller Punkte  $a \in M$ , die die Bedingung (ii) erfüllen, wird der **Rand von  $M$**  genannt und mit  $\partial M$  bezeichnet.

(2) Eine Untermannigfaltigkeit  $M$  von  $\mathbb{R}^n$  heißt **Untermannigfaltigkeit ohne Rand**, falls  $\partial M = \emptyset$ .

**Bemerkung 1.1.7** (i) Für  $a \in M \subseteq \mathbb{R}^n$  können (i) und (ii) von Definition 1.1.6(1) nicht gleichzeitig gelten.

(ii) Ein Paar  $(U, \varphi)$  wie in (i) von Definition 1.1.6(1) werden wir im folgenden **innere Karte** von  $M$  um  $a$  nennen. □

**Satz 1.1.8** Ist  $M$  eine  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ , so ist  $\partial M$  leer oder eine  $(d-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand.

*Beweis.* Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ , sei  $a \in \partial M$  und seien  $U$  und  $\varphi : U \rightarrow V$  wie in (ii) von Definition 1.1.6(1). Wir zeigen, dass für  $b \in M \cap U$

$$b \in \partial M \iff \varphi^d(b) = 0 \quad (1.1.1)$$

gilt. Ist  $b \in M \cap U$  und  $\varphi^d(b) \neq 0$ , so ist  $\varphi^d(b) > 0$ . Folglich können wir  $V_0 \in \mathfrak{U}(\varphi(b))$  so wählen, dass

$$V_0 \subseteq V \quad \text{und} \quad y^d > 0 \quad \text{für alle} \quad y \in V_0.$$

Für  $U_0 = \varphi^{-1}(V_0) \in \mathfrak{U}(b)$  und den Diffeomorphismus

$$\varphi_0 = \varphi|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$$

haben wir dann

$$\varphi_0(M \cap U_0) = \varphi(M \cap U \cap U_0) = \varphi(M \cap U) \cap \varphi(U_0) = H_n^d \cap V \cap V_0 = H_n^d \cap V_0 = \mathbb{R}_n^d \cap V_0.$$

Das bedeutet, dass  $b$  der Bedingung (i) aus Definition 1.1.6(1) genügt. Nach Bemerkung 1.1.7(i) folgt  $b \notin \partial M$ . Damit ist eine Richtung von (1.1.1) gezeigt. Die andere Richtung folgt aus der Definition von  $\partial M$ .

Aus (1.1.1) und

$$\{y \in H_n^d : y^d = 0\} = \mathbb{R}_n^{d-1}$$

erhalten wir

$$\varphi(\partial M \cap U) = \mathbb{R}_n^{d-1} \cap V.$$

Also ist  $(U, \varphi)$  auch eine innere Karte von  $\partial M$  um  $a$ . □

**Beispiel 1.1.9** (i) Jede offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand. Jeder  $d$ -dimensionale affine Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  ist eine  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand.

(ii) Die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^2 : x^1 x^2 = 0\}$  ist keine Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^2$ .

(iii) Der Halbzylinder

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1 \text{ und } x^3 \geq 0 \right\}$$

ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$  mit

$$\partial M = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1 \text{ und } x^3 = 0 \right\}.$$

(iv) Sei  $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x^1| < x^2\}$ . Dann ist  $M$  eine Untermannigfaltigkeit ohne Rand, aber der Abschluss  $\overline{M}$  von  $M$  ist keine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ . □

Untermannigfaltigkeiten treten häufig als Lösungsmenge von Gleichungen auf.

**Satz 1.1.10** Sei  $U \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ , sei  $\Phi \in C^\infty(U, \mathbb{R}^{n-d})$  und sei

$$M := \{x \in U : \Phi(x) = 0\} .$$

Gilt

$$\text{rank}(D\Phi(a)) = n - d \quad \text{für alle } a \in M , \quad (1.1.2)$$

so ist  $M$  eine  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand.

*Beweis.* Gilt (1.1.2), so existieren nach dem Satz über implizite Funktionen zu jedem  $a \in M$  ein  $U_a \in \mathfrak{U}(a)$  und ein Diffeomorphismus  $\varphi_a : U_a \rightarrow V_a$  auf ein  $V_a \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\Phi \circ \varphi_a^{-1}(y) = (y^{d+1}, \dots, y^n) \quad \text{für alle } y \in V_a .$$

Für  $x \in U_a$  folgt

$$x \in M \iff \Phi(x) = 0 \iff \Phi \circ \varphi_a^{-1}(\varphi_a(x)) = 0 \iff \varphi_a(x) \in \mathbb{R}_n^d .$$

Also ist

$$\varphi_a(M \cap U_a) = \mathbb{R}_n^d \cap V_a ,$$

d.h.  $(U_a, \varphi_a)$  ist eine innere Karte von  $M$  um  $a$ . □

**Beispiel 1.1.11** (i) Die Sphäre

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$$

ist eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand von  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Zum Nachweis dieser Aussage benutzen wir Satz 1.1.10. Sei  $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\Phi(x) = |x|^2 - 1$$

gegeben. Dann ist

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \Phi(x) = 0\} .$$

Da

$$D\Phi(x) = (2x^1, \dots, 2x^{n+1}) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^{n+1} ,$$

gilt außerdem

$$\text{rank}(D\Phi(a)) = 1 \quad \text{für alle } a \in S^n .$$

(ii) Der Rotationstorus

$$T^2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \left( \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} - r_1 \right)^2 + (x^3)^2 = r_2^2 \right\}$$

mit  $0 < r_2 < r_1$  ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand von  $\mathbb{R}^3$ . Wir benutzen wieder Satz 1.1.10. Sei

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x^1)^2 + (x^2)^2 \neq 0\}$$

und sei  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\Phi(x) = \left( \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} - r_1 \right)^2 + (x^3)^2 - r_2^2$$

definiert. Dann ist

$$T^2 = \{x \in U : \Phi(x) = 0\} .$$

Desweiteren ist

$$D\Phi(x) = \left( \frac{2x^1 \left( \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} - r_1 \right)}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}, \frac{2x^2 \left( \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} - r_1 \right)}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}, 2x^3 \right)$$

und somit

$$|D\Phi(x)|^2 = 4 \left( \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} - r_1 \right)^2 + 4(x^3)^2,$$

woraus sofort

$$D\Phi(a) \neq 0, \quad \text{d.h.} \quad \text{rank}(D\Phi(a)) = 1 \quad \text{für alle} \quad a \in T^2$$

folgt.

□

Ein anderes oft genutztes Konstruktionsprinzip für Untermannigfaltigkeiten ist die Beschreibung durch lokale Parametrisierungen.

**Satz 1.1.12** Sei  $M$  eine solche nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , dass zu jedem  $a \in M$  ein  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$ , wobei  $W \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$ , und ein  $U \in \mathfrak{A}(a)$  mit

(i)  $\psi(W) = M \cap U$ ,

(ii)  $\text{rank}(D\psi(y)) = d$  für alle  $y \in W$

existieren. Dann ist  $M$  eine  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand von  $\mathbb{R}^n$ .

*Beweis.* Siehe [1], Abschnitt 3.1.

□

**Definition 1.1.13** Eine Abbildung  $\psi$  wie in Satz 1.1.12, die außerdem injektiv ist, wird **Parameterisierung** oder **Parameterdarstellung von  $M$  um  $a$**  genannt.

**Bemerkung 1.1.14** Ist  $M \in \mathbb{R}^n$  eine  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und ist  $(U, \varphi)$  eine innere Karte von  $M$  um  $a \in M$ , so ist  $\psi : W \rightarrow U$ , gegeben durch

$$W = \{y \in \mathbb{R}^d : (y, 0) \in \varphi(U)\} \quad \text{und} \quad \varphi(\psi(y)) = (y, 0),$$

eine Parametrisierung von  $M$  um  $a$ .

□

**Folgerung 1.1.15** Sei  $W \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$  und sei  $\Psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^m)$ . Dann ist der Graph von  $\Psi$ , d.h. die Menge

$$M = \{(y, \Psi(y)) : y \in W\}$$

eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand von  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

*Beweis.* Für die durch  $\psi(y) := (y, \Psi(y))$  definierte Abbildung  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^{n+m})$  gilt

$$\psi(W) = M$$

und

$$\text{rank}(D\psi(y)) = n \quad \text{für alle} \quad y \in W.$$

Mit Satz 1.1.12 folgt die Behauptung.

□

Man beachte aber

**Beispiel 1.1.16** Die Mengen

$$M_1 := \{(0, t) : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad M_2 := \{(t, \sin(1/t)) : t > 0\}$$

sind Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^2$ . Aber  $M_1 \cup M_2$  ist keine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ , obwohl  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ .

□

## 1.2 Tangentialräume und Vektorfelder

Im folgenden sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ . Dabei nehmen wir der Einfachheit halber  $\partial M = \emptyset$  an.

**Definition 1.2.1** (i) Eine Abbildung  $\gamma : ]-\varepsilon_1, \varepsilon_2[ \rightarrow M$  mit  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  heißt **glatter Weg in  $M$  durch  $a \in M$** , falls

$$\gamma \in C^\infty(]-\varepsilon_1, \varepsilon_2[, \mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \gamma(0) = a .$$

(ii) Ein  $v \in \mathbb{R}^n$  heißt **Tangentialvektor an  $M$  in  $a$** , falls ein glatter Weg  $\gamma$  in  $M$  durch  $a$  mit

$$\frac{d\gamma}{dt}(0) = v$$

existiert. Die Menge aller Tangentialvektoren an  $M$  in  $a$  wird der **Tangentialraum an  $M$  in  $a$**  genannt und mit  $T_a M$  bezeichnet.

**Beispiel 1.2.2** (i) Ist  $M \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , so ist

$$T_a M = \mathbb{R}^n \quad \text{für alle} \quad a \in M .$$

(ii) Ist  $M$  ein affiner Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  und ist  $E$  der zugehörige Vektorraum, so ist

$$T_a M = E \quad \text{für alle} \quad a \in M .$$

□

**Satz 1.2.3** Sei  $(U, \varphi)$  eine Karte von  $M$  um  $a$ . Dann ist

$$T_a M = \{v \in \mathbb{R}^n : D\varphi(a)(v) \in \mathbb{R}_n^d\} .$$

*Beweis.* Sei  $v \in T_a M$  und sei  $\gamma : ]-\varepsilon_1, \varepsilon_2[ \rightarrow M$  ein glatter Weg durch  $a$  mit

$$\frac{d\gamma}{dt}(0) = v .$$

Dabei können wir o.B.d.A annehmen, dass  $\gamma(]-\varepsilon_1, \varepsilon_2[) \subseteq U$ . Da dann  $\varphi(\gamma(t)) \in \mathbb{R}_n^d$  für alle  $t \in ]-\varepsilon_1, \varepsilon_2[$ , folgt

$$D\varphi(a)(v) = D\varphi(a) \left( \frac{d\gamma}{dt}(0) \right) = \frac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt}(0) \in \mathbb{R}_n^d .$$

Sei jetzt  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $w := D\varphi(a)(v) \in \mathbb{R}_n^d$ . Wir definieren  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow U$  für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  durch

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(a) + tw) .$$

Dann ist  $\gamma$  ein glatter Weg in  $M$  durch  $a$  mit

$$\frac{d\gamma}{dt}(0) = D(\varphi^{-1})(\varphi(a))(w) = D(\varphi^{-1})(\varphi(a)) \circ D\varphi(a)(v) = v .$$

□

Eine unmittelbare Konsequenz von Satz 1.2.3 ist

**Folgerung 1.2.4** Für jedes  $a \in M$  ist  $T_a M$  ein  $d$ -dimensionaler Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ . □

Ist  $M$  durch eine Gleichung gegeben, so können die Tangentialräume  $T_a M$  folgendermaßen bestimmt werden.

**Satz 1.2.5** Sei  $U \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und sei  $M = \{x \in U : \Phi(x) = 0\}$  für ein  $\Phi \in C^\infty(U, \mathbb{R}^{n-d})$  mit (1.1.2). Dann ist für alle  $a \in M$

$$T_a M = \ker(D\Phi(a)) , \quad (1.2.1)$$

d.h.

$$T_a M = \{v \in \mathbb{R}^n : D\Phi(a)(v) = 0\} .$$

*Beweis.* Sei  $a \in M$ . Ist  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  ein glatter Weg durch  $a$ , so ist

$$\Phi(\gamma(t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ ,$$

was

$$D\Phi(a) \left( \frac{d\gamma}{dt}(0) \right) = \frac{d(\Phi \circ \gamma)}{dt}(0) = 0$$

impliziert. Also gilt

$$T_a M \subseteq \ker(D\Phi(a)) .$$

Da wir aufgrund von (1.1.2) außerdem

$$\dim \ker(D\Phi(a)) = d = \dim T_a M$$

haben, folgt (1.2.1). □

**Beispiel 1.2.6** Wir betrachten  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Sei  $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  wie in Beispiel 1.1.11(i). Dann ist

$$D\Phi(x)(v) = 2\langle x, v \rangle \quad \text{für alle } x, v \in \mathbb{R}^{n+1} .$$

Mit Satz 1.2.5 ergibt sich

$$T_a M = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle a, v \rangle = 0\} \quad \text{für alle } a \in S^n . \quad (1.2.2)$$

□

Die folgende Definition ist eine Verallgemeinerung von Definition 1.1.2.

**Definition 1.2.7** Eine Abbildung  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **glatt** oder  **$C^\infty$ -Abbildung**, falls zu jedem  $a \in M$  ein  $U \in \mathcal{U}(a)$  und ein  $\tilde{F} \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$  mit

$$\tilde{F}(x) = F(x) \quad \text{für alle } x \in M \cap U$$

existieren.

Der Raum aller glatten Abbildungen  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  wird mit  $C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$  bezeichnet. Statt  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  schreiben wir einfach  $C^\infty(M)$ .

**Definition 1.2.8** Für  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ ,  $a \in M$  und  $v \in T_a M$  sei

$$DF(a)(v) := D\tilde{F}(a)(v) , \quad (1.2.3)$$

wobei  $\tilde{F}$  wie in Definition 1.2.7 ist. Die so definierte lineare Abbildung  $DF(a) : T_a M \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt das **Differential von  $F$  in  $a$** .

Dass  $DF(a)$  durch (1.2.3) korrekt definiert ist, also nicht von der Wahl von  $\tilde{F}$  abhängt, folgt aus

**Lemma 1.2.9** Sei  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ , sei  $a \in M$  und sei  $\gamma$  ein glatter Weg in  $M$  durch  $a$ . Dann ist

$$DF(a) \left( \frac{d\gamma}{dt}(0) \right) = \frac{d(F \circ \gamma)}{dt}(0).$$

*Beweis.* Sei  $\tilde{F}$  wie in Definition 1.2.7. Dann haben wir

$$DF(a) \left( \frac{d\gamma}{dt}(0) \right) = D\tilde{F}(a) \left( \frac{d\gamma}{dt}(0) \right) = \frac{d(\tilde{F} \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{d(F \circ \gamma)}{dt}(0).$$

□

**Definition 1.2.10** Ein Vektorfeld auf  $M$  ist eine Abbildung  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$X(a) \in T_a M \quad \text{für alle } a \in M.$$

Ein Vektorfeld  $X$  auf  $M$  heißt **glatt** oder  **$C^\infty$ -Vektorfeld**, falls  $X \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ .

Den Raum aller  $C^\infty$ -Vektorfelder auf  $M$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{X}(M)$ . Wie man leicht sieht, gilt

**Lemma 1.2.11** Sind  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  und ist  $f \in C^\infty(M)$ , so ist auch  $X + Y \in \mathfrak{X}(M)$  und  $fX \in \mathfrak{X}(M)$ . □

Mit Hilfe von (1.2.2) überprüft man

**Beispiel 1.2.12** (i) Die Abbildung  $X : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(a) = (-a^2, a^1, 0)$ , ist ein glattes Vektorfeld auf  $S^2$ .

(ii) Durch

$$\begin{aligned} Y_1(a) &:= (-a^2, a^1, -a^4, a^3), \\ Y_2(a) &:= (-a^3, a^4, a^1, -a^2), \\ Y_3(a) &:= (-a^4, -a^3, a^2, a^1) \end{aligned}$$

sind glatte Vektorfelder  $Y_1, Y_2, Y_3$  auf  $S^3$  definiert. Für diese Vektorfelder gilt

$$\langle Y_i(a), Y_j(a) \rangle = \delta_{ij} \quad \text{für alle } a \in S^3 \quad \text{und } i, j = 1, 2, 3.$$

Folglich hat jedes  $X \in \mathfrak{X}(S^3)$  die Gestalt

$$X = \sum_{i=1}^3 f^i Y_i \quad \text{mit } f^i \in C^\infty(S^3).$$

□

**Bemerkung 1.2.13** Während die im letzten Beispiel angegebenen Vektorfelder  $Y_1, Y_2, Y_3$  nirgends verschwinden, hat das Vektorfeld  $X$  zwei Nullstellen, nämlich im Nord- und im Südpol. Allgemein gilt, dass jedes glatte (sogar stetige) Vektorfeld auf  $S^2$  mindestens eine Nullstelle besitzt. □

**Beispiel 1.2.14** Sei  $\{e_1, \dots, e_2\}$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$ , d.h.

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots$$

Wir definieren das Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  auf  $\mathbb{R}^n$  für  $i = 1, \dots, n$  durch

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(x) = e_i \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n .$$

Da  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(x) \right\}$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  eine Basis von  $T_x \mathbb{R}^n$  ist, kann jedes  $X \in \mathfrak{X}(U)$  mit  $U \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$  in der Form

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen  $X^i \in C^\infty(U)$  geschrieben werden.  $\square$

Das letzte Beispiel kann in folgender Weise verallgemeinert werden.

**Beispiel 1.2.15** Sei  $W \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$  und sei  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$  eine Parametrisierung von  $M$ . Wir definieren das Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial y^i}$  auf  $\psi(W) \subseteq M$  für  $i = 1, \dots, d$  durch

$$\frac{\partial}{\partial y^i}(\psi(y)) = \frac{\partial \psi}{\partial y^i}(y) = \left( \frac{\partial \psi^1}{\partial y^i}(y), \dots, \frac{\partial \psi^n}{\partial y^i}(y) \right) \quad \text{für } y \in W .$$

Die Vektorfelder  $\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^d} \in \mathfrak{X}(\psi(W))$  werden die **kanonischen Vektorfelder** zur Parametrisierung  $\psi$  genannt. Da nach Voraussetzung  $\text{rank}(D\psi(y)) = d$  für alle  $y \in W$ , bilden die kanonischen Vektorfelder in jedem  $a \in \psi(W)$  eine Basis von  $T_a M$ . Also existieren zu jedem  $X \in \mathfrak{X}(M)$  eindeutig bestimmte  $X^i \in C^\infty(W)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , mit

$$X(\psi(y)) = \sum_{i=1}^d X^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}(\psi(y)) \quad \text{für alle } y \in W .$$

Die Funktionen  $X^1, \dots, X^d$  heißen die **Koeffizienten** von  $X$  bezüglich  $\psi$ .  $\square$

**Beispiel 1.2.16** Wir betrachten  $M = \mathbb{R}^2$  mit Polarkoordinaten, d.h. mit der Parametrisierung

$$\psi : ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi(y^1, y^2) = (y^1 \cos(y^2), y^1 \sin(y^2)) .$$

Die kanonischen Vektorfelder zu  $\psi$  sind durch

$$\frac{\partial}{\partial y^1}(x) = (\cos(y^2), \sin(y^2)) = \left( \frac{x^1}{y^1}, \frac{x^2}{y^1} \right) = \left( \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}, \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} \right)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y^2}(x) = (-y^1 \sin(y^2), y^1 \cos(y^2)) = (-x^2, x^1)$$

für  $x = \psi(y)$  gegeben.  $\square$

**Satz 1.2.17** Sei  $f \in C^\infty(M)$  und seien  $\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^d}$  die kanonischen Vektorfelder zu einer Parametrisierung  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$  von  $M$ . Dann gilt

$$Df(a) \left( \frac{\partial}{\partial y^i}(a) \right) = \frac{\partial (f \circ \psi)}{\partial y^i}(\psi^{-1}(a)) \quad \text{für alle } a \in \psi(W) \quad \text{und } i = 1, \dots, d .$$

*Beweis.* Sei  $y \in W$  und  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Für den glatten Weg

$$\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M, \quad \gamma(t) = \psi(y + te_i),$$

gilt

$$\frac{d\gamma}{dt}(0) = \frac{\partial \psi}{\partial y^i}(y) = \frac{\partial}{\partial y^i}(\psi(y)).$$

Mit Lemma 1.2.9 folgt

$$Df(\psi(y)) \left( \frac{\partial}{\partial y^i}(\psi(y)) \right) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^i}(y).$$

□

Wir wollen jetzt das Transformationsverhalten der kanonischen Vektorfelder und der Koeffizienten eines Vektorfeldes bei Änderung der Parametrisierung beschreiben. Dazu betrachten wir zwei Parametrisierungen  $\psi_1 \in C^\infty(W_1, \mathbb{R}^n)$  und  $\psi_2 \in C^\infty(W_2, \mathbb{R}^n)$  von  $M$  mit

$$\psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2) \neq \emptyset.$$

Außerdem fixieren wir ein  $C^\infty$ -Vektorfeld  $X$  auf  $M$ . Die Punkte von  $W_1$  schreiben wir als  $y = (y^1, \dots, y^d)$ , die von  $W_2$  als  $z = (z^1, \dots, z^d)$ . Die kanonischen Vektorfelder zu  $\psi_1$  werden dann mit  $\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^d}$  bezeichnet, die zu  $\psi_2$  mit  $\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^d}$ . Die Koeffizienten von  $X$  bezüglich  $\psi_1$  seien  $X_1^1, \dots, X_1^d$ , diejenigen bezüglich  $\psi_2$  seien  $X_2^1, \dots, X_2^d$ . Desweiteren sei

$$\psi_{21} = (\psi_{21}^1, \dots, \psi_{21}^d) : \psi_1^{-1}(\psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2)) \rightarrow \psi_2^{-1}(\psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2))$$

die durch

$$\psi_{21}(y) = \psi_2^{-1}(\psi_1(y))$$

definierte Abbildung. Mit diesen Festlegungen gilt:

**Satz 1.2.18** (i) Für alle  $a \in \psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2)$  ist

$$\frac{\partial}{\partial y^i}(a) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial \psi_{21}^j}{\partial y^i}(\psi_1^{-1}(a)) \frac{\partial}{\partial z^j}(a), \quad i = 1, \dots, d. \quad (1.2.4)$$

(ii) Für alle  $z \in \psi_2^{-1}(\psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2))$  ist

$$X_2^j(z) = \sum_{i=1}^d X_1^i(\psi_{21}^{-1}(z)) \frac{\partial \psi_{21}^j}{\partial y^i}(\psi_{21}^{-1}(z)), \quad j = 1, \dots, d.$$

*Beweis.* Für  $a \in \psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2)$  haben wir nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^i}(a) &= \frac{\partial \psi_1}{\partial y^i}(\psi_1^{-1}(a)) \\ &= \frac{\partial(\psi_2 \circ \psi_{21})}{\partial y^i}(\psi_1^{-1}(a)) \\ &= \sum_{j=1}^d \frac{\partial \psi_2}{\partial z^j}(\psi_2^{-1}(a)) \frac{\partial \psi_{21}^j}{\partial y^i}(\psi_1^{-1}(a)) \\ &= \sum_{j=1}^d \frac{\partial \psi_{21}^j}{\partial y^i}(\psi_1^{-1}(a)) \frac{\partial}{\partial z^j}(a). \end{aligned}$$

Damit ist (i) gezeigt. Folglich gilt für  $z \in \psi_2^{-1}(\psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2))$

$$\begin{aligned} X(\psi_2(z)) &= \sum_{i=1}^d X_1^i(\psi_1^{-1} \circ \psi_2(z)) \frac{\partial}{\partial y^i}(\psi_2(z)) \\ &= \sum_{i=1}^d X_1^i(\psi_1^{-1} \circ \psi_2(z)) \left( \sum_{j=1}^d \frac{\partial \psi_{21}^j}{\partial y^i}(\psi_1^{-1} \circ \psi_2(z)) \frac{\partial}{\partial z^j}(\psi_2(z)) \right) \\ &= \sum_{j=1}^d \left( \sum_{i=1}^d X_1^i(\psi_{21}^{-1}(z)) \frac{\partial \psi_{21}^j}{\partial y^i}(\psi_{21}^{-1}(z)) \right) \frac{\partial}{\partial z^j}(\psi_2(z)), \end{aligned}$$

woraus (ii) folgt.  $\square$

**Bemerkung 1.2.19** Schreibt man die Abbildung  $\psi_{21}$  als Koordinatentransformation  $z = z(y) = (z^1(y), \dots, z^d(y))$  und identifiziert man  $a \in \psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2)$  mit  $y = \psi_1^{-1}(a) \in W_1$ , so erhält die Beziehung (1.2.4) die Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial y^i}(y) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial z^j}{\partial y^i}(y) \frac{\partial}{\partial z^j}(z(y)).$$

$\square$

**Beispiel 1.2.20** Sei  $M = \mathbb{R}^2$ . Als Parametrisierung von  $M$  betrachten wir zum einen

$$\psi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi_1(y^1, y^2) = (y^1 + y^2, y^1 - y^2),$$

zum anderen

$$\psi_2 : ]0, \infty[ \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi_2(z^1, z^2) = (\log(z^1), \log(z^2)).$$

Für die Abbildung  $\psi_{21} : \mathbb{R}^2 \rightarrow ]0, \infty[ \times ]0, \infty[$  haben wir dann

$$\psi_{21}(y^1, y^2) = (e^{y^1+y^2}, e^{y^1-y^2}).$$

Also gilt nach Satz 1.2.18

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^1}(x) &= \frac{\partial \psi_{21}^1}{\partial y^1}(y^1, y^2) \frac{\partial}{\partial z^1}(x) + \frac{\partial \psi_{21}^2}{\partial y^1}(y^1, y^2) \frac{\partial}{\partial z^2}(x) \\ &= e^{y^1+y^2} \frac{\partial}{\partial z^1}(x) + e^{y^1-y^2} \frac{\partial}{\partial z^2}(x) \\ &= z^1 \frac{\partial}{\partial z^1}(x) + z^2 \frac{\partial}{\partial z^2}(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^2}(x) &= \frac{\partial \psi_{21}^1}{\partial y^2}(y^1, y^2) \frac{\partial}{\partial z^1}(x) + \frac{\partial \psi_{21}^2}{\partial y^2}(y^1, y^2) \frac{\partial}{\partial z^2}(x) \\ &= e^{y^1+y^2} \frac{\partial}{\partial z^1}(x) - e^{y^1-y^2} \frac{\partial}{\partial z^2}(x) \\ &= z^1 \frac{\partial}{\partial z^1}(x) - z^2 \frac{\partial}{\partial z^2}(x) \end{aligned}$$

für  $x = \psi_1(y^1, y^2) = \psi_2(z^1, z^2)$ .  $\square$

Jetzt wollen wir noch erklären, wie man Funktionen auf  $M$  nach Vektorfeldern ableitet. Wir wollen also jedem  $X \in \mathfrak{X}(M)$  eine Abbildung

$$f \in C^\infty(M) \mapsto X(f) \in C^\infty(M)$$

zuordnen.

**Definition 1.2.21** Für  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und  $f \in C^\infty(M)$  definieren wir  $X(f) \in C^\infty(M)$  durch

$$X(f)(a) := Df(a)(X(a)) .$$

Die Funktion  $X(f)$  heißt die **Ableitung von  $f$  in Richtung  $X$** .

Für die eben definierte Ableitung gelten folgende Regeln.

**Satz 1.2.22** (i) Für  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und  $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$  ist

$$X(f_1 + f_2) = X(f_1) + X(f_2) \quad \text{und} \quad X(f_1 \cdot f_2) = X(f_1) \cdot f_2 + f_1 \cdot X(f_2) .$$

(ii) Ist  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$  eine Parametrisierung von  $M$  und sind  $X^1, \dots, X^d$  die Koeffizienten von  $X \in \mathfrak{X}(M)$  bezüglich  $\psi$ , so gilt für  $f \in C^\infty(M)$  und  $y \in W$

$$X(f)(\psi(y)) = \sum_{i=1}^d X^i(y) \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^i}(y) .$$

*Beweis.* Die Aussage (i) rechnet man einfach nach. Die Aussage (ii) folgt aus Satz 1.2.17. Ist nämlich  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$  eine Parametrisierung von  $M$  und sind  $X^1, \dots, X^d$  die Koeffizienten von  $X \in \mathfrak{X}(M)$  bezüglich  $\psi$ , so haben wir für alle  $y \in W$

$$\begin{aligned} X(f)(\psi(y)) &= Df(\psi(y))(X(\psi(y))) \\ &= Df(\psi(y)) \left( \sum_{i=1}^d X^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}(\psi(y)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^d X^i(y) Df(\psi(y)) \left( \frac{\partial}{\partial y^i}(\psi(y)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^d X^i(y) \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^i}(y) . \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 1.2.23** (i) Aus Satz 1.2.22(ii) folgt, dass die Funktion  $X(f)$  für  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und  $f \in C^\infty(M)$  tatsächlich wieder glatt ist.

(ii) Ist  $M = \mathbb{R}^n$ , so gilt nach Satz 1.2.22(ii) für  $f \in C^\infty(M)$  und  $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i} .$$

Das heißt, die Ableitung von  $f$  in Richtung  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  ist die partielle Ableitung von  $f$  nach  $x^i$ .

□

Bisher haben wir vorausgesetzt, dass  $M$  ohne Rand ist. Man überprüft aber leicht, dass sich die obigen Betrachtungen in naheliegender Weise in eventuelle Randpunkte fortsetzen lassen. Insbesondere hat man

**Definition 1.2.24** Sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  und sei  $a \in \partial M$ . Der **Tangentenraum an  $M$  in  $a$**  besteht aus allen Vektoren der Form  $\frac{d\gamma}{dt}(0)$  für eine glatte Abbildung  $\gamma : [0, \varepsilon[ \rightarrow M$  oder  $\gamma : ]-\varepsilon, 0] \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = a$ .

## 1.3 Gradient, Divergenz und Laplace-Operator

Sei  $M$  wieder eine  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  und bezeichne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  wie bisher das Euklidische Skalarprodukt in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 1.3.1** (i) Die Zuordnung, die jedem  $a \in M$  das Skalarprodukt

$$(v_1, v_2) \in T_a M \times T_a M \mapsto \langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{R}$$

in  $T_a M$  zuweist, wird **Riemannsche Metrik von  $M$**  genannt.

(ii) Sei  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$  eine Parametrisierung von  $M$ . Die durch

$$g_{ij}(y) = \left\langle \frac{\partial}{\partial y^i}(\psi(y)), \frac{\partial}{\partial y^j}(\psi(y)) \right\rangle$$

definierten Funktionen  $g_{ij} \in C^\infty(W)$ ,  $1 \leq i, j \leq d$ , heißen die **Koeffizienten der Riemannschen Metrik von  $M$  bezüglich  $\psi$** .

**Beispiel 1.3.2** Sei  $M = W \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$  und sei  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$  die identische Abbildung. Die kanonischen Vektorfelder zu  $\psi$  sind dann die auf  $W$  eingeschränkten Vektorfelder  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$  (vgl. Beispiel 1.2.14). Da

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(x) = e_i \quad \text{für alle } x \in W,$$

folgt

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} \quad \text{für alle } x \in W \quad \text{und} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

□

**Beispiel 1.3.3** Sei  $M = \mathbb{R}^2$  und sei  $\psi$  wie in Beispiel 1.2.16. Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial y^1}(\psi(y)) = (\cos(y^2), \sin(y^2)) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y^2}(\psi(y)) = (-y^1 \sin(y^2), y^1 \cos(y^2)).$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} g_{11}(y) &= 1, \\ g_{12}(y) &= g_{21}(y) = 0, \\ g_{22}(y) &= (y^1)^2. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 1.3.4** Bezeichne  $a_N$  den Nordpol von  $S^n$ , d.h.

$$a_N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Wir definieren wie folgt eine Abbildung  $\pi_N : S^n \setminus \{a_N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ist  $a \in S^n \setminus \{a_N\}$ , so sei  $(\pi_N(a), 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  der Schnittpunkt der Geraden durch  $a$  und  $a_N$  mit der Hyperebenen  $\mathbb{R}_{n+1}^n$ . Die Abbildung  $\pi_N$  wird **stereographische Projektion** genannt. Wie man leicht überprüft, gilt

$$\pi_N(a) = \frac{1}{1 - a^{n+1}} (a^1, \dots, a^n) \quad \text{für alle } a \in S^n \setminus \{a_N\}.$$

Außerdem ist  $\pi_N$  umkehrbar. Die Umkehrabbildung

$$\psi_N := \pi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{a_N\}$$

ist eine Parametrisierung von  $S^n$ . Da

$$\psi_N(y) = \frac{1}{|y|^2 + 1} (2y^1, \dots, 2y^n, |y|^2 - 1) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n,$$

ist

$$\frac{\partial}{\partial y^i}(\psi_N(y)) = \frac{-2y^i}{(|y|^2 + 1)^2} \left( \sum_{k=1}^n 2y^k e_k + (|y|^2 - 1) e_{n+1} \right) + \frac{2}{|y|^2 + 1} (e_i + y^i e_{n+1})$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Damit berechnen wir, dass

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial}{\partial y^i}(\psi_N(y)), \frac{\partial}{\partial y^j}(\psi_N(y)) \right\rangle \\ &= \frac{4y^i y^j}{(|y|^2 + 1)^4} (4|y|^2 + (|y|^2 - 1)^2) + \frac{4}{(|y|^2 + 1)^2} (\delta_{ij} + y^i y^j) \\ &- \frac{4y^i}{(|y|^2 + 1)^3} (2y^j + (|y|^2 - 1)y^j) - \frac{4y^j}{(|y|^2 + 1)^3} (2y^i + (|y|^2 - 1)y^i) \\ &= \frac{4\delta_{ij}}{(|y|^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

für  $i, j = 1, \dots, n$ . Für die Koeffizienten  $g_{ij}$  der Riemannschen Metrik von  $S^n$  bezüglich  $\psi_N$  gilt also

$$g_{ij}(y) = \frac{4\delta_{ij}}{(|y|^2 + 1)^2}.$$

□

Um das Transformationsverhalten der Koeffizienten der Riemannschen Metrik bei Änderung der Parametrisierung zu beschreiben, betrachten wir wieder zwei Parametrisierungen  $\psi_1 \in C^\infty(W_1, \mathbb{R}^n)$  und  $\psi_2 \in C^\infty(W_2, \mathbb{R}^n)$  von  $M$  mit

$$\psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2) \neq \emptyset.$$

Seien  $g_{ij}^1$  die Koeffizienten der Riemannschen Metrik bezüglich  $\psi_1$  und  $g_{kl}^2$  die Koeffizienten bezüglich  $\psi_2$ . Mit Hilfe der Abbildung

$$\psi_{21} : \psi_1^{-1}(\psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2)) \rightarrow \psi_2^{-1}(\psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2)), \quad \psi_{21}(y) = \psi_2^{-1}(\psi_1(y)),$$

können die  $g_{ij}^1$  dann folgendermaßen aus den  $g_{kl}^2$  berechnet werden.

**Satz 1.3.5** Für alle  $y \in \psi_1^{-1}(\psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2))$  und  $i, j = 1, \dots, d$  ist

$$g_{ij}^1(y) = \sum_{k,l=1}^d \frac{\partial \psi_{21}^k}{\partial y^i}(y) \frac{\partial \psi_{21}^l}{\partial y^j}(y) g_{kl}^2(\psi_{21}(y)).$$

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 1.2.18(i). □

Wir ordnen jetzt jeder glatten Funktion auf  $M$  ein Vektorfeld zu.

**Definition 1.3.6** Sei  $f \in C^\infty(M)$ . Ist  $a \in M$ , so sei  $\text{grad}(f)(a) \in T_a M$  durch

$$Df(a)(v) = \langle \text{grad}(f)(a), v \rangle \quad \text{für alle } v \in T_a M$$

bestimmt. Das so definierte Vektorfeld  $\text{grad}(f)$  auf  $M$  heißt der **Gradient von  $f$** .

**Satz 1.3.7** Sei  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$  eine Parametrisierung von  $M$ , seien  $g_{ij} \in C^\infty(W, \mathbb{R})$ ,  $i, j = 1, \dots, d$ , die Koeffizienten der Riemannschen Metrik bezüglich  $\psi$  und bezeichne  $(g^{ij}(y))$  für  $y \in W$  die zur  $d \times d$ -Matrix  $(g_{ij}(y))$  inverse Matrix. Für alle  $f \in C^\infty(M)$  und alle  $y \in W$  gilt dann

$$\text{grad}(f)(\psi(y)) = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^i}(y) g^{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y^j}(\psi(y)).$$

*Beweis.* Sei  $f \in C^\infty(M)$ ,  $y \in W$  und  $k \in \{1, \dots, d\}$ . Nach Satz 1.2.17 ist

$$Df(\psi(y)) \left( \frac{\partial}{\partial y^k}(\psi(y)) \right) = \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^k}(y).$$

Da auch

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^i}(y) g^{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y^j}(\psi(y)), \frac{\partial}{\partial y^k}(\psi(y)) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^i}(y) g^{ij}(y) g_{jk}(y) \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^i}(y) \delta_{ik} \\ &= \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^k}(y) \end{aligned}$$

gilt, folgt die Behauptung. □

**Beispiel 1.3.8** Sei  $W \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$  und  $f \in C^\infty(W)$ . Aus

$$Df(x)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) v^i \quad \text{für } x \in W \quad \text{und } v \in T_x W = \mathbb{R}^n$$

folgt

$$\text{grad}(f)(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \frac{\partial}{\partial x^i}(x) \quad \text{für alle } x \in W.$$

□

**Beispiel 1.3.9** Sei  $M = \mathbb{R}^2$  und sei  $\psi$  wie in den Beispielen 1.2.16 und 1.3.3. Dann ist

$$\begin{pmatrix} g^{11}(y) & g^{12}(y) \\ g^{21}(y) & g^{22}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (y^1)^{-2} \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 1.3.7 haben wir also für  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\text{grad}(f)(\psi(y)) = \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^1}(y) \frac{\partial}{\partial y^1}(\psi(y)) + \frac{1}{(y^1)^2} \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^2}(y) \frac{\partial}{\partial y^2}(\psi(y)).$$

□

**Beispiel 1.3.10** Sei  $M = S^n$  und sei  $\psi_N$  die in Beispiel 1.3.4 definierte Parametrisierung von  $S^n$ . Für alle  $f \in C^\infty(S^n)$  ist dann

$$\text{grad}(f)(\psi_N(y)) = \frac{(|y|^2 + 1)^2}{4} \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \psi_N)}{\partial y^i}(y) \frac{\partial}{\partial y^i}(\psi_N(y)).$$

□

Als nächstes führen wir die Divergenz eines Vektorfeldes ein.

**Definition 1.3.11** Sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Für  $a \in M$  setzen wir

$$\operatorname{div}(X)(a) := \sum_{i=1}^d \langle DX(a)(v_i), v_i \rangle, \quad (1.3.1)$$

wobei  $\{v_1, \dots, v_d\}$  eine Orthonormalbasis von  $T_a M$  ist. Die so definierte Funktion  $\operatorname{div}(X) : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt die **Divergenz von X**.

**Bemerkung 1.3.12** Durch (1.3.1) ist  $\operatorname{div}(X)$  korrekt definiert. Sind nämlich  $\{v_1, \dots, v_d\}$  und  $\{w_1, \dots, w_d\}$  zwei Orthonormalbasen von  $T_a M$ , so ist

$$w_k = \sum_{i=1}^d \langle w_k, v_i \rangle v_i \quad \text{für } k = 1, \dots, d$$

und genauso

$$v_i = \sum_{k=1}^d \langle w_k, v_i \rangle w_k \quad \text{für } i = 1, \dots, d,$$

was

$$\sum_{k=1}^d \langle w_k, v_i \rangle \langle w_k, v_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^d \langle w_k, v_i \rangle w_k, v_j \right\rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

für  $i, j = 1, \dots, d$  impliziert. Folglich haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^d \langle DX(a)(w_k), w_k \rangle &= \sum_{k,i,j=1}^d \langle w_k, v_i \rangle \langle w_k, v_j \rangle \langle DX(a)(v_i), v_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^d \left( \sum_{k=1}^d \langle w_k, v_i \rangle \langle w_k, v_j \rangle \right) \langle DX(a)(v_i), v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^d \langle DX(a)(v_i), v_i \rangle. \end{aligned}$$

□

Für die folgende Überlegung sei  $d = 1$  und  $\psi$  eine auf einem offenen Intervall  $W \subseteq \mathbb{R}$  definierte Parametrisierung von  $M$ . Das kanonische Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial y}$  zu  $\psi$  ist durch

$$\frac{\partial}{\partial y}(\psi(y)) = \psi'(y)$$

gegeben und der einzige Koeffizient der Riemannschen Metrik von  $M$  bezüglich  $\psi$  ist

$$g(y) = \langle \psi'(y), \psi'(y) \rangle.$$

Sei nun  $X$  ein glattes Vektorfeld auf  $M$ . Da

$$v := \frac{1}{\sqrt{g(y)}} \psi'(y)$$

eine Orthonormalbasis von  $T_{\psi(y)} M$  bildet und da der Koeffizient  $f \in C^\infty(W)$  von  $X$  bezüglich  $\psi$  durch

$$(X \circ \psi)(y) = f(y) \cdot \psi'(y)$$

bestimmt ist, ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(X)(\psi(y)) &= \langle DX(\psi(y))(v), v \rangle \\
&= \frac{1}{g(y)} \langle DX(\psi(y))(\psi'(y)), \psi'(y) \rangle \\
&= \frac{1}{g(y)} \langle (X \circ \psi)'(y), \psi'(y) \rangle \\
&= \frac{1}{g(y)} (\langle f'(y) \cdot \psi'(y), \psi'(y) \rangle + \langle f(y) \cdot \psi''(y), \psi'(y) \rangle) \\
&= f'(y) + \frac{g'(y)}{2g(y)} f(y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{g(y)}} \left( \sqrt{g(y)} f'(y) + \frac{g'(y)}{2\sqrt{g(y)}} f(y) \right),
\end{aligned}$$

d.h.

$$\operatorname{div}(X)(\psi(y)) = \frac{1}{\sqrt{g(y)}} (\sqrt{g} \cdot f)'(y).$$

Die letzte Beziehung wird durch den nächsten Satz für beliebiges  $d$  verallgemeinert.

**Satz 1.3.13** Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$  eine Parametrisierung von  $M$ . Außerdem sei  $g \in C^\infty(W)$  durch

$$g(y) = \det(g_{ij}(y))$$

definiert, wobei  $g_{ij} \in C^\infty(W)$ ,  $i, j = 1, \dots, d$ , die Koeffizienten der Riemannschen Metrik von  $M$  bezüglich  $\psi$  sind. Ist dann  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und sind  $X^i \in C^\infty(W)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , die Koeffizienten von  $X$  bezüglich  $\psi$ , so ist

$$\operatorname{div}(X)(\psi(y)) = \frac{1}{\sqrt{g(y)}} \sum_{i=1}^d \frac{\partial(\sqrt{g} \cdot X^i)}{\partial y^i}(y) \quad \text{für alle } y \in W.$$

*Beweis.* Siehe [1], Abschnitt 3.2. □

**Bemerkung 1.3.14** Aus Satz 1.3.13 folgt insbesondere, dass  $\operatorname{div}(X)$  für  $X \in \mathfrak{X}(M)$  eine  $C^\infty$ -Funktion ist. □

Bevor wir wieder zu Beispielen kommen, beweisen wir noch

**Satz 1.3.15** Für alle  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und alle  $f \in C^\infty(M)$  gilt

$$\operatorname{div}(f \cdot X) = X(f) + f \cdot \operatorname{div}(X).$$

*Beweis.* Sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , sei  $f \in C^\infty(M)$  und sei  $\psi$  eine Parametrisierung von  $M$ . Sind  $X^i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , die Koeffizienten von  $X$  bezüglich  $\psi$ , so sind  $(f \circ \psi) \cdot X^i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , die Koeffizienten von  $f \cdot X$ . Nach Satz 1.3.13 und Satz 1.2.22(ii) haben wir folglich

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f \cdot X) \circ \psi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^d \frac{\partial((f \circ \psi) \sqrt{g} X^i)}{\partial y^i} \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^i} \sqrt{g} X^i + (f \circ \psi) \frac{\partial(\sqrt{g} X^i)}{\partial y^i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^d X^i \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^i} + \frac{f \circ \psi}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^d \frac{\partial(\sqrt{g} X^i)}{\partial y^i} \\
&= X(f) \circ \psi + (f \circ \psi) \cdot (\operatorname{div}(X) \circ \psi).
\end{aligned}$$

□

**Beispiel 1.3.16** Sei  $W \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$  und sei

$$X = \sum_{i=1}^d X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(W).$$

Da  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(x) \right\}$  für jedes  $x \in W$  eine Orthonormalbasis von  $T_x W$  ist, haben wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(X)(x) &= \sum_{i=1}^n \left\langle \operatorname{D}X(x) \left( \frac{\partial}{\partial x^i}(x) \right), \frac{\partial}{\partial x^i}(x) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left\langle \operatorname{D}X^j(x) \left( \frac{\partial}{\partial x^i}(x) \right) \frac{\partial}{\partial x^j}(x), \frac{\partial}{\partial x^i}(x) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial X^j}{\partial x^i}(x) \frac{\partial}{\partial x^j}(x), \frac{\partial}{\partial x^i}(x) \right\rangle, \end{aligned}$$

also

$$\operatorname{div}(X)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x^i}(x) \quad \text{für alle } x \in W.$$

□

**Beispiel 1.3.17** Sei  $M = \mathbb{R}^2$  und sei  $\psi$  wieder wie in den Beispielen 1.2.16 und 1.3.3. Dann ist

$$g(y) = (y^1)^2.$$

Für  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$  gilt folglich

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(X)(\psi(y)) &= \frac{1}{y^1} \frac{\partial (y^1 X^1(y))}{\partial y^1} + \frac{1}{y^1} \frac{\partial (y^1 X^2(y))}{\partial y^2} \\ &= \frac{X^1(y)}{y^1} + \frac{\partial X^1}{\partial y^1}(y) + \frac{\partial X^2}{\partial y^2}(y), \end{aligned}$$

wobei  $X^1$  und  $X^2$  die Koeffizienten von  $X$  bezüglich  $\psi$  sind. Ist insbesondere  $X(x) = (-x^2, x^1)$ , so ist (vgl. Beispiel 1.2.16)

$$X = \frac{\partial}{\partial y^2}$$

und somit

$$\operatorname{div}(X) = 0.$$

Ist dagegen  $X(x) = (x^1, x^2)$ , so haben wir

$$X(\psi(y)) = y^1 \frac{\partial}{\partial y^1}(\psi(y)),$$

woraus

$$\operatorname{div}(X) = 2$$

folgt. □

**Beispiel 1.3.18** Seien  $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  durch

$$\tilde{Y}_1(x) = (-x^2, x^1, 0) \quad \text{und} \quad \tilde{Y}_2(x) = (-x^1 x^3, -x^2 x^3, 1 - (x^3)^2)$$

definiert. Indem wir  $\tilde{Y}_1$  und  $\tilde{Y}_2$  auf  $S^2$  einschränken, erhalten wir Vektorfelder  $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(S^2)$ . Diese Vektorfelder sind orthogonal. Genauer gilt

$$|Y_1(a)|^2 = |Y_2(a)|^2 = 1 - (a^3)^2 \quad \text{und} \quad \langle Y_1(a), Y_2(a) \rangle = 0$$

für alle  $a \in S^2$ . Ist also  $a \neq (0, 0, \pm 1)$ , so ist

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - (a^3)^2}} Y_1(a), \frac{1}{\sqrt{1 - (a^3)^2}} Y_2(a) \right\}$$

eine Orthonormalbasis von  $T_a S^2$ . Nach Definition der Divergenz und wegen

$$D\tilde{Y}_1(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D\tilde{Y}_2(a) = - \begin{pmatrix} a^3 & 0 & a^1 \\ 0 & a^3 & a^2 \\ 0 & 0 & 2a^3 \end{pmatrix}$$

haben wir folglich

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(Y_1)(a) &= \frac{1}{1 - (a^3)^2} (\langle DY_1(a)(Y_1(a)), Y_1(a) \rangle + \langle DY_1(a)(Y_2(a)), Y_2(a) \rangle) \\ &= \frac{1}{1 - (a^3)^2} (\langle D\tilde{Y}_1(a)(Y_1(a)), Y_1(a) \rangle + \langle D\tilde{Y}_1(a)(Y_2(a)), Y_2(a) \rangle) \\ &= \frac{1}{1 - (a^3)^2} (\langle (-a^1, -a^2, 0), (-a^2, a^1, 0) \rangle \\ &\quad + \langle (a^2 a^3, -a^1 a^3, 0), (-a^1 a^3, -a^2 a^3, 1 - (a^3)^2) \rangle) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(Y_2)(a) &= \frac{1}{1 - (a^3)^2} (\langle D\tilde{Y}_2(a)(Y_1(a)), Y_1(a) \rangle + \langle D\tilde{Y}_2(a)(Y_2(a)), Y_2(a) \rangle) \\ &= \frac{1}{1 - (a^3)^2} (\langle (a^2 a^3, -a^1 a^3, 0), (-a^2, a^1, 0) \rangle \\ &\quad + \langle (2a^1 (a^3)^2 - a^1, 2a^2 (a^3)^2 - a^2, 2a^3 ((a^3)^2 - 1)), (-a^1 a^3, -a^2 a^3, 1 - (a^3)^2) \rangle) \\ &= \frac{1}{1 - (a^3)^2} \left( - (a^2)^2 a^3 - (a^1)^2 a^3 - 2 (a^1)^2 (a^3)^3 + (a^1)^2 a^3 - 2 (a^2)^2 (a^3)^3 + (a^2)^2 a^3 \right. \\ &\quad \left. - 2a^3 (1 - (a^3)^2)^2 \right) \\ &= \frac{1}{1 - (a^3)^2} \left( -2 ((a^1)^2 + (a^2)^2) (a^3)^3 - 2a^3 (1 - (a^3)^2)^2 \right) \\ &= -2 (a^3)^3 - 2a^3 (1 - (a^3)^2) \\ &= -2a^3. \end{aligned}$$

□

Den Laplace-Operator von  $M$  definieren wir jetzt als Verknüpfung von Gradient und Divergenz.

**Definition 1.3.19** Wir definieren  $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  durch

$$\Delta(f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) .$$

Diese Abbildung heißt der **Laplace-Operator** oder auch **Laplace-Beltrami-Operator** von  $M$  .

Der Laplace-Operator ist offensichtlich linear, d.h. für alle  $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  ist

$$\Delta(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \Delta(f_1) + \lambda_2 \Delta(f_2) .$$

Außerdem gilt:

**Satz 1.3.20** Für alle  $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$  ist

$$\Delta(f_1 \cdot f_2) = f_1 \cdot \Delta(f_2) + f_2 \cdot \Delta(f_1) + 2 \langle \operatorname{grad}(f_1), \operatorname{grad}(f_2) \rangle .$$

*Beweis.* Aus

$$\operatorname{grad}(f_1 \cdot f_2) = f_1 \cdot \operatorname{grad}(f_2) + f_2 \cdot \operatorname{grad}(f_1)$$

und Satz 1.3.15 folgt

$$\begin{aligned} \Delta(f_1 \cdot f_2) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f_1 \cdot f_2)) \\ &= \operatorname{div}(f_1 \cdot \operatorname{grad}(f_2) + f_2 \cdot \operatorname{grad}(f_1)) \\ &= \operatorname{grad}(f_2)(f_1) + f_1 \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f_2)) + \operatorname{grad}(f_1)(f_2) + f_2 \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f_1)) \\ &= \langle \operatorname{grad}(f_1), \operatorname{grad}(f_2) \rangle + f_1 \cdot \Delta(f_2) + \langle \operatorname{grad}(f_2), \operatorname{grad}(f_1) \rangle + f_2 \cdot \Delta(f_1) \\ &= f_1 \cdot \Delta(f_2) + f_2 \cdot \Delta(f_1) + 2 \langle \operatorname{grad}(f_1), \operatorname{grad}(f_2) \rangle . \end{aligned}$$

□

Bezüglich einer Parametrisierung hat der Laplace-Operator folgende Gestalt.

**Satz 1.3.21** Sei  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$  eine Parametrisierung von  $M$ . Dann gilt für alle  $f \in C^\infty(M)$

$$\Delta(f) \circ \psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial y^j} \left( \sqrt{g} \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^i} g^{ij} \right) ,$$

wobei  $g^{ij} \in C^\infty(W)$ ,  $i, j = 1, \dots, d$ , und  $g \in C^\infty(W)$  wie in den Sätzen 1.3.7 bzw. 1.3.13 sind.

*Beweis.* Ist  $f \in C^\infty(M)$ , so gilt nach Satz 1.3.7 für die Koeffizienten  $\operatorname{grad}(f)^j$  von  $\operatorname{grad}(f)$

$$\operatorname{grad}(f)^j = \sum_{i=1}^d \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^i} g^{ij} , \quad j = 1, \dots, d .$$

Nutzt man nun noch Satz 1.3.13, so erhält man die Behauptung. □

**Beispiel 1.3.22** Sei  $M = W \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ . Aus den Beispielen 1.3.8 und 1.3.16 folgt, dass

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2} \quad \text{für alle } f \in C^\infty(W) .$$

□

**Beispiel 1.3.23** Wir betrachten  $M = \mathbb{R}^2$  wieder mit der in Beispiel 1.2.16 definierten Parametrisierung  $\psi$ . Dann ist

$$g^{11}(y) = 1, \quad g^{22}(y) = \frac{1}{(y^1)^2}, \quad g^{12}(y) = g^{21}(y) = 0 \quad \text{und} \quad g(y) = (y^1)^2.$$

Folglich gilt nach Satz 1.3.21 für  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \Delta(f)(\psi(y)) &= \frac{1}{y^1} \left( \frac{\partial}{\partial y^1} \left( y^1 \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^1}(y) \right) + \frac{\partial}{\partial y^2} \left( y^1 \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^2}(y) \frac{1}{(y^1)^2} \right) \right) \\ &= \frac{\partial^2(f \circ \psi)}{(\partial y^1)^2}(y^1) + \frac{1}{y^1} \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^1}(y) + \frac{1}{(y^1)^2} \frac{\partial^2(f \circ \psi)}{(\partial y^2)^2}(y). \end{aligned}$$

□

**Beispiel 1.3.24** Sei  $M = S^2$  und sei  $f \in C^\infty(S^2)$  die ‘‘Höhenfunktion’’, d.h.

$$f(a) = a^3 \quad \text{für} \quad a \in S^2.$$

Dann ist

$$Df(a)(v) = v^3 \quad \text{für} \quad v \in T_a S^2.$$

Andererseits gilt für das Vektorfeld  $Y_2$  aus Beispiel 1.3.18 und  $v \in T_a S^2$

$$\begin{aligned} \langle Y_2(a), v \rangle &= \left\langle \left( -a^1 a^3, -a^2 a^3, 1 - (a^3)^2 \right), (v^1, v^2, v^3) \right\rangle \\ &= -a^3 (a^1 v^1 + a^2 v^2) + \left( 1 - (a^3)^2 \right) v^3 \\ &= (a^3)^2 v^3 + \left( 1 - (a^3)^3 \right) v^3 \\ &= v^3. \end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, dass  $v \in T_a S^2$  genau dann gilt, wenn  $\langle a, v \rangle = 0$ , d.h. wenn

$$a^1 v^1 + a^2 v^2 = -a^3 v^3.$$

Wir erhalten, dass

$$\text{grad}(f) = Y_2.$$

Da, wie in Beispiel 1.3.18 gezeigt,

$$\text{div}(Y_2)(a) = -2a^3,$$

folgt

$$\Delta(f) = -2f.$$

Die Funktion  $f$  ist also eine Eigenfunktion des Laplace-Operators auf  $S^2$  zum Eigenwert  $-2$ . □

## 1.4 Differentialformen und äußeres Differential

Wir stellen zunächst einige Dinge aus der multilinearen Algebra bereit. Für Beweise und weiterführendes Material verweisen wir auf [4].

Sei  $E$  ein  $d$ -dimensionaler reeller Vektorraum.

**Definition 1.4.1** Sei  $p \in \mathbb{N}$ . Eine  $p$ -Form auf  $E$  ist ein Abbildung  $\omega : E^p \rightarrow \mathbb{R}$ , die multilinear und alternierend ist, d.h. folgenden Eigenschaften genügt.

(i) Für alle  $v_1, \dots, v_{p-1} \in E$  und alle  $i = 1, \dots, p$  ist die Abbildung

$$v \in E \mapsto \omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_i, \dots, v_{p-1}) \in \mathbb{R}$$

linear.

(ii) Für alle  $v_1, \dots, v_p \in E$  und alle  $1 \leq i < j \leq p$  ist

$$\begin{aligned} & \omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_p) \\ &= -\omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_p) . \end{aligned}$$

Den Raum aller  $p$ -Formen auf  $E$  bezeichnen wir mit  $\Lambda^p(E)$ . Zusätzlich setzen wir  $\Lambda^0(E) := \mathbb{R}$ .

**Bemerkung 1.4.2** Die Bedingung (ii) aus Definition 1.4.1 ist dazu äquivalent, dass

$$\omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_p) = 0$$

für alle  $v, v_1, \dots, v_p \in E$  und alle  $1 \leq i < j \leq p$ . □

Offensichtlich ist  $\Lambda^p(E)$  ein reeller Vektorraum. Insbesondere ist  $\Lambda^1(E)$  der Raum aller linearen Abbildungen  $L : E \rightarrow \mathbb{R}$ , also der duale Raum  $E^*$  zu  $E$ .

**Beispiel 1.4.3** Die durch

$$\omega(v_1, \dots, v_n) := \det \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^n & \dots & v_n^n \end{pmatrix} \quad \text{für } v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$$

definierte Abbildung  $\omega : (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine  $n$ -Form auf  $\mathbb{R}^n$ . □

Wie üblich bezeichne  $S_p$  die Gruppe der Permutationen der Zahlen  $1, \dots, p$ . Ist  $\tau \in S_p$ , so sei  $\text{sign}(\tau)$  das Signum von  $\tau$ .

**Definition 1.4.4** Das **äußere** oder **alternierende Produkt**  $\omega^1 \wedge \omega^2 \in \Lambda^{p+q}(E)$  zweier Formen  $\omega^1 \in \Lambda^p(E)$  und  $\omega^2 \in \Lambda^q(E)$  ist durch

$$\omega^1 \wedge \omega^2(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\tau \in S_{p+q}} \text{sign}(\tau) \omega^1(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(p)}) \omega^2(v_{\tau(p+1)}, \dots, v_{\tau(p+q)})$$

definiert. Außerdem setzen wir für  $\lambda \in \Lambda^0(E)$  und  $\omega \in \Lambda^p(E)$

$$\lambda \wedge \omega := \lambda \omega \quad \text{und} \quad \omega \wedge \lambda := \lambda \omega .$$

Das äußere Produkt genügt folgenden Gesetzen.

**Satz 1.4.5** (i) *Antikommutativität:* Für  $\omega^1 \in \Lambda^p(E)$  und  $\omega^2 \in \Lambda^q(E)$  gilt

$$\omega^2 \wedge \omega^1 = (-1)^{pq} \omega^1 \wedge \omega^2 .$$

(ii) *Assoziativität:* Für  $\omega^1 \in \Lambda^p(E)$ ,  $\omega^2 \in \Lambda^q(E)$  und  $\omega^3 \in \Lambda^r(E)$  gilt

$$(\omega^1 \wedge \omega^2) \wedge \omega^3 = \omega^1 \wedge (\omega^2 \wedge \omega^3) .$$

(iii) *Distributivität:* Für  $\omega^1, \omega^2 \in \Lambda^p(E)$ ,  $\omega^3 \in \Lambda^q(E)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$(\omega^1 + \omega^2) \wedge \omega^3 = \omega^1 \wedge \omega^3 + \omega^2 \wedge \omega^3 \quad \text{und} \quad (\lambda \omega^1) \wedge \omega^3 = \lambda (\omega^1 \wedge \omega^3) .$$

□

Sind  $\omega^1, \omega^2 \in \Lambda^1(E)$ , so haben wir nach Definition 1.4.4

$$\omega^1 \wedge \omega^2 (v_1, v_2) = \omega^1 (v_1) \omega^2 (v_2) - \omega^1 (v_2) \omega^2 (v_1) \quad \text{für} \quad v_1, v_2 \in E .$$

Dies ist ein Spezialfall folgender Aussage.

**Lemma 1.4.6** Für  $\omega^1, \dots, \omega^p \in \Lambda^1(E)$  und  $v_1, \dots, v_p \in E$  ist

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p (v_1, \dots, v_p) = \det \begin{pmatrix} \omega^1 (v_1) & \dots & \omega^1 (v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega^p (v_1) & \dots & \omega^p (v_p) \end{pmatrix} .$$

□

Schließlich benötigen wir noch

**Satz 1.4.7** Sei  $\{\sigma^1, \dots, \sigma^d\}$  eine Basis von  $E^*$  und sei  $p \in \mathbb{N}$ . Dann bilden die Formen

$$\sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq d ,$$

eine Basis von  $\Lambda^p(E)$ . Das heißt, jedes  $\omega \in \Lambda^p(E)$  hat die Gestalt

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} \sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_p}$$

mit eindeutig bestimmten  $\omega_{i_1 \dots i_p} \in \mathbb{R}$ .

□

Aus dem letzten Satz folgt, dass

$$\dim \Lambda^p(E) = \binom{d}{p}$$

und dass  $\Lambda^p(E) = \{0\}$ , falls  $p > d$ .

Sei jetzt  $M$  wieder eine  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 1.4.8** Eine **Differentialform**  $\omega$  der **Stufe**  $p$  auf  $M$  ist eine Zuordnung

$$a \in M \mapsto \omega_a \in \Lambda^p(T_a M) .$$

Sie heißt **glatt**, falls für alle  $X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{X}(M)$  die durch

$$\omega(X_1, \dots, X_p)(a) = \omega_a(X_1(a), \dots, X_p(a))$$

definierte Funktion  $\omega(X_1, \dots, X_p) : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist. Den Raum aller glatten Differentialformen der Stufe  $p$  auf  $M$  bezeichnen wir mit  $\Omega^p(M)$ .

Die Räume  $\Omega^p(M)$  sind reelle (unendlichdimensionale) Vektorräume. Insbesondere ist

$$\Omega^0(M) = C^\infty(M) .$$

Außerdem können wir eine Funktion  $f \in C^\infty(M)$  und eine Form  $\omega \in \Omega^p(M)$  vermöge

$$(f \cdot \omega)_a = f(a) \cdot \omega_a \quad \text{für} \quad a \in M$$

miteinander multiplizieren.

Im folgenden werden wir statt "Differentialform der Stufe  $p$  auf  $M$ " einfach " $p$ -Form auf  $M$ " schreiben.

**Beispiel 1.4.9** Ist  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , so sei  $\eta_X \in \Omega^1(M)$  durch

$$(\eta_X)_a(v) = \langle X(a), v \rangle \quad \text{für } a \in M \quad \text{und } v \in T_a M$$

gegeben. Wie man leicht sieht, ist die so definierte Abbildung

$$X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \eta_X \in \Omega^1(M)$$

ein linearer Isomorphismus. □

**Beispiel 1.4.10** Wir definieren die 1-Formen  $dx^i$  auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, n$ , durch

$$(dx^i)_x \left( \frac{\partial}{\partial x^j}(x) \right) = \delta_{ij} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n \quad \text{und } j = 1, \dots, n.$$

Offensichtlich gilt  $dx^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . □

Das letzte Beispiel können wir folgendermaßen verallgemeinern.

**Beispiel 1.4.11** Sei  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$  eine Parametrisierung von  $M$ . Wir definieren 1-Formen  $dy^i$  auf  $\psi(W)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , durch

$$(dy^i)_a \left( \frac{\partial}{\partial y^j}(a) \right) = \delta_{ij} \quad \text{für } a \in \psi(W) \quad \text{und } j = 1, \dots, d.$$

Ist  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und sind  $X^1, \dots, X^d$  die Koeffizienten von  $X$  bezüglich  $\psi$ , so gilt

$$X^i = dy^i(X) \circ \psi.$$

Folglich ist  $dy^i \in \Omega^1(\psi(W))$  für  $i = 1, \dots, d$ . □

**Definition 1.4.12** Sei  $\omega^1 \in \Omega^p(M)$  und  $\omega^2 \in \Omega^q(M)$ . Die Form  $\omega^1 \wedge \omega^2 \in \Omega^{p+q}(M)$  ist durch

$$(\omega^1 \wedge \omega^2)_x = \omega_x^1 \wedge \omega_x^2$$

definiert. Für  $\omega^1 \in \Omega^p(M)$ ,  $\omega^2 \in \Omega^q(M)$  und  $X_1, \dots, X_{p+q} \in \mathfrak{X}(M)$  gilt also

$$\omega^1 \wedge \omega^2(X_1, \dots, X_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\tau \in S_{p+q}} \text{sign}(\tau) \omega^1(X_{\tau(1)}, \dots, X_{\tau(p)}) \omega^2(X_{\tau(p+1)}, \dots, X_{\tau(p+q)}).$$

Aus Satz 1.4.7 folgt, dass jede  $p$ -Form  $\omega$  auf  $U \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$  die Gestalt

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen  $\omega_{i_1 \dots i_p} : U \rightarrow \mathbb{R}$  hat. Dabei ist  $\omega$  genau dann glatt, wenn alle Funktionen  $\omega_{i_1 \dots i_p} : U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt sind. Analog sind für eine Parametrisierung  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$  von  $M$  und ein  $\omega \in \Omega^p(M)$  durch

$$\omega_{\psi(y)} = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p}(y) (dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p})_{\psi(y)}, \quad y \in W,$$

Funktionen  $\omega_{i_1 \dots i_p} \in C^\infty(W)$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq d$ , bestimmt. Diese Funktionen werden die **Koeffizienten von  $\omega$  bezüglich  $\psi$**  genannt. Offensichtlich ist

$$\omega_{i_1 \dots i_p} = \omega \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \right) \circ \psi. \quad (1.4.1)$$

Wir ordnen jetzt jeder Funktion  $f \in C^\infty(M)$  eine Form  $df \in \Omega^1(M)$  zu.

**Definition 1.4.13** Sei  $f \in C^\infty(M)$ . Wir definieren  $df \in \Omega^1(M)$  durch

$$(df)_a(v) = Df(a)(v) \quad \text{für } a \in M \quad \text{und } v \in T_aM .$$

**Lemma 1.4.14** Sei  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$  eine Parametrisierung von  $M$  und sei  $f \in C^\infty(M)$ . Die Koeffizienten von  $df$  bezüglich  $\psi$  sind dann

$$(df)_i = \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^i} .$$

*Beweis.* Für die Koeffizienten  $(df)_i$  von  $df$  bezüglich  $\psi$  haben wir (vgl. (1.4.1) und Satz 1.2.17)

$$(df)_i = df \left( \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \circ \psi = \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y^i} , \quad i = 1, \dots, d .$$

□

**Beispiel 1.4.15** Sei  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$  eine Parametrisierung von  $M$  und seien  $f_i \in C^\infty(\psi(W))$ ,  $i = 1, \dots, d$ , durch

$$f_i(\psi(y)) = y^i \quad \text{für } y \in W$$

gegeben. Dann ist

$$\frac{\partial(f_i \circ \psi)}{\partial y^j} = \delta_{ij} , \quad j = 1, \dots, d$$

woraus mit Lemma 1.4.14

$$df_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(f_i \circ \psi)}{\partial y^j} dy^j = dy^i$$

folgt. □

Wir wollen jetzt die Abbildung  $d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$  verallgemeinern und jeder Form  $\omega \in \Omega^p(M)$  eine Form  $d\omega \in \Omega^{p+1}(M)$  zuordnen. Dazu nehmen wir zunächst an, dass  $M = \psi(W)$  für eine Parametrisierung  $\psi$  von  $M$ . Ist dann  $\omega \in \Omega^p(M)$  und sind  $\omega_{i_1 \dots i_p} \in C^\infty(W)$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq d$ , die Koeffizienten von  $\omega$  bezüglich  $\psi$ , d.h. gilt

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} (\omega_{i_1 \dots i_p} \circ \psi^{-1}) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p} , \quad (1.4.2)$$

so setzen wir

$$\begin{aligned} d\omega &:= \sum_{i_1 < \dots < i_p} d(\omega_{i_1 \dots i_p} \circ \psi^{-1}) \wedge dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{j=1}^d \left( \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial y^j} \circ \psi^{-1} \right) dy^j \wedge dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p} . \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

**Satz 1.4.16** Die oben definierten Abbildungen  $d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$ ,  $p = 0, 1, \dots$ , haben folgende Eigenschaften.

(E1) *Linearität:* Für  $\omega^1, \omega^2 \in \Omega^p(M)$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  ist

$$d(\lambda_1 \omega^1 + \lambda_2 \omega^2) = \lambda_1 d\omega^1 + \lambda_2 d\omega^2 .$$

(E2) Für  $\omega = f \in \Omega^0(M)$  stimmt (1.4.3) mit der Definition 1.4.13 überein.

(E3) Produktregel: Für  $\omega^1 \in \Omega^p(M)$  und  $\omega^2 \in \Omega^q(M)$  ist

$$d(\omega^1 \wedge \omega^2) = (d\omega^1) \wedge \omega^2 + (-1)^p \omega^1 \wedge d\omega^2 .$$

(E4) Für alle  $\omega \in \Omega^p(M)$  gilt  $d(d\omega) = 0$ .

(E5) Die Abbildungen  $d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$ ,  $p = 0, 1, \dots$ , sind durch (E1) bis (E4) eindeutig bestimmt und unabhängig von der Wahl der Parametrisierung  $\psi$ .

*Beweis.* Die Eigenschaften (E1) und (E2) sind offensichtlich. Die Eigenschaft (E3) rechnet man direkt nach. Ist zum Beispiel  $f \in \Omega^0(M)$  und  $\omega \in \Omega^p(M)$ , so haben wir

$$\begin{aligned} d(f \wedge \omega) &= d(f \cdot \omega) \\ &= d \left( \sum_{i_1 < \dots < i_p} ((f \circ \psi) \cdot \omega_{i_1 \dots i_p}) \circ \psi^{-1} \right) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{j=1}^d \left( \frac{\partial ((f \circ \psi) \cdot \omega_{i_1 \dots i_p})}{\partial y^j} \circ \psi^{-1} \right) dy^j \wedge dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{j=1}^d \left[ \left( \frac{\partial (f \circ \psi)}{\partial y^j} \circ \psi^{-1} \right) \cdot (\omega_{i_1 \dots i_p} \circ \psi^{-1}) \right. \\ &\quad \left. + f \cdot \left( \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial y^j} \circ \psi^{-1} \right) \right] dy^j \wedge dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p} \\ &= \left( \sum_{j=1}^d \left( \frac{\partial (f \circ \psi)}{\partial y^j} \circ \psi^{-1} \right) dy^j \right) \wedge \sum_{i_1 < \dots < i_p} (\omega_{i_1 \dots i_p} \circ \psi^{-1}) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p} \\ &\quad + f \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{j=1}^d \left( \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial y^j} \circ \psi^{-1} \right) dy^j \wedge dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p} \\ &= df \wedge \omega + f \wedge d\omega . \end{aligned}$$

Aufgrund von (E1) und (E3) genügt es, (E4) für  $\omega = f \in \Omega^0(M)$  zu zeigen. Hier gilt

$$\begin{aligned} d(df) &= d \left( \sum_{j=1}^d \left( \frac{\partial (f \circ \psi)}{\partial y^j} \circ \psi^{-1} \right) dy^j \right) = \sum_{i,j=1}^d \left( \frac{\partial^2 (f \circ \psi)}{\partial y^i \partial y^j} \circ \psi^{-1} \right) dy^i \wedge dy^j \\ &= \sum_{i < j} \left[ \frac{\partial^2 (f \circ \psi)}{\partial y^i \partial y^j} \circ \psi^{-1} - \frac{\partial^2 (f \circ \psi)}{\partial y^j \partial y^i} \circ \psi^{-1} \right] dy^i \wedge dy^j = 0 . \end{aligned}$$

Zum Beweis von (E5) leitet man die Beziehung (1.4.3) aus (1.4.2) unter alleiniger Benutzung von (E1) bis (E4) und unter Beachtung von Beispiel 1.4.15 ab.  $\square$

Sei die Untermannigfaltigkeit  $M$  nun wieder beliebig. Aus Satz 1.4.16 folgt, dass es eindeutig bestimmte Abbildungen  $d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$ ,  $p = 0, 1, \dots$ , mit (E1) bis (E4) gibt. Dabei ist  $d\omega \in \Omega^{p+1}(M)$  für ein  $\omega \in \Omega^p(M)$  auf der Bildmenge  $\psi(W)$  einer Parametrisierung  $\psi$  von  $M$  durch (1.4.3) bestimmt.

**Definition 1.4.17** Sei  $\omega \in \Omega^p(M)$ . Die Form  $d\omega \in \Omega^{p+1}(M)$  heißt das **äußere Differential** von  $\omega$ .

**Beispiel 1.4.18** Für die Form

$$\omega = \sin(x^1 x^4) dx^1 \wedge dx^3 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$$

ist

$$\begin{aligned} d\omega &= x^4 \cos(x^1 x^4) dx^1 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + x^1 \cos(x^1 x^4) dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ &= x^1 \cos(x^1 x^4) dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4 . \end{aligned}$$

□

**Beispiel 1.4.19** Wir betrachten  $S^2$  mit der Parametrisierung

$$\psi_N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi_N(y^1, y^2) = \frac{1}{|y|^2 + 1} (2y^1, 2y^2, |y|^2 - 1)$$

(vgl. Bsp. 1.3.4). Sei  $f \in C^\infty(S^2)$  gegeben durch  $f(a) = a^3$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f \circ \psi_N)}{\partial y^i}(y) &= \frac{\partial}{\partial y^i} \left( \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} \right) \\ &= \frac{2y^i (|y|^2 + 1) - 2y^i (|y|^2 - 1)}{(|y|^2 + 1)^2} \\ &= \frac{4y^i}{(|y|^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

für  $i = 1, 2$  und folglich

$$df = \frac{4}{(|y|^2 + 1)^2} (y^1 dy^1 + y^2 dy^2) .$$

□

**Beispiel 1.4.20** Sei  $X \in \mathfrak{X}(S^2)$  durch  $X(a) = (-a^2, a^1, 0)$  gegeben. Wir wollen das äußere Differential von  $\eta_X \in \Omega^1(S^2)$  (vgl. Beispiel 1.4.9) berechnen. Dazu benutzen wir wieder die Parametrisierung  $\psi_N \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  von  $S^2$ . Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^1} (\psi_N(y)) &= -\frac{2y^1}{(|y|^2 + 1)^2} (2y^1, 2y^2, |y|^2 - 1) + \frac{2}{|y|^2 + 1} (1, 0, y^1) , \\ \frac{\partial}{\partial y^2} (\psi_N(y)) &= -\frac{2y^2}{(|y|^2 + 1)^2} (2y^1, 2y^2, |y|^2 - 1) + \frac{2}{|y|^2 + 1} (0, 1, y^2) \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} -y^2 \frac{\partial}{\partial y^1} (\psi_N(y)) + y^1 \frac{\partial}{\partial y^2} (\psi_N(y)) &= \frac{1}{|y|^2 + 1} (-2y^2, 2y^1, 0) \\ &= X(\psi_N(y)) , \end{aligned}$$

d.h.

$$X = -y^2 \frac{\partial}{\partial y^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial y^2} .$$

Hieraus und aus

$$g_{ij} = \frac{4 \delta_{ij}}{(|y|^2 + 1)^2}$$

erhalten wir

$$\left\langle X, \frac{\partial}{\partial y^1} \right\rangle = -\frac{4y^2}{(|y|^2 + 1)^2} \quad \text{und} \quad \left\langle X, \frac{\partial}{\partial y^2} \right\rangle = \frac{4y^1}{(|y|^2 + 1)^2} .$$

Demnach ist

$$\eta_X = \frac{4}{(|y|^2 + 1)^2} (-y^2 dy^1 + y^1 dy^2) ,$$

woraus wir

$$\begin{aligned}
d\eta_X &= d\left(\frac{4}{(|y|^2+1)^2}\right) \wedge (-y^2 dy^1 + y^1 dy^2) + \frac{4}{(|y|^2+1)^2} d(-y^2 dy^1 + y^1 dy^2) \\
&= -\frac{16}{(|y|^2+1)^3} (y^1 dy^1 + y^2 dy^2) \wedge (-y^2 dy^1 + y^1 dy^2) \\
&\quad + \frac{4}{(|y|^2+1)^2} (-dy^2 \wedge dy^1 + dy^1 \wedge dy^2) \\
&= -\frac{16}{(|y|^2+1)^3} \left( (y^1)^2 dy^1 \wedge dy^2 - (y^2)^2 dy^2 \wedge dy^1 \right) + \frac{8}{(|y|^2+1)^2} dy^1 \wedge dy^2 \\
&= -\frac{8(|y|^2-1)}{(|y|^2+1)^3} dy^1 \wedge dy^2
\end{aligned}$$

ableiten. □

Zum Schluss dieses Abschnitts möchten wir noch das Lemma von Poincaré angeben. Dazu führen wir zunächst folgende Begriffe ein.

**Definition 1.4.21** Eine Form  $\omega \in \Omega^p(M)$  wird **geschlossen** genannt, falls  $d\omega = 0$ . Sie heißt **exakt**, falls eine Form  $\omega' \in \Omega^{p-1}(M)$  mit  $\omega = d\omega'$  existiert.

Aufgrund der Eigenschaft (E4) aus Satz 1.4.16 ist jede exakte Form auch geschlossen.

**Definition 1.4.22** Eine Menge  $U \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$  heißt **sternförmig**, falls es ein solches  $x_0 \in U$  gibt, dass für alle  $x \in U$  die Verbindungsstrecke  $\overline{x_0 x}$  von  $x_0$  und  $x$  in  $U$  enthalten ist.

**Satz 1.4.23 (Lemma von Poincaré)** Sei  $U \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$  sternförmig. Dann ist eine Form  $\omega \in \Omega^p(U)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , genau dann geschlossen, wenn sie exakt ist.

*Beweis.* Siehe [1], Abschnitt 2.2 oder [7] Abschnitt III.4. □

**Folgerung 1.4.24** Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\omega \in \Omega^p(M)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , geschlossen. Dann ist die Differentialgleichung  $d\omega' = \omega$  lokal lösbar, d.h. zu jedem  $a \in M$  existieren ein  $U \in \mathfrak{A}(a)$  und ein  $\omega' \in \Omega^{p-1}(M \cap U)$  derart, dass

$$d\omega' = \omega \quad \text{auf } M \cap U .$$

□

## 1.5 Orientierung und Volumenform

Bezeichne  $M$  wie bisher eine  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ . Wir definieren zunächst, wann  $M$  orientierbar bzw. orientiert ist.

**Definition 1.5.1** Sei  $\Omega^{d,*}(M)$  die Menge der nirgends verschwindenden glatten  $d$ -Formen auf  $M$ , d.h.

$$\Omega^{d,*}(M) = \{ \omega \in \Omega^d(M) : \omega_a \neq 0 \quad \text{für alle } a \in M \} .$$

$M$  heißt **orientierbar**, falls  $\Omega^{d,*}(M) \neq \emptyset$ .

**Beispiel 1.5.2** Jedes  $U \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$  ist orientierbar, denn  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \in \Omega^{d,*}(U)$ . □

Sind  $\omega^1, \omega^2 \in \Omega^{d,*}(M)$ , so existiert aufgrund von Satz 1.4.7 ein  $f \in C^\infty(M)$  mit

$$\omega_a^2 = f(a)\omega_a^1 \quad \text{für alle } a \in M. \quad (1.5.1)$$

Dabei gilt trivialerweise

$$f(a) \neq 0 \quad \text{für alle } a \in M.$$

Wir benutzen dies für die Definition einer Äquivalenzrelation auf  $\Omega^{d,*}(M)$ .

**Definition 1.5.3** Sei  $M$  orientierbar. Wir nennen  $\omega^1, \omega^2 \in \Omega^{d,*}(M)$  **orientierungsäquivalent**, falls die durch (1.5.1) bestimmte Funktion  $f \in C^\infty(M)$  der Bedingung

$$f(a) > 0 \quad \text{für alle } a \in M$$

genügt. Eine **Orientierung**  $O_M$  von  $M$  ist eine Äquivalenzklasse der eben definierten Äquivalenzrelation. Die Untermannigfaltigkeit  $M$  heißt **orientiert**, falls eine Orientierung  $O_M$  von  $M$  fixiert ist.

**Bemerkung 1.5.4** (i) Eine zusammenhängende orientierbare Untermannigfaltigkeit besitzt genau zwei Orientierungen.

(ii) Eine Orientierung  $O_M$  von  $M$  induziert wie folgt für jedes  $a \in M$  eine Orientierung  $O_{M,a}$  des Tangentialraumes  $T_aM$ . Ist  $\omega \in O_M$  und ist  $\{v_1, \dots, v_d\}$  eine Basis von  $T_aM$ , so ist  $(v_1, \dots, v_d) \in O_{M,a}$  genau dann, wenn  $\omega_a(v_1, \dots, v_d) > 0$ .

□

Für die weiteren Überlegungen benötigen wir noch

**Definition 1.5.5** Sei  $O_M$  eine Orientierung von  $M$ . Eine Parametrisierung  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$  von  $M$  heißt **verträglich mit**  $O_M$ , falls

$$\left( \frac{\partial}{\partial y^1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial y^d}(a) \right) \in O_{M,a} \quad \text{für alle } a \in \psi(W).$$

Ist die Untermannigfaltigkeit  $M$  orientiert, so kann man ihr folgendermaßen in kanonischer Weise eine nirgends verschwindende  $d$ -Form zuordnen.

**Definition 1.5.6** Sei  $M$  orientiert und sei  $O_M$  die fixierte Orientierung von  $M$ . Wir definieren  $dM \in \Omega^d(M)$  durch

$$(dM)_a(v_1, \dots, v_d) = \det \begin{pmatrix} \langle w_1, v_1 \rangle & \dots & \langle w_1, v_d \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle w_d, v_1 \rangle & \dots & \langle w_d, v_d \rangle \end{pmatrix} \quad \text{für } a \in M \quad \text{und } v_1, \dots, v_d \in T_aM,$$

wobei  $\{w_1, \dots, w_d\}$  eine Orthonormalbasis von  $T_aM$  mit  $(w_1, \dots, w_d) \in O_{M,a}$  ist. Die Form  $dM$  wird die **Volumenform von  $M$**  genannt.

**Bemerkung 1.5.7** (i) Obwohl die Volumenform traditionell mit  $dM$  bezeichnet wird, ist sie i.allg. nicht das äußere Differential einer  $(d-1)$ -Form.

(ii) Da für  $\{w_1, \dots, w_d\}$  wie in Definition 1.5.6

$$(dM)_a(w_1, \dots, w_d) = 1$$

gilt, ist  $dM$  in der fixierten Orientierung  $O_M$  von  $M$ .

□

Zur Berechnung der Volumenform kann man folgenden Satz nutzen. Dabei bezeichnet  $g(y)$  wieder die Determinante der aus den Koeffizienten  $g_{ij}(y)$  gebildeten Matrix (vgl. Satz 1.3.13).

**Satz 1.5.8** *Sei  $M$  orientiert, sei  $O_M$  die fixierte Orientierung und sei  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$  eine mit  $O_M$  verträgliche Parametrisierung von  $M$ . Dann gilt*

$$(\mathrm{d}M)_{\psi(y)} = \sqrt{g(y)} (\mathrm{d}y^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y^d)_{\psi(y)} \quad \text{für alle } y \in W .$$

*Beweis.* Sei  $y \in W$  fixiert und sei  $\{w_1, \dots, w_d\}$  eine Orthonormalbasis von  $T_{\psi(y)}M$  mit  $(w_1, \dots, w_d) \in O_{M, \psi(y)}$ . Für die durch

$$(\mathrm{d}M)_{\psi(y)} = \lambda (\mathrm{d}y^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y^d)_{\psi(y)}$$

gegebene reelle Zahl  $\lambda$  haben wir dann

$$\begin{aligned} \lambda &= (\mathrm{d}M)_{\psi(y)} \left( \frac{\partial}{\partial y^1}(\psi(y)), \dots, \frac{\partial}{\partial y^d}(\psi(y)) \right) \\ &= \det \left( \left( \left\langle w_i, \frac{\partial}{\partial y^j}(\psi(y)) \right\rangle \right)_{i,j=1,\dots,d} \right) . \end{aligned}$$

Dies impliziert, dass

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \det \left( \left( \left\langle \frac{\partial}{\partial y^i}(\psi(y)), w_j \right\rangle \right)_{i,j=1,\dots,d} \right) \cdot \det \left( \left( \left\langle w_j, \frac{\partial}{\partial y^k}(\psi(y)) \right\rangle \right)_{j,k=1,\dots,d} \right) \\ &= \det \left( \left( \sum_{j=1}^d \left\langle \frac{\partial}{\partial y^i}(\psi(y)), w_j \right\rangle \left\langle w_j, \frac{\partial}{\partial y^k}(\psi(y)) \right\rangle \right)_{i,k=1,\dots,d} \right) \\ &= \det \left( \left( \left\langle \sum_{j=1}^d \left\langle \frac{\partial}{\partial y^i}(\psi(y)), w_j \right\rangle w_j, \frac{\partial}{\partial y^k}(\psi(y)) \right\rangle \right)_{i,k=1,\dots,d} \right) \\ &= \det \left( \left( \left\langle \frac{\partial}{\partial y^i}(\psi(y)), \frac{\partial}{\partial y^k}(\psi(y)) \right\rangle \right)_{i,k=1,\dots,d} \right) \\ &= \det \left( (g_{ik}(y))_{i,k=1,\dots,d} \right) \\ &= g(y) . \end{aligned}$$

Da  $\mathrm{d}M \in O_M$  und  $\psi$  mit  $O_M$  verträglich ist, muss außerdem  $\lambda > 0$  gelten. Folglich ist

$$\lambda = \sqrt{g(y)} .$$

□

**Bemerkung 1.5.9** Aus Satz 1.5.8 folgt insbesondere, dass die Definition 1.5.6 nicht von der Wahl der Orthonormalbasis  $\{w_1, \dots, w_d\}$  abhängt. Ist also  $\{w_1, \dots, w_d\}$  irgendeine Orthonormalbasis von  $T_a M$  mit  $(w_1, \dots, w_d) \in O_{M,a}$  und ist  $\omega_a \in \Lambda^d(T_a M)$  derart, dass

$$\omega_a(w_1, \dots, w_d) = 1 ,$$

so gilt bereits  $\omega_a = (\mathrm{d}M)_a$ .

□

Ist  $U \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ , so sei im folgenden als Orientierung  $O_U$  von  $U$  die Orientierung fixiert, die die Form  $\mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n$  enthält. Diese Form ist dann auch die Volumenform von  $U$ , also

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n .$$

**Beispiel 1.5.10** Für die Parametrisierung

$$\psi : ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi(y^1, y^2) = (y^1 \cos(y^2), y^1 \sin(y^2)),$$

von  $\mathbb{R}^2$  gilt

$$(dx^1 \wedge dx^2)_{\psi(y)} \left( \frac{\partial}{\partial y^1}(\psi(y)), \frac{\partial}{\partial y^2}(\psi(y)) \right) = y^1 \cos^2(y^2) + y^1 \sin^2(y^2) = y^1 > 0.$$

Also ist  $\psi$  verträglich mit  $O_{\mathbb{R}^2}$  und die Volumenform von  $\mathbb{R}^2$  hat in Polarkoordinaten  $(y^1, y^2)$  die Gestalt

$$d\mathbb{R}^2 = y^1 dy^1 \wedge dy^2.$$

□

In den nächsten beiden Sätzen charakterisieren wir die Orientierbarkeit und die Volumenform von **Hyperflächen**, d.h. von  $(n-1)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^n$  mit Hilfe von so genannten Einheitsnormalenfeldern.

**Definition 1.5.11** Ein glattes Einheitsnormalenfeld auf  $M$  ist eine glatte Abbildung  $\mathbf{n} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$|\mathbf{n}(a)| = 1 \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{n}(a), v \rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad a \in M \quad \text{und} \quad v \in T_a M.$$

**Definition 1.5.12** Seien  $M$  und  $M'$  Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^n$  mit  $M \subseteq M'$ . Für eine Abbildung  $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$  mit  $F(a) \in T_a M'$  für alle  $a \in M$  und eine Form  $\omega \in \Omega^p(M')$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , definieren wir  $i_F \omega \in \Omega^{p-1}(M)$  durch

$$(i_F \omega)_a(v_1, \dots, v_{p-1}) = \omega_a(F(a), v_1, \dots, v_{p-1}) \quad \text{für} \quad a \in M \quad \text{und} \quad v_1, \dots, v_{p-1} \in T_a M.$$

**Satz 1.5.13** Eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M$  von  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann orientierbar, wenn ein glattes Einheitsnormalenfeld  $\mathbf{n}$  auf  $M$  existiert.

*Beweis.* Sei  $\mathbf{n}$  ein glattes Einheitsnormalenfeld auf  $M$ . Dann ist  $i_{\mathbf{n}} d\mathbb{R}^n \in \Omega^{n-1,*}(M)$ . Ist nämlich  $a \in M$  und ist  $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$  eine Orthonormalbasis von  $T_a M$ , so ist  $\{\mathbf{n}(a), w_1, \dots, w_{n-1}\}$  eine Orthonormalbasis von  $T_a \mathbb{R}^n$  und folglich

$$|(i_{\mathbf{n}} d\mathbb{R}^n)_a(w_1, \dots, w_{n-1})| = |(d\mathbb{R}^n)_a(\mathbf{n}(a), w_1, \dots, w_{n-1})| = 1.$$

Damit ist eine Richtung der Behauptung gezeigt.

Zum Beweis der anderen Richtung nehmen wir an, dass wir eine Orientierung  $O_M$  von  $M$  haben. Sei  $a \in M$ . Da das orthogonale Komplement  $(T_a M)^\perp$  von  $T_a M$  in  $\mathbb{R}^n$  eindimensional ist, ist durch die Bedingungen

- (a)  $\mathbf{n}(a) \in (T_a M)^\perp$ ,
- (b)  $|\mathbf{n}(a)| = 1$  und
- (c)  $(\mathbf{n}(a), w_1, \dots, w_{n-1}) \in O_{\mathbb{R}^n, a}$  für  $(w_1, \dots, w_{n-1}) \in O_{M, a}$

genau ein Vektor  $\mathbf{n}(a) \in \mathbb{R}^n$  bestimmt. Auf diese Weise erhält man ein glattes Einheitsnormalenfeld  $\mathbf{n}$  auf  $M$ . □

Sind  $M$  und  $\mathbf{n}$  wie in Satz 1.5.14, so nennen wir die Äquivalenzklasse von  $i_{\mathbf{n}} d\mathbb{R}^n \in \Omega^{n-1,*}(M)$  die **von  $\mathbf{n}$  induzierte Orientierung** von  $M$ .

**Satz 1.5.14** Sei  $M$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\mathbf{n}$  ein glattes Einheitsnormalenfeld auf  $M$ . Bezüglich der von  $\mathbf{n}$  induzierten Orientierung ist dann

$$dM = i_{\mathbf{n}} d\mathbb{R}^n .$$

*Beweis.* Dies folgt aus dem ersten Teil des Beweises von Satz 1.5.13 und Bemerkung 1.5.9.  $\square$

**Beispiel 1.5.15** Auf  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  ist durch

$$\mathbf{n}(a) = a$$

ein glattes Einheitsnormalenfeld definiert. Folglich ist  $S^n$  orientierbar. Sei  $O_{S^n}$  die von  $\mathbf{n}$  induzierte Orientierung von  $S^n$ . Wir gehen der Frage nach, ob die Parametrisierung  $\psi_N \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$  von  $S^n$  (siehe Beispiel 1.3.4) verträglich mit  $O_{S^n}$  ist. Dazu genügt es zu untersuchen, ob für ein  $a \in \psi_N(\mathbb{R}^n)$

$$\left( \mathbf{n}(a), \frac{\partial}{\partial y^1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}(a) \right) \in O_{\mathbb{R}^{n+1}, a}$$

gilt. Wir wählen als  $a$  den Südpol

$$a_S := (0, \dots, 0, -1) = \psi_N(0) .$$

In diesem Punkt haben wir

$$\mathbf{n}(a_S) = -e_{n+1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y^i}(a_S) = 2e_i \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n .$$

Folglich ist

$$\left( \mathbf{n}(a_S), \frac{\partial}{\partial y^1}(a_S), \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}(a_S) \right) \in O_{\mathbb{R}^{n+1}, a}$$

genau dann, wenn  $n$  ungerade ist, und genau in diesen Fällen ist  $\psi_N$  mit  $O_{S^n}$  verträglich. Für die Volumenform von  $S^n$  bezüglich  $O_{S^n}$  gilt nach Satz 1.5.8 und Beispiel 1.3.4 somit

$$dS^n = (-1)^{n+1} \left( \frac{2}{|y|^2 + 1} \right)^{2n} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n .$$

$\square$

**Beispiel 1.5.16** Das **Möbius-Band**, beschrieben durch

$$M = \{F(y^1, y^2) : y^1 \in [-1/2, 1/2], y^2 \in [0, \pi]\}$$

mit

$$F(y^1, y^2) = ((1 + y^1 \cos(y^2)) \cos(2y^2), (1 + y^1 \cos(y^2)) \sin(2y^2), y^1 \sin(y^2)) ,$$

ist nicht orientierbar. Zum Nachweis betrachten wir den glatten Weg  $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = F(0, t)$ , auf  $M$ . Dieser Weg ist geschlossen, d.h. es ist

$$\gamma(\pi) = \gamma(0) .$$

Ist jedoch  $\mathbf{n}_\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine stetige Abbildung mit

$$|\mathbf{n}_\gamma(t)| = 1 \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_\gamma(t) \in (T_{\gamma(t)}M)^\perp \quad \text{für alle} \quad t \in [0, \pi] ,$$

so muss

$$\mathbf{n}_\gamma(\pi) = -\mathbf{n}_\gamma(0)$$

gelten. Folglich existiert kein glattes Einheitsnormalenfeld auf  $M$ , was nach Satz 1.5.13 impliziert, dass  $M$  nicht orientierbar ist.  $\square$

Der nächste Satz stellt eine Beziehung zwischen der Volumenform und der Divergenz eines Vektorfeldes her.

**Satz 1.5.17** *Sei  $M$  eine orientierte  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ , sei  $dM$  ihre Volumenform und sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Dann gilt*

$$d(i_X dM) = \operatorname{div}(X) \cdot dM .$$

*Beweis.* Sei  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$  eine Parametrisierung von  $M$  und seien  $X^1, \dots, X^d$  die Koeffizienten von  $X$  bezüglich  $\psi$ . Auf  $\psi(W) \subseteq M$  haben wir dann

$$X = \sum_{i=1}^d (X^i \circ \psi^{-1}) \frac{\partial}{\partial y^i}$$

und (siehe Satz 1.5.8)

$$dM = (\sqrt{g} \circ \psi^{-1}) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^d .$$

Da

$$\begin{aligned} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^d \left( \frac{\partial}{\partial y^i}, Y_1, \dots, Y_{d-1} \right) \\ = (-1)^{i-1} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{i-1} \wedge dy^{i+1} \wedge \dots \wedge dy^d (Y_1, \dots, Y_{d-1}) \end{aligned}$$

für  $i = 1, \dots, d$  und  $Y_1, \dots, Y_{d-1} \in \mathfrak{X}(M)$ , was man z.B. mittels Lemma 1.4.6 überprüft, folgt

$$i_X dM = \sum_{i=1}^d (-1)^{i-1} (\sqrt{g} \circ \psi^{-1}) (X^i \circ \psi^{-1}) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{i-1} \wedge dy^{i+1} \wedge \dots \wedge dy^d .$$

Also ist auf  $\psi(W)$

$$\begin{aligned} d(i_X dM) &= \sum_{i,j=1}^d (-1)^{i-1} \left( \frac{\partial (\sqrt{g} X^i)}{\partial y^j} \circ \psi^{-1} \right) dy^j \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{i-1} \wedge dy^{i+1} \wedge \dots \wedge dy^d \\ &= \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial (\sqrt{g} X^i)}{\partial y^i} \circ \psi^{-1} \right) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^d , \end{aligned}$$

was wegen

$$\operatorname{div}(X) \circ \psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^d \frac{\partial (\sqrt{g} X^i)}{\partial y^i}$$

(siehe Satz 1.3.13) die gewünschte Formel liefert.  $\square$

Für den Rest dieses Abschnitts setzen wir voraus, dass  $\partial M \neq \emptyset$ . Wir wollen beschreiben, wie eine Orientierung von  $M$  eine Orientierung von  $\partial M$  induziert und wie die Volumenformen von  $M$  und  $\partial M$  in Beziehung stehen. Dazu definieren wir folgendermaßen ein glattes Einheitsnormalenfeld auf  $\partial M$ .

**Definition 1.5.18** *Sei  $\nu : \partial M \rightarrow \mathbb{R}^n$  dadurch definiert, dass für jedes  $a \in \partial M$  die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind.*

(i)  $\nu(a) \in T_a M$ .

(ii) Für alle  $v \in T_a \partial M$  ist  $\langle \nu(a), v \rangle = 0$ .

(iii)  $|\nu(a)| = 1$ .

(iv) Es existiert ein glatter Weg  $\gamma : ]-\varepsilon, 0[ \rightarrow M$  für ein  $\varepsilon > 0$  mit

$$\gamma(0) = a \quad \text{und} \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = \nu(a).$$

Die Abbildung  $\nu$  heißt das **äußere Einheitsnormalenfeld von  $M$** .

**Beispiel 1.5.19** Sei

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| \leq 1\} \quad \text{und} \quad M_2 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| \geq 1\}.$$

Dann ist  $\partial M_1 = \partial M_2 = S^n$ . Das äußere Einheitsnormalenfeld an  $M_1$  ist

$$\nu_1 : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad \nu_1(a) = a.$$

Das äußere Einheitsnormalenfeld an  $M_2$  ist

$$\nu_2 : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad \nu_2(a) = -a.$$

□

**Lemma 1.5.20** Sei  $O_M$  eine Orientierung von  $M$ , sei  $\omega \in O_M$  und sei  $\nu : \partial M \rightarrow \mathbb{R}^n$  das äußere Einheitsnormalenfeld von  $M$ . Dann ist

$$i_\nu \omega \in \Omega^{d-1,*}(\partial M).$$

*Beweis.* Ist  $a \in \partial M$  und ist  $\{v_1, \dots, v_{d-1}\}$  eine Basis von  $T_a \partial M$ , so ist  $\{\nu(a), v_1, \dots, v_{d-1}\}$  eine Basis von  $T_a M$ , woraus wegen  $\omega_a \neq 0$

$$(i_\nu \omega)_a(v_1, \dots, v_{d-1}) = \omega_a(\nu(a), v_1, \dots, v_{d-1}) \neq 0$$

folgt.

□

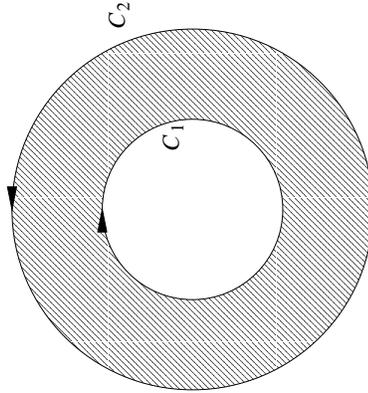
**Definition 1.5.21** Sei  $M$  orientiert, sei  $O_M$  die fixierte Orientierung von  $M$  und sei  $\nu$  das äußere Einheitsnormalfeld an  $M$ . Dann heißt die Äquivalenzklasse von  $i_\nu \omega \in \Omega^{d-1,*}(\partial M)$  für ein  $\omega \in O_M$  die **von  $M$  induzierte Orientierung von  $\partial M$** .

**Bemerkung 1.5.22** Ist  $M$  mit der Orientierung  $O_M$  versehen, ist  $O_{\partial M}$  die von  $M$  induzierte Orientierung von  $\partial M$  und ist  $\{v_1, \dots, v_{d-1}\}$  eine Basis von  $T_a \partial M$ , so gilt  $(v_1, \dots, v_{d-1}) \in O_{\partial M, a}$  genau dann, wenn  $(\nu(a), v_1, \dots, v_{d-1}) \in O_{M, a}$ . □

**Beispiel 1.5.23** Sei

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |x| \leq 2\}$$

in üblicher Weise orientiert, d.h.  $dx^1 \wedge dx^2$  liegt in der Orientierung von  $M$ . Die von  $M$  induzierte Orientierung auf  $\partial M$  ist derart, dass  $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$  negativ und  $C_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 2\}$  positiv orientiert ist.



□

Wir beenden diesen Abschnitt mit

**Satz 1.5.24** Sei  $M$  orientiert und sei  $dM$  die Volumenform von  $M$ . Für die Volumenform  $d(\partial M)$  von  $\partial M$  mit der von  $M$  induzierten Orientierung  $O_{\partial M}$  gilt

$$d(\partial M) = i_\nu dM .$$

*Beweis.* Sei  $a \in \partial M$  und sei  $\{v_1, \dots, v_{d-1}\}$  eine Orthonormalbasis von  $T_a \partial M$  mit

$$(v_1, \dots, v_{d-1}) \in O_{\partial M, a} . \quad (1.5.2)$$

Da  $dM$  in der fixierten Orientierung von  $M$  liegt, ist (1.5.2) genau dann der Fall, wenn

$$(i_\nu dM)_a (v_1, \dots, v_{d-1}) = (dM)_a (\nu(a), v_1, \dots, v_{d-1}) > 0 .$$

Da  $\{\nu(a), v_1, \dots, v_{d-1}\}$  eine Orthonormalbasis von  $T_a M$  ist, gilt außerdem

$$|(dM)_a (\nu(a), v_1, \dots, v_{d-1})| = 1 .$$

Folglich ist

$$(i_\nu dM)_a (v_1, \dots, v_{d-1}) = 1 ,$$

was mit Bemerkung 1.5.9

$$(i_\nu dM)_a = (d(\partial M))_a$$

liefert. □

## 1.6 Integration von $d$ -Formen und der Satz von Stokes

Wir beginnen mit der folgenden Überlegung. Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  und seien  $\psi_1 \in C^\infty(W_1, \mathbb{R}^n)$  und  $\psi_2 \in C^\infty(W_2, \mathbb{R}^n)$  zwei Parametrisierungen von  $M$  mit

$$\psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2) \neq \emptyset .$$

Seien  $y = (y^1, \dots, y^d)$  die Koordinaten bezüglich  $\psi_1$  und  $z = (z^1, \dots, z^d)$  die Koordinaten bezüglich  $\psi_2$  und sei

$$\psi_{21} : \psi_1^{-1}(\psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2)) \rightarrow \psi_2^{-1}(\psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2))$$

wiederum durch

$$\psi_{21}(y) = \psi_2^{-1}(\psi_1(y))$$

gegeben. Dann haben wir

**Lemma 1.6.1** *Für alle  $a \in \psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2)$  gilt*

$$(dz^1 \wedge \dots \wedge dz^d)_a = \det(D\psi_{21}(\psi_1^{-1}(a))) (dy^1 \wedge \dots \wedge dy^d)_a .$$

*Beweis.* Sei  $a \in \psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2)$  fixiert und sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  durch

$$(dz^1 \wedge \dots \wedge dz^d)_a = \lambda (dy^1 \wedge \dots \wedge dy^d)_a$$

bestimmt. Dann ist

$$\lambda = (dz^1 \wedge \dots \wedge dz^d)_a \left( \frac{\partial}{\partial y^1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial y^d}(a) \right) .$$

Da nach Satz 1.2.18(i)

$$\frac{\partial}{\partial y^j}(a) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial \psi_{21}^i}{\partial y^j}(\psi_1^{-1}(a)) \frac{\partial}{\partial z^i}(a) \quad \text{für } j = 1, \dots, d$$

und da somit

$$(dz^i)_a \left( \frac{\partial}{\partial y^j}(a) \right) = \frac{\partial \psi_{21}^i}{\partial y^j}(\psi_1^{-1}(a)) \quad \text{für } i, j = 1, \dots, d ,$$

folgt wegen Lemma 1.4.6, dass

$$\begin{aligned} \lambda &= \det \left( \left( (dz^i)_a \left( \frac{\partial}{\partial y^j}(a) \right) \right)_{i,j=1,\dots,d} \right) \\ &= \det \left( \left( \frac{\partial \psi_{21}^i}{\partial y^j}(\psi_1^{-1}(a)) \right)_{i,j=1,\dots,d} \right) \\ &= \det(D\psi_{21}(\psi_1^{-1}(a))) . \end{aligned}$$

□

Wir setzen jetzt voraus, dass  $M$  orientiert ist. Sei  $O_M$  die fixierte Orientierung.

**Definition 1.6.2** *Sei  $\omega \in \Omega^d(M)$  und sei  $B \subseteq M$  derart, dass  $B = \psi(A)$  für eine mit  $O_M$  verträgliche Parametrisierung  $\psi \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$  und eine Lebesgue-messbare Menge  $A \subseteq W$ . Wir definieren*

$$\int_B \omega := \int_A h \, d\mu ,$$

wobei  $\mu$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^d$  bezeichnet und  $h \in C^\infty(W)$  der Koeffizient von  $\omega$  bezüglich  $\psi$  ist, d.h.  $h$  ist durch

$$\omega = (h \circ \psi^{-1}) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^d$$

bestimmt.

Der nächste Satz besagt, dass die obige Definition nicht von der Wahl der Parametrisierung  $\psi$  abhängt.

**Satz 1.6.3** Seien  $\psi_1 \in C^\infty(W_1, \mathbb{R}^n)$  und  $\psi_2 \in C^\infty(W_2, \mathbb{R}^n)$  zwei mit  $O_M$  verträgliche Parametrisierungen von  $M$  und sei  $B \subseteq M$  derart, dass  $B = \psi_1(A_1) = \psi_2(A_2)$  für Lebesgue-messbare Mengen  $A_1 \subseteq W_1$  und  $A_2 \subseteq W_2$ . Desweiteren sei  $h_1 \in C^\infty(W_1)$  der Koeffizient einer Form  $\omega \in \Omega^d(M)$  bezüglich  $\psi_1$  und  $h_2 \in C^\infty(W_2)$  der Koeffizient von  $\omega$  bezüglich  $\psi_2$ . Dann gilt

$$\int_{A_1} h_1 \, d\mu = \int_{A_2} h_2 \, d\mu .$$

*Beweis.* Da sowohl  $\psi_1$  als auch  $\psi_2$  mit  $O_M$  verträglich ist, gilt nach Lemma 1.6.1

$$\det(D\psi_{21}(y)) > 0 \quad \text{für alle } y \in \psi_1^{-1}(\psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2)) .$$

Außerdem folgt aus diesem Lemma, dass

$$\begin{aligned} h_1 \circ \psi_1^{-1} &= (h_2 \circ \psi_2^{-1}) \cdot (\det(D\psi_{21}) \circ \psi_1^{-1}) \\ &= (h_1 \circ \psi_{21} \circ \psi_1^{-1}) \cdot (\det(D\psi_{21}) \circ \psi_1^{-1}) \end{aligned}$$

auf  $\psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2)$  und somit

$$h_1 = (h_2 \circ \psi_{21}) \cdot \det(D\psi_{21})$$

auf  $\psi_1^{-1}(\psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2))$ . Mit Hilfe der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral schließen wir

$$\begin{aligned} \int_{A_1} h_1 \, d\mu &= \int_{A_1} (h_2 \circ \psi_{21}) \cdot \det(D\psi_{21}) \, d\mu \\ &= \int_{A_1} (h_2 \circ \psi_{21}) \cdot |\det(D\psi_{21})| \, d\mu \\ &= \int_{\psi_{21}(A_1)} h_2 \, d\mu \\ &= \int_{A_2} h_2 \, d\mu . \end{aligned}$$

□

Sei ab jetzt  $M$  auch kompakt und bezeichne  $M^\circ$  das so genannte **Innere** von  $M$ , d.h.

$$M^\circ = M \setminus \partial M .$$

Dann können wir Parametrisierungen  $\psi_i \in C^\infty(W_i, \mathbb{R}^n)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , von  $M$  derart wählen, dass

(i) jedes  $\psi_i$  mit  $O_M$  verträglich ist und

(ii)  $M^\circ = \bigcup_{i=1}^m \psi_i(W_i)$  gilt.

Die obigen Betrachtungen implizieren, dass die folgende Definition nicht von der Wahl einer solcher Familie  $\{\psi_i\}_{i=1, \dots, m}$  abhängt.

**Definition 1.6.4** Sei  $\omega \in \Omega^d(M)$ . Wir definieren

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^m \int_{\psi_i(A_i)} \omega ,$$

wobei  $A_i \subseteq W_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , Lebesgue-messbare Mengen mit

$$\bigcup_{i=1}^m \psi_i(A_i) = M^\circ$$

und

$$\psi_i(A_i) \cap \psi_j(A_j) = \emptyset \quad \text{für } i \neq j$$

sind.

Der folgende Satz ist offensichtlich. Dabei bezeichnet  $-M$  die Untermannigfaltigkeit  $M$  mit der umgekehrten Orientierung.

**Satz 1.6.5** Für  $\omega^1, \omega^2, \omega \in \Omega^d(M)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$(i) \int_M (\omega^1 + \omega^2) = \int_M \omega^1 + \int_M \omega^2 ,$$

$$(ii) \int_M (\lambda\omega) = \lambda \int_M \omega ,$$

$$(iii) \int_{-M} \omega = - \int_M \omega .$$

□

Bevor wir zu Beispielen kommen, vereinbaren wir noch folgendes. Ist  $M'$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  mit  $M \subseteq M'$  und ist  $\omega \in \Omega^d(M')$ , so sei

$$\int_M \omega = \int_M (\omega|_M) ,$$

wobei  $\omega|_M \in \Omega^d(M)$  durch

$$(\omega|_M)_a(v_1, \dots, v_d) = \omega_a(v_1, \dots, v_d) \quad \text{für } a \in M \quad \text{und } v_1, \dots, v_d \in T_a M$$

gegeben ist.

**Beispiel 1.6.6** Sei

$$M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\}$$

für eine glatte Abbildung  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist

$$\psi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi(y) = (y, f(y)) ,$$

eine Parametrisierung von  $M$  mit  $\psi(]a, b[) = M^\circ$ . Sei  $M$  so orientiert, dass  $\psi$  verträglich mit der fixierten Orientierung ist, und sei

$$\omega = h_1 dx^1 + h_2 dx^2 \in \Omega^1(\mathbb{R}^2) .$$

Da

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x^1} + (f' \circ \psi^{-1}) \frac{\partial}{\partial x^2} ,$$

ist

$$\omega \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) = h_1 + h_2 \cdot (f' \circ \psi^{-1})$$

und somit

$$\omega|_M = (h_1 + h_2 \cdot (f' \circ \psi^{-1})) dy .$$

Also ist

$$\begin{aligned}\int_M \omega &= \int_a^b (h_1(\psi(y)) + h_2(\psi(y))f'(y)) dy \\ &= \int_a^b (h_1(y, f(y)) + h_2(y, f(y))f'(y)) dy.\end{aligned}$$

□

**Beispiel 1.6.7** Wir wollen zeigen, dass

$$\int_{S^2} dx^2 \wedge dx^3 = 0.$$

Dazu betrachten wir  $S^2$  mit sphärischen Koordinaten, d.h. mit der durch

$$\psi(\theta^1, \theta^2) = (\cos(\theta^1) \cos(\theta^2), \sin(\theta^1) \cos(\theta^2), \sin(\theta^2))$$

definierten Parametrisierung  $\psi : ]0, 2\pi[ \times ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Wie man leicht sieht, ist diese Parametrisierung verträglich mit der Orientierung von  $S^2$ . Außerdem ist

$$\begin{aligned}dx^2 \left( \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) &= \cos(\theta^1) \cos(\theta^2), \\ dx^2 \left( \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) &= -\sin(\theta^1) \sin(\theta^2), \\ dx^3 \left( \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) &= 0, \\ dx^3 \left( \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) &= \cos(\theta^2)\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}dx^2 \wedge dx^3 \left( \frac{\partial}{\partial \theta^1}, \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) &= dx^2 \left( \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) dx^3 \left( \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) - dx^2 \left( \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) dx^3 \left( \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \\ &= \cos(\theta^1) \cos^2(\theta^2).\end{aligned}$$

Demzufolge ist

$$(dx^2 \wedge dx^3) \Big|_{S^2} = \cos(\theta^1) \cos^2(\theta^2) d\theta^1 \wedge d\theta^2$$

und

$$\begin{aligned}\int_{S^2} dx^2 \wedge dx^3 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos(\theta^1) \cos^2(\theta^2) d\theta^1 d\theta^2 \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(\theta^1) d\theta^1 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta^2) d\theta^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Das Volumen von  $M$  können wir jetzt folgendermaßen definieren.

**Definition 1.6.8** Sei  $M$  eine kompakte und orientierte Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  und sei  $dM$  die Volumenform von  $M$ . Das Volumen von  $M$  ist

$$\text{vol}(M) = \int_M dM.$$

**Bemerkung 1.6.9** Das Volumen von  $M$  hängt nicht von der Wahl der Orientierung ab.  $\square$

**Beispiel 1.6.10** Sei  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit, d.h. eine glatte Kurve. Wir nehmen an, dass  $\Gamma$  kompakt und orientiert ist und dass  $\partial\Gamma \neq \emptyset$ , und wählen eine mit der Orientierung verträgliche Parametrisierung

$$\gamma : t \in ]a, b[ \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$$

von  $\Gamma$  derart, dass  $\gamma(]a, b[) = \Gamma^\circ$ . Die Volumenform von  $\Gamma$  ist dann

$$d\Gamma = |\gamma'(t)| dt$$

und wir haben folglich

$$\text{vol}(\Gamma) = \int_{\Gamma} d\Gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt .$$

Das Volumen der Kurve  $\Gamma$  ist also deren Länge.  $\square$

**Beispiel 1.6.11** Wir betrachten  $S^2$  mit der in Beispiel 1.6.7 angegebenen Parametrisierung. Die Koeffizienten der Riemannschen Metrik von  $S^2$  sind dann

$$\begin{aligned} g_{11}(\theta) &= \cos^2(\theta^2) , \\ g_{12}(\theta) &= g_{21}(\theta) = 0 , \\ g_{22}(\theta) &= 1 . \end{aligned}$$

Folglich ist

$$dS^2 = \cos(\theta^2) d\theta^1 \wedge d\theta^2 .$$

Für das Volumen von  $S^2$  erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \text{vol}(S^2) &= \int_{S^2} dS^2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos(\theta^2) d\theta^1 d\theta^2 \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta^2) d\theta^2 = 4\pi . \end{aligned}$$

$\square$

Zu den fundamentalen Resultaten der Vektoranalysis zählt

**Satz 1.6.12 (Satz von Stokes)** Sei  $M$  eine kompakte und orientierte  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  und sei der Rand  $\partial M$  mit der von  $M$  induzierten Orientierung versehen. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad \text{für alle } \omega \in \Omega^{d-1}(M) .$$

Ist insbesondere  $\partial M = \emptyset$ , so ist

$$\int_M d\omega = 0 \quad \text{für alle } \omega \in \Omega^{d-1}(M) .$$

*Beweis.* Siehe [1], Abschnitte 2.5 und 3.6 oder [7], Abschnitt III.3.  $\square$

**Bemerkung 1.6.13** Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist ein Spezialfall des Satzes von Stokes. Ist nämlich das Intervall  $[a, b]$  in üblicher Weise orientiert und ist  $f$  eine glatte Funktion auf  $[a, b]$ , d.h.  $f \in \Omega^0([a, b])$ , so ist

$$df = f'(x) dx$$

und somit

$$\int_{[a,b]} df = \int_a^b f'(x) dx .$$

Andererseits ist

$$\int_{\partial[a,b]} f = \int_{\{a,b\}} f = f(b) - f(a) ,$$

denn die von  $[a, b]$  induzierte Orientierung von  $\partial[a, b] = \{a, b\}$  ist so, dass dem Punkt  $b$  das Vorzeichen  $+$  und dem Punkt  $a$  das Vorzeichen  $-$  zugewiesen ist.  $\square$

**Beispiel 1.6.14** Sei  $\bar{B}^n \subseteq \mathbb{R}^n$  die abgeschlossene Einheitskugel, also

$$\bar{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\} .$$

Dann ist  $\partial\bar{B}^n = S^{n-1}$ . Da

$$d\bar{B}^n = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

und da

$$\nu : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n , \quad \nu(x) = \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x)$$

das äußere Einheitsnormalenfeld an  $\bar{B}^n$  ist, haben wir nach Satz 1.5.24

$$\begin{aligned} dS^n &= i_\nu d\bar{B}^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n . \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Stokes schließen wir, dass

$$\begin{aligned} \text{vol}(S^{n-1}) &= \int_{S^{n-1}} dS^{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{S^{n-1}} x^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\bar{B}^n} d(x^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\bar{B}^n} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= n \int_{\bar{B}^n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n , \end{aligned}$$

d.h.

$$\text{vol}(S^{n-1}) = n \cdot \text{vol}(\bar{B}^n) .$$

$\square$

## 1.7 Klassische Integralsätze

Im folgenden sei  $M$  eine orientierte und kompakte  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ . Das äußere Einheitsnormalenfeld an  $M$  sei wieder mit  $\nu$  bezeichnet. Außerdem sei  $\partial M$  mit der von  $M$  induzierten Orientierung versehen.

**Satz 1.7.1 (Gausscher Integralsatz)** Für alle  $X \in \mathfrak{X}(M)$  gilt

$$\int_M \text{div}(X) dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d(\partial M) .$$

*Beweis.* Sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Nach Satz 1.5.17 haben wir

$$\operatorname{div}(X) \, dM = d(i_X dM) \, ,$$

was mit dem Satz von Stokes

$$\int_M \operatorname{div}(X) \, dM = \int_M d(i_X dM) = \int_{\partial M} i_X dM \quad (1.7.1)$$

impliziert. Die Einschränkung  $X|_{\partial M}$  von  $X$  auf den Rand  $\partial M$  zerlegen wir in

$$X|_{\partial M} = \langle X, \nu \rangle \nu + X^* \quad \text{mit} \quad X^* \in \mathfrak{X}(\partial M) \, .$$

Da

$$i_{X^*} dM = 0 \, ,$$

erhalten wir, dass auf  $\partial M$

$$i_X dM = \langle X, \nu \rangle i_\nu dM + i_{X^*} dM = \langle X, \nu \rangle i_\nu dM \, . \quad (1.7.2)$$

Aus (1.7.1), (1.7.2) und der Tatsache, dass nach Satz 1.5.24

$$d(\partial M) = i_\nu dM \, ,$$

folgt schließlich

$$\int_M \operatorname{div}(X) \, dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle i_\nu dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d(\partial M) \, .$$

□

**Folgerung 1.7.2** Für alle  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und alle  $f \in C^\infty(M)$  gilt

$$\int_M (\langle \operatorname{grad}(f), X \rangle + f \cdot \operatorname{div}(X)) \, dM = \int_{\partial M} f \cdot \langle X, \nu \rangle \, d(\partial M) \, .$$

*Beweis.* Sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und sei  $f \in C^\infty(M)$ . Nach Satz 1.3.15 ist

$$\operatorname{div}(f \cdot X) = \langle \operatorname{grad}(f), X \rangle + f \cdot \operatorname{div}(X) \, .$$

Also erhalten wir die Behauptung, indem wir Satz 1.7.1 auf  $f \cdot X$  anwenden. □

**Satz 1.7.3 (Greensche Formeln)** Für alle  $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$  gilt

$$\int_M (f_1 \cdot \Delta(f_2) + \langle \operatorname{grad}(f_1), \operatorname{grad}(f_2) \rangle) \, dM = \int_{\partial M} f_1 \cdot \langle \operatorname{grad}(f_2), \nu \rangle \, d(\partial M) \quad (1.7.3)$$

und

$$\int_M (f_1 \cdot \Delta(f_2) - f_2 \cdot \Delta(f_1)) \, dM = \int_{\partial M} (f_1 \cdot \langle \operatorname{grad}(f_2), \nu \rangle - f_2 \cdot \langle \operatorname{grad}(f_1), \nu \rangle) \, d(\partial M) \, . \quad (1.7.4)$$

*Beweis.* Seien  $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ . Mit Hilfe von Folgerung 1.7.2 leiten wir

$$\begin{aligned} & \int_M (f_1 \cdot \Delta(f_2) + \langle \operatorname{grad}(f_1), \operatorname{grad}(f_2) \rangle) \, dM \\ &= \int_M (f_1 \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f_2)) + \langle \operatorname{grad}(f_1), \operatorname{grad}(f_2) \rangle) \, dM \\ &= \int_{\partial M} f_1 \cdot \langle \operatorname{grad}(f_2), \nu \rangle \, d(\partial M) \end{aligned}$$

ab. Damit ist (1.7.3) gezeigt. Die Gleichung (1.7.4) folgt aus (1.7.3). □

**Bemerkung 1.7.4** Mit der häufig verwendeten Schreibweise

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} := \langle \text{grad}(f), \nu \rangle \in C^\infty(\partial M) \quad \text{für } f \in C^\infty(M)$$

erhält (1.7.4) die Gestalt

$$\int_M (f_1 \cdot \Delta(f_2) - f_2 \cdot \Delta(f_1)) \, dM = \int_{\partial M} \left( f_1 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \nu} - f_2 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \nu} \right) \, d(\partial M).$$

Der Ausdruck  $\frac{\partial f}{\partial \nu}$  wird auch **äußere Normalableitung von  $f$**  genannt.  $\square$

**Folgerung 1.7.5** Ist  $\partial M = \emptyset$ , so haben wir:

(i) Für jedes  $X \in \mathfrak{X}(M)$  gilt

$$\int_M \text{div}(X) \, dM = 0.$$

(ii) Für alle  $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$  gilt

$$\int_M f_1 \cdot \Delta(f_2) \, dM = - \int_M \langle \text{grad}(f_1), \text{grad}(f_2) \rangle \, dM.$$

(iii) Für alle  $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$  gilt

$$\int_M f_1 \cdot \Delta(f_2) \, dM = \int_M \Delta(f_1) \cdot f_2 \, dM.$$

Das heißt, der Laplace-Operator ist bezüglich des  $L^2$ -Skalarproduktes symmetrisch.

*Beweis.* Dies ist eine unmittelbare Konsequenz der Sätze 1.7.1 und 1.7.3.  $\square$

**Folgerung 1.7.6** Sei  $M$  zusammenhängend, sei  $\partial M = \emptyset$  und sei  $f \in C^\infty(M)$  derart, dass

$$\Delta(f)(a) \geq 0 \quad \text{für alle } a \in M. \quad (1.7.5)$$

Dann ist  $f$  konstant.

*Beweis.* Nach Folgerung 1.7.5(iii) haben wir

$$\int_M \Delta(f) \, dM = \int_M 1 \cdot \Delta(f) \, dM = \int_M \Delta(1) \cdot f \, dM = 0.$$

Hieraus und aus (1.7.5) erhalten wir, dass

$$\Delta(f)(a) = 0 \quad \text{für alle } a \in M.$$

Dies impliziert mit Folgerung 1.7.5(ii), dass

$$\int_M |\text{grad}(f)|^2 \, dM = - \int_M f \cdot \Delta(f) = 0.$$

Somit gilt

$$\text{grad}(f)(a) = 0 \quad \text{für alle } a \in M.$$

Da  $M$  zusammenhängend ist, folgt die Behauptung.  $\square$

Im Rest dieses Abschnitts soll es um die ursprüngliche Version des Satzes von Stokes gehen. Dazu erinnern wir zunächst an folgende

**Definition 1.7.7** Sei  $U \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3)$  und sei

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + X^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \in \mathfrak{X}(U).$$

Die **Rotation von  $X$**  ist

$$\text{rot}(X) = \left( \frac{\partial X^3}{\partial x^2} - \frac{\partial X^2}{\partial x^3} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left( \frac{\partial X^1}{\partial x^3} - \frac{\partial X^3}{\partial x^1} \right) \frac{\partial}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial X^2}{\partial x^1} - \frac{\partial X^1}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^3} \in \mathfrak{X}(U).$$

Für das Rechnen mit der Rotation gelten folgende Regeln.

**Lemma 1.7.8** Sei  $U \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3)$ .

(i) Für alle  $X \in \mathfrak{X}(U)$  ist

$$\text{div}(\text{rot}(X)) = 0.$$

(ii) Für alle  $f \in C^\infty(U)$  ist

$$\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0.$$

(iii) Für  $X \in \mathfrak{X}(U)$  und  $f \in C^\infty(U)$  ist

$$\text{rot}(f \cdot X) = f \cdot \text{rot}(X) + \text{grad}(f) \times X.$$

Dabei bezeichnet  $\times$  das Vektorprodukt im  $\mathbb{R}^3$ .

(iv) Ist  $U$  sternförmig und ist  $X \in \mathfrak{X}(U)$  derart, dass  $\text{rot}(X) = 0$ , so existiert ein  $f \in C^\infty(U)$  mit  $X = \text{grad}(f)$ .

(v) Ist  $U$  sternförmig und ist  $X \in \mathfrak{X}(U)$  derart, dass  $\text{div}(X) = 0$ , so existiert ein  $Y \in \mathfrak{X}(U)$  mit  $X = \text{rot}(Y)$ .

*Beweis.* Die Behauptungen können auf die Eigenschaft (E3) des äußeren Differentials (siehe Satz 1.4.16) und das Lemma von Poincar'e (Satz 1.4.23) zurückgeführt werden (vgl. [1], Abschnitt 2.3).  $\square$

**Satz 1.7.9 (Klassischer Satz von Stokes)** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  eine kompakte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, sei  $\mathbf{n} = (\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2, \mathbf{n}^3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein glattes Einheitsnormalenfeld auf  $M$  und sei  $M$  mit der von  $\mathbf{n}$  induzierten Orientierung versehen. Desweiteren sei  $\tau = (\tau^1, \tau^2, \tau^3) \in \mathfrak{X}(\partial M)$  durch

$$|\tau(a)| = 1 \quad \text{und} \quad \tau(a) = O_{\partial M, a} \quad \text{für alle} \quad a \in \partial M$$

gegeben. Ist dann  $X \in \mathfrak{X}(U)$  für ein  $U \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3)$  mit  $M \subseteq U$ , so ist

$$\int_M \langle \text{rot}(X), \mathbf{n} \rangle dM = \int_{\partial M} \langle X, \tau \rangle d(\partial M).$$

*Beweis.* Sei  $\psi = (\psi^1, \psi^2, \psi^3) \in C^\infty(W, \mathbb{R}^3)$  eine mit der Orientierung verträgliche Parametrisierung von  $M$ . Dann ist

$$\mathbf{n}(\psi(y)) = \left| \frac{\partial \psi}{\partial y^1}(y) \times \frac{\partial \psi}{\partial y^2}(y) \right|^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial y^1}(y) \times \frac{\partial \psi}{\partial y^2}(y) \quad \text{für alle} \quad y \in W.$$

Da für das Vektorprodukt  $v_1 \times v_2$  zweier Vektoren  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$  die Beziehung

$$|v_1 \times v_2|^2 = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix}$$

gilt, ist

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial y^1}(y) \times \frac{\partial \psi}{\partial y^2}(y) \right| = \sqrt{g(y)} \quad \text{für alle } y \in W .$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}^1 dM)_{\psi(y)} &= \mathbf{n}^1(\psi(y))(dM)_{\psi(y)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g(y)}} \left( \frac{\partial \psi^2}{\partial y^1}(y) \frac{\partial \psi^3}{\partial y^2}(y) - \frac{\partial \psi^2}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \psi^3}{\partial y^1}(y) \right) \sqrt{g(y)} (dy^1 \wedge dy^2)_{\psi(y)} \\ &= \left( \frac{\partial \psi^2}{\partial y^1}(y) \frac{\partial \psi^3}{\partial y^2}(y) - \frac{\partial \psi^2}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \psi^3}{\partial y^1}(y) \right) (dy^1 \wedge dy^2)_{\psi(y)} \end{aligned}$$

für alle  $y \in W$ . Andererseits erhalten wir aus

$$dx^i|_M = \left( \frac{\partial \psi^i}{\partial y^1} \circ \psi^{-1} \right) dy^1 + \left( \frac{\partial \psi^i}{\partial y^2} \circ \psi^{-1} \right) dy^2 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 ,$$

dass

$$(dx^2 \wedge dx^3)|_M = \left( \left( \frac{\partial \psi^2}{\partial y^1} \circ \psi^{-1} \right) \left( \frac{\partial \psi^3}{\partial y^2} \circ \psi^{-1} \right) - \left( \frac{\partial \psi^2}{\partial y^2} \circ \psi^{-1} \right) \left( \frac{\partial \psi^3}{\partial y^1} \circ \psi^{-1} \right) \right) dy^1 \wedge dy^2 .$$

Also haben wir

$$\mathbf{n}^1 dM = (dx^2 \wedge dx^3)|_M . \quad (1.7.6)$$

Analog verifiziert man, dass

$$\mathbf{n}^2 dM = - (dx^1 \wedge dx^3)|_M \quad \text{und} \quad \mathbf{n}^3 dM = (dx^1 \wedge dx^2)|_M . \quad (1.7.7)$$

Sei nun  $U \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3)$  mit  $M \subseteq U$  und sei  $X \in \mathfrak{X}(U)$ . Wir setzen

$$\omega := X^1 dx^1 + X^2 dx^2 + X^3 dx^3 \in \Omega^1(U) .$$

Mit (1.7.6) und (1.7.7) sehen wir dann, dass

$$\begin{aligned} (d\omega)|_M &= \left( \frac{\partial X^3}{\partial x^2} - \frac{\partial X^2}{\partial x^3} \right) (dx^2 \wedge dx^3)|_M + \left( \frac{\partial X^3}{\partial x^1} - \frac{\partial X^1}{\partial x^3} \right) (dx^1 \wedge dx^3)|_M \\ &\quad + \left( \frac{\partial X^2}{\partial x^1} - \frac{\partial X^1}{\partial x^2} \right) (dx^1 \wedge dx^2)|_M \\ &= \langle \text{rot}(X), \mathbf{n} \rangle dM . \end{aligned}$$

Unter Benutzung des Satzes von Stokes und der Tatsache, dass

$$(d\omega)|_M = d(\omega|_M) ,$$

folgt

$$\int_M \langle \text{rot}(X), \mathbf{n} \rangle dM = \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega .$$

Schließlich liefert

$$d(\partial M)(\tau(a)) = 1 \quad \text{für alle } a \in \partial M ,$$

dass

$$dx^i|_{\partial M} = \tau^i d(\partial M) \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

und somit

$$\omega|_{\partial M} = (X^1 \tau^1 + X^2 \tau^2 + X^3 \tau^3) d(\partial M) = \langle X, \tau \rangle d(\partial M) .$$

□

## 1.8 Maxwell-Gleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir den  $\mathbb{R}^4$  als Raum-Zeit

$$\mathbb{R}^{1,3} = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \{(t, x) : t \in \mathbb{R}, x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3\} .$$

Wir verstehen also  $t$  als Zeitkoordinate und  $x^1, x^2, x^3$  als Raumkoordinaten.

Für die Überlegungen unten benötigen wir folgenden Operator.

**Definition 1.8.1** *Der Hodge-Operator  $*$  :  $\Omega^2(\mathbb{R}^{1,3}) \rightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^{1,3})$  ist durch folgende Bedingungen definiert.*

(i) Für alle  $\omega^1, \omega^2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^{1,3})$  und alle  $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^{1,3})$  ist

$$*(f_1\omega^1 + f_2\omega^2) = f_1 \cdot (*\omega^1) + f_2 \cdot (*\omega^2) .$$

(ii) Für alle  $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^{1,3})$  ist

$$**\omega = -\omega .$$

(iii) Es gilt

$$*(dt \wedge dx^1) = dx^2 \wedge dx^3, \quad *(dt \wedge dx^2) = -dx^1 \wedge dx^3, \quad *(dt \wedge dx^3) = dx^1 \wedge dx^2 .$$

Wir erinnern jetzt an die Maxwell-Gleichungen im Vakuum, d.h. mit verschwindender Ladungsdichte. Es sei

$$E : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad E(t, x) = (E_1(t, x), E_2(t, x), E_3(t, x)) ,$$

die elektrische und

$$B : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad B(t, x) = (B_1(t, x), B_2(t, x), B_3(t, x)) ,$$

die magnetische Feldstärke. Die 1. Gruppe der Maxwell-Gleichungen lautet dann

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div}(B) = 0 .$$

Die 2. Gruppe ist

$$\operatorname{rot}(B) - \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div}(E) = 0 .$$

Dabei sind  $\operatorname{rot}$  und  $\operatorname{div}$  bezüglich der Raumkoordinaten  $x^1, x^2, x^3$  gebildet. Es ist also

$$\operatorname{rot}(E) = \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3}, \frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1}, \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} \right)$$

und

$$\operatorname{div}(E) = \frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3}$$

und genauso für  $B$ .

Wir wollen die Maxwell-Gleichungen jetzt uminterpretieren. Dazu ordnen wir dem Paar  $(E, B)$  in eindeutiger Weise eine Form  $\omega_{E,B} \in \Omega^2(\mathbb{R}^{1,3})$  zu und zwar

$$\begin{aligned} \omega_{E,B} = & -E_1 dt \wedge dx^1 - E_2 dt \wedge dx^2 - E_3 dt \wedge dx^3 \\ & + B_1 dx^2 \wedge dx^3 - B_2 dx^1 \wedge dx^3 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 . \end{aligned}$$

Diese 2-Form wird jetzt als **elektromagnetisches Feld** verstanden.

**Satz 1.8.2** (i) Die 1. Gruppe der Maxwell-Gleichungen ist zu  $d\omega_{E,B} = 0$  äquivalent.

(ii) Die 2. Gruppe der Maxwell-Gleichungen ist zu  $d*\omega_{E,B} = 0$  äquivalent.

*Beweis.* (i) Es ist

$$\begin{aligned}
d\omega_{E,B} &= -\frac{\partial E_1}{\partial x^2} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial E_1}{\partial x^3} dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\
&\quad + \frac{\partial E_2}{\partial x^1} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad + \frac{\partial E_3}{\partial x^1} dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial E_3}{\partial x^2} dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad + \frac{\partial B_1}{\partial t} dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial B_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad - \frac{\partial B_2}{\partial t} dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad + \frac{\partial B_3}{\partial t} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial B_3}{\partial x^3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&= \left( \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial t} \right) dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\
&\quad - \left( \frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial t} \right) dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\
&\quad + \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} + \frac{\partial B_1}{\partial t} \right) dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad + \left( \frac{\partial B_1}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

(ii) Da

$$\omega_{E,B} = - \sum_{i=1}^3 (E_i dt \wedge dx^i - B_i * (dt \wedge dx^i))$$

und somit

$$*\omega_{E,B} = - \sum_{i=1}^3 (B_i dt \wedge dx^i + E_i * (dt \wedge dx^i)),$$

folgt (ii) aus (i), indem man  $(E, B)$  durch  $(B, -E)$  ersetzt.  $\square$

Sei jetzt  $(E, B)$  eine Lösung der Maxwell-Gleichungen. Nach Satz 1.8.2(i) ist dann

$$d\omega_{E,B} = 0.$$

Also existiert nach dem Lemma von Poincaré (Satz 1.4.23) ein  $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^{1,3})$  mit

$$\omega_{E,B} = d\eta.$$

Solch eine 1-Form  $\eta$  heißt **elektromagnetisches Potential** des elektromagnetischen Feldes  $\omega_{E,B}$ . Aufgrund von Satz 1.8.2(ii) erhalten die Maxwell-Gleichungen damit die Gestalt

$$d*d\eta = 0.$$

Diese Gleichung ist ein Spezialfall der so genannten Yang-Mills-Gleichung.

Die Frage, inwieweit das Potential  $\eta$  durch das Feld  $\omega_{E,B}$  bestimmt ist, beantwortet

**Lemma 1.8.3** Seien  $\eta^1, \eta^2 \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt  $d\eta^1 = d\eta^2$  genau dann, wenn ein  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $\eta^2 = \eta^1 + df$  existiert.

*Beweis.* Ist  $\eta^2 = \eta^1 + df$  für ein  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , so gilt

$$d\eta^2 = d\eta^1 + ddf = d\eta^1 .$$

Gilt umgekehrt  $d\eta^1 = d\eta^2$ , d.h.  $d(\eta^2 - \eta^1) = 0$ , so existiert nach dem Lemma von Poincaré ein  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $\eta^2 - \eta^1 = df$ , d.h.  $\eta^2 = \eta^1 + df$ .  $\square$

**Definition 1.8.4** Die Abbildungen

$$\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^{1,3}) \mapsto \eta + df \in \Omega^1(\mathbb{R}^{1,3})$$

für  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{1,3})$  werden **Eichtransformationen** genannt.

Zusammengefasst haben wir damit: Die Lösungen  $(E, B)$  der Maxwell-Gleichungen korrespondieren zu den Formen  $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^{1,3})$  mit  $d*\eta = 0$ . Dabei liefern zwei Formen  $\eta^1, \eta^2 \in \Omega^1(\mathbb{R}^{1,3})$  genau dann dasselbe elektromagnetische Feld, wenn sie durch eine Eichtransformation auseinander hervorgehen.

# Kapitel 2

## Komplexe Funktionen

### 2.1 Komplex differenzierbare Funktionen

Im folgenden sei  $U$  stets eine nichtleere offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ .

**Definition 2.1.1** Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **komplex differenzierbar in**  $z_0 \in U$ , falls

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \zeta) - f(z_0)}{\zeta}$$

existiert. Die Zahl  $f'(z_0) \in \mathbb{C}$  heißt dann die **Ableitung von  $f$  in  $z_0$** . Statt  $f'(z_0)$  schreibt man auch  $\frac{df}{dz}(z_0)$ . Wir nennen  $f$  **komplex differenzierbar in**  $A \subseteq U$ , falls  $f$  komplex differenzierbar in jedem  $z \in A$  ist.

**Lemma 2.1.2** (i) Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann komplex differenzierbar in  $z_0 \in U$ , wenn eine Funktion  $f_1 : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit folgenden Eigenschaften existiert.

(a)  $f_1$  ist stetig in  $z_0$ .

(b) Für alle  $z \in U$  ist

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f_1(z).$$

Es gilt dann  $f_1(z_0) = f'(z_0)$ .

(ii) Ist  $f$  komplex differenzierbar in  $z_0$ , so ist  $f$  stetig in  $z_0$ .

*Beweis.* (i) Gilt (b), so ist

$$f_1(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{für } z \in U \setminus \{z_0\}.$$

Hieraus sieht man sofort, dass die komplexe Differenzierbarkeit von  $f$  in  $z_0$  zur Stetigkeit von  $f_1$  in  $z_0$  gleichwertig ist und dass  $f_1(z_0) = f'(z_0)$ , falls  $f_1$  stetig in  $z_0$  ist.

(ii) Dies folgt aus (i), denn da  $z - z_0$  und  $f_1$  stetig in  $z_0$  sind, ist auch  $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f_1(z)$  stetig in  $z_0$ .  $\square$

**Beispiel 2.1.3** (i) Jede konstante Funktion  $f(z) = c \in \mathbb{C}$  ist komplex differenzierbar in  $\mathbb{C}$ , wobei

$$f'(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

(ii) Die Funktion  $f(z) = z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ist komplex differenzierbar in  $\mathbb{C}$ , denn

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1},$$

woraus

$$f'(z) = n z^{n-1} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

folgt.

(iii) Die Konjugation  $f(z) = \bar{z}$  ist nirgends komplex differenzierbar, denn für  $t \in \mathbb{R}$  ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overline{(z_0 + t)} - z_0}{t} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overline{(z_0 + it)} - z_0}{it} = -1.$$

□

Wir identifizieren jetzt  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  vermöge

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto z = x + iy \in \mathbb{C}$$

und schreiben dann  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  in der Form

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Das heißt,

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z)$$

und

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)), \quad v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy)).$$

Dann haben wir

**Lemma 2.1.4** *Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar in  $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ . Dann sind die Funktionen  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar in  $(x_0, y_0)$  und es gilt*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (2.1.1)$$

Außerdem ist

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (2.1.2)$$

*Beweis.* Da  $f$  komplex differenzierbar in  $z_0 \in U$  ist, gilt

$$f'(z_0) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \zeta) - f(z_0)}{\zeta}.$$

Hieraus erhalten wir mit  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{it} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)}{it} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)}{it} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)}{t} - i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)}{t} \\
 &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).
 \end{aligned}$$

Also existieren die partiellen Ableitungen von  $u$  und  $v$  in  $(x_0, y_0)$  und es gilt (2.1.2). Die Beziehung (2.1.1) folgt aus (2.1.2).  $\square$

**Bemerkung 2.1.5** Die Gleichungen (2.1.1) heißen **Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen**.  $\square$

Lemma 2.1.4 beschreibt ein notwendiges Kriterium für komplexe Differenzierbarkeit. Bevor wir im nächsten Satz notwendige und hinreichende Kriterien dafür angeben, erinnern wir an folgende Definition.

**Definition 2.1.6** Eine Abbildung  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  von einer offenen Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$  heißt **reell differenzierbar in**  $p_0 \in V$ , falls es eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{|\varphi(p_0 + a) - \varphi(p_0) - L(a)|}{|a|} = 0$$

gibt. Die Abbildung  $L$  heißt dann das **Differential von  $\varphi$  in  $p_0$**  und wird mit  $D\varphi(p_0)$  bezeichnet.

Bekanntlich hat das Differential  $D\varphi(p_0)$  von  $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$  in  $p_0$  bezüglich der kanonischen Basen von  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  die Matrixdarstellung

$$D\varphi(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^n}(p_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^n}(p_0) \end{pmatrix}.$$

Der nächste Satz charakterisiert komplexe Differenzierbarkeit mittels reeller Differenzierbarkeit. Dabei wird wieder  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  identifiziert.

**Satz 2.1.7** Für eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i)  $f$  ist komplex differenzierbar in  $z_0 \in U$ .
- (ii)  $f$  ist reell differenzierbar in  $z_0 \in U$  und  $Df(z_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist komplex linear.
- (iii)  $f = u + iv$  ist reell differenzierbar in  $z_0 \in U$  und es gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen in  $z_0$ .

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei  $f$  komplex differenzierbar in  $z_0$ . Dann gilt

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \zeta) - f(z_0) - f'(z_0) \cdot \zeta}{\zeta} = 0,$$

was zu

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + \zeta) - f(z_0) - f'(z_0) \cdot \zeta|}{|\zeta|} = 0$$

äquivalent ist. Danach ist  $f$  reell differenzierbar in  $z_0$  und

$$Df(z_0)(\zeta) = f'(z_0) \cdot \zeta \quad \text{für } \zeta \in \mathbb{C}.$$

Insbesondere ist  $Df(z_0)$  komplex linear.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei  $f$  reell differenzierbar in  $z_0$  und sei  $Df(z_0)$  komplex linear. Dann existiert ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit

$$Df(z_0)(\zeta) = \lambda \cdot \zeta \quad \text{für alle } \zeta \in \mathbb{C}$$

und es gilt

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + \zeta) - f(z_0) - \lambda \cdot \zeta|}{|\zeta|} = 0,$$

was gleichbedeutend mit

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \zeta) - f(z_0)}{\zeta} = \lambda$$

ist.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist bekanntlich genau dann komplex linear, wenn

$$L(i) = i \cdot L(1).$$

Da  $Df(z_0)$  bezüglich der reellen Basis  $\{1, i\}$  von  $\mathbb{C}$  die Darstellung

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

hat, ist

$$Df(z_0)(1) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \quad \text{und} \quad Df(z_0)(i) = \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(z_0).$$

Folglich ist  $Df(z_0)$  genau dann komplex linear, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial u}{\partial x}(z_0),$$

d.h. wenn die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen gelten.  $\square$

Da jede  $C^1$ -Abbildung  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  reell differenzierbar in allen  $p_0 \in V$  ist, liefert der letzte Satz das folgende hinreichende Kriterium für komplexe Differenzierbarkeit.

**Folgerung 2.1.8** Sind  $u, v \in C^1(U, \mathbb{R})$  und gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{auf } U,$$

so ist  $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar in  $U$ .  $\square$

**Beispiel 2.1.9** (i) Die Funktion  $f(z) = x^3y^2 + ix^2y^3$  ist reell differenzierbar in jedem  $z \in \mathbb{C}$ . Die Cauchy-Riemann-Gleichungen für  $f$  lauten

$$3x^2y^2 = 3x^2y^2 \quad \text{und} \quad 2x^3y = -2xy^3.$$

Sie gelten genau dann, wenn

$$xy(x^2 + y^2) = 0,$$

d.h. wenn

$$xy = 0.$$

Nach Satz 2.1.7 ist folglich  $f$  komplex differenzierbar in allen Punkten auf den Koordinatenachsen und nur dort.

- (ii) Die Funktion  $f(z) = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y)$  ist überall reell differenzierbar und die Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten auf ganz  $\mathbb{C}$ . Also ist  $f$  nach Satz 2.1.7 komplex differenzierbar in  $\mathbb{C}$ . Außerdem erhalten wir mit Lemma 2.1.4, dass

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z) = f(z).$$

□

Die folgende Überlegung zeigt, dass nicht jede reell differenzierbare Funktion  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  Realteil einer komplex differenzierbaren Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  sein kann.

**Definition 2.1.10** Eine Funktion  $\varphi \in C^2(V, \mathbb{R})$  auf einer offenen Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **harmonisch**, falls

$$\Delta(\varphi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^i)^2} = 0 \quad \text{auf } V.$$

**Satz 2.1.11** Sei  $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar in  $U$  und seien  $u, v \in C^2(U, \mathbb{R})$ . Dann sind  $u$  und  $v$  harmonisch.

*Beweis.* Da  $u$  und  $v$  zweimal stetig (reell) differenzierbar sind, gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen implizieren somit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0.$$

□

**Bemerkung 2.1.12** Die Voraussetzung im Satz 2.1.11, dass  $u$  und  $v$   $C^2$ -Funktionen sind, kann weggelassen werden. Wir werden nämlich später sehen, dass jede komplex differenzierbare Funktion beliebig oft komplex differenzierbar ist. □

Als nächstes führen wir den Begriff der holomorphen Funktion ein.

**Definition 2.1.13** Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **holomorph in**  $z_0 \in U$ , falls es eine solche Umgebung  $U_0 \subseteq U$  von  $z_0$  gibt, dass  $f$  komplex differenzierbar in  $U_0$  ist. Wir nennen  $f$  **holomorph in**  $A \subseteq U$ , falls  $f$  holomorph in jedem  $z \in A$  ist. Die Menge aller in  $U$  holomorphen Funktionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{O}(U)$ .

**Bemerkung 2.1.14** (i) Ist  $f$  komplex differenzierbar in  $z_0$ , so ist  $f$  nicht notwendig holomorph in  $z_0$ . Zum Beispiel ist die Funktion  $f(z) = x^3 y^2 + ix^2 y^3$  in jedem Punkt auf den Koordinatenachsen komplex differenzierbar (vgl. Beispiel 2.1.9(i)), aber sie ist nirgends holomorph.

- (ii) Ist  $A \subseteq U$  offen, so ist offensichtlich  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann holomorph in  $A$ , wenn  $f$  komplex differenzierbar in  $A$  ist. □

Wie im Reellen gelten folgende Differentiationsregeln.

**Satz 2.1.15** (i) *Summen- und Produktregel: Sind  $f_1$  und  $f_2$  holomorph in  $U$ , so sind auch  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , und  $f_1 \cdot f_2$  holomorph in  $U$  und es gilt*

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' = \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2' \quad \text{und} \quad (f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'.$$

- (ii) *Quotientenregel: Sind  $f_1$  und  $f_2$  holomorph in  $U$  und ist  $f_2(z) \neq 0$  für alle  $z \in U$ , so ist auch  $\frac{f_1}{f_2}$  holomorph in  $U$  und*

$$\left( \frac{f_1}{f_2} \right)' = \frac{f_1' f_2 - f_1 f_2'}{f_2^2}.$$

- (iii) *Kettenregel: Sei  $f$  holomorph in  $U$ , sei  $g$  holomorph in  $U'$  und sei  $f(U) \subseteq U'$ . Dann ist  $g \circ f$  holomorph in  $U$  und*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z) \quad \text{für alle } z \in U.$$

*Beweis.* Dies kann man genauso wie im Reellen beweisen. Wir geben hier nur einen auf Lemma 2.1.2 beruhenden Beweis von (iii) an. Sei  $z_0 \in U$  fixiert. Wegen  $f \in \mathcal{O}(U)$  und  $g \in \mathcal{O}(U')$  existieren nach Lemma 2.1.2(i) eine in  $z_0$  stetige Funktion  $f_1 : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0) f_1(z) \quad \text{für alle } z \in U$$

und eine in  $f(z_0)$  stetige Funktion  $g_1 : U' \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$g(\omega) - g(f(z_0)) = (\omega - f(z_0)) g_1(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in U'.$$

Damit haben wir

$$g(f(z)) - g(f(z_0)) = (f(z) - f(z_0)) g_1(f(z)) = (z - z_0) g_1(f(z)) f_1(z) \quad \text{für alle } z \in U.$$

Da  $g_1(f(z)) \cdot f_1(z)$  stetig in  $z_0$  ist, folgt wiederum mit Lemma 2.1.2(i), dass  $g \circ f$  komplex differenzierbar in  $z_0$  ist. Außerdem erhalten wir

$$(g \circ f)'(z_0) = g_1(f(z_0)) \cdot f_1(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

□

Auch der nächste Satz ist das Analogon einer Aussage für reelle Funktionen.

**Satz 2.1.16** *Sei  $U$  zusammenhängend. Dann ist eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann konstant, wenn sie holomorph in  $U$  ist und*

$$f'(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in U \tag{2.1.3}$$

*gilt.*

*Beweis.* Sei  $f = u + iv \in \mathcal{O}(U)$  und gelte (2.1.3). Da (vgl. Lemma 2.1.4)

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

ist dann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in U.$$

Hieraus folgt nach einem Resultat der reellen Analysis, dass  $u$  und  $v$  und somit auch  $f$  konstant sind. Die andere Richtung der Behauptung ist trivial.  $\square$

Aus dem letzten Satz können wir eine interessante Folgerung ziehen. Dabei ist

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

**Folgerung 2.1.17** *Sei  $U$  zusammenhängend und sei  $f \in \mathcal{O}(U)$ . Genügt dann  $f$  einer der folgenden drei Bedingungen, so ist  $f$  konstant.*

- (a) Für alle  $z \in U$  ist  $f(z) \in \mathbb{R}$ .
- (b) Für alle  $z \in U$  ist  $f(z) \in i\mathbb{R}$ .
- (c) Für alle  $z \in U$  ist  $f(z) \in S^1$ .

*Beweis.* Gilt (a), d.h. gilt  $u = \operatorname{Re}(f) = f$ , so ist  $v = \operatorname{Im}(f) = 0$ . Aufgrund der Cauchy-Riemann-Gleichungen haben wir dann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

also auch

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

woraus nach Satz 2.1.16 folgt, dass  $f$  konstant ist.

Gilt (b), so ist  $\operatorname{Re}(if) = if$ . Hieraus folgt, wie eben gezeigt, dass  $if$  und somit auch  $f$  konstant ist.

Gelte schließlich (c), d.h.  $u^2 + v^2 = 1$ . Dann ist

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= u \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + uv \frac{\partial v}{\partial x} = u^2 \frac{\partial u}{\partial x} - uv \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + v^2 \frac{\partial v}{\partial y} = (u^2 + v^2) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= v \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = uv \frac{\partial u}{\partial x} + v^2 \frac{\partial v}{\partial x} = uv \frac{\partial v}{\partial y} + v^2 \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= -u^2 \frac{\partial u}{\partial y} + v^2 \frac{\partial v}{\partial x} = (u^2 + v^2) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Also ist

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

und somit  $f$  konstant.  $\square$

Zum Schluss dieses Abschnitts führen wir noch den so genannten Wirtinger-Kalkül ein.

**Definition 2.1.18** Für eine reell differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir  $\frac{\partial f}{\partial z} : U \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} : U \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

**Satz 2.1.19** (i) Eine reell differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann holomorph in  $U$ , wenn

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in U.$$

(ii) Ist  $f$  holomorph in  $U$ , so ist

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) \quad \text{für alle } z \in U.$$

*Beweis.* (i) Sei  $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$  reell differenzierbar. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Folglich ist  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  zu den Cauchy-Riemann-Gleichungen äquivalent. Mit Satz 2.1.7 folgt die Behauptung.

(ii) Sei  $f = u + iv \in \mathcal{O}(U)$ . Mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Gleichungen und Lemma 2.1.4 leiten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= f' \end{aligned}$$

ab. □

Die folgenden Aussagen kann man unter Benutzung der Regeln für reelles Differenzieren direkt nachrechnen.

**Satz 2.1.20** (i) Für jede reell differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{\left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)}.$$

(ii) Für  $\frac{\partial}{\partial z}$  und  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  gelten die Summen-, Produkt- und Quotientenregel.

(iii) Ist  $f = f(z)$  reell differenzierbar in  $U$ , ist  $g = g(\omega)$  reell differenzierbar in  $U'$  und ist  $f(U) \subseteq U'$ , so gilt für alle  $z \in U$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(z) = \frac{\partial g}{\partial \omega}(f(z)) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{\partial g}{\partial \bar{\omega}}(f(z)) \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(z)$$

und

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial g}{\partial \omega}(f(z)) \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) + \frac{\partial g}{\partial \bar{\omega}}(f(z)) \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(z).$$

□

Die Bedeutung des Wirtinger-Kalküls beruht auf folgendem.

**Bemerkung 2.1.21** Beim Differenzieren nach  $z$  und  $\bar{z}$  darf man so tun, als ob  $z$  und  $\bar{z}$  voneinander unabhängige Variablen sind. Genauer: Ist  $f(z) = \varphi(z, \bar{z})$ , wobei  $\varphi = \varphi(x^1, x^2)$  eine von reellen Variablen  $x^1, x^2$  abhängende Funktion ist und  $z, \bar{z}$  formal eingesetzt werden, so gilt, wiederum mit formalem Einsetzen,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(z, \bar{z}) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}(z, \bar{z}).$$

□

Dies soll mit dem nächsten Beispiel illustriert werden.

**Beispiel 2.1.22** Wir wollen alle Punkte  $z_0 \in \mathbb{C}$  bestimmen, in denen die Funktion  $f(z) = |z|^2 (|z|^2 - 2)$  komplex differenzierbar ist. Da  $f$  reell differenzierbar in  $\mathbb{C}$  ist, ist  $f$  genau dann komplex differenzierbar in  $z_0$ , wenn  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$  (vgl. Satz 2.1.19). Nach Bemerkung 2.1.21 haben wir

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z\bar{z}(z\bar{z} - 2)) = z(z\bar{z} - 2) + z\bar{z}z = 2z(|z|^2 - 1).$$

Also ist  $f$  komplex differenzierbar in 0 und in allen Punkten  $z_0 \in S^1$  und nur dort.

□

## 2.2 Beispiele holomorpher Funktionen

Wir betrachten eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

um  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$ . Wieder genauso wie im Reellen beweist man

**Satz 2.2.1** Hat die Potenzreihe  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  den Konvergenzradius  $R > 0$ , so ist  $f$  in der Kreisscheibe  $D(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$  holomorph und

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} \quad \text{für alle } z \in D(z_0, R).$$

□

**Bemerkung 2.2.2** Wir werden später sehen, dass jede holomorphe Funktion lokal durch eine Potenzreihe gegeben ist.

□

Aus Satz 2.2.1 erhalten wir sofort

**Beispiel 2.2.3** Die Exponentialfunktion

$$\exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

und die trigonometrischen Funktionen

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad \text{und} \quad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

sind holomorph in  $\mathbb{C}$  und

$$\exp'(z) = \exp(z), \quad \sin'(z) = \cos(z), \quad \cos'(z) = -\sin(z).$$

□

Im folgenden werden die Funktionen aus Beispiel 2.2.3 genauer untersucht.

**Satz 2.2.4** Für alle  $z \in \mathbb{C}$  ist  $\exp(z) \neq 0$  und  $\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$ .

*Beweis.* Die Funktion  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g(z) = \exp(z) \cdot \exp(-z)$ , ist holomorph in  $\mathbb{C}$  und

$$g'(z) = \exp'(z) \cdot \exp(-z) - \exp(z) \cdot \exp'(-z) = g(z) - g(z) = 0.$$

Also ist  $g$  nach Satz 2.1.16 konstant. Hieraus folgt wegen  $g(0) = 1$ , dass

$$\exp(z) \cdot \exp(-z) = 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dies liefert die Behauptung. □

**Satz 2.2.5** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  nichtleer, offen und zusammenhängend und sei  $f \in \mathcal{O}(U)$ . Gilt  $f'(z) = bf(z)$  für alle  $z \in U$  mit einer Konstanten  $b \in \mathbb{C}$ , so ist  $f(z) = a \exp(bz)$  für alle  $z \in U$  mit einem  $a \in \mathbb{C}$ .

*Beweis.* Auf  $U$  gelte  $f' = bf$ . Wir betrachten  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g(z) = f(z) \exp(-bz)$ . Da  $g \in \mathcal{O}(U)$  und

$$g'(z) = f'(z) \exp(-bz) - bf(z) \exp(-bz) = 0,$$

existiert nach Satz 2.1.16 ein  $a \in \mathbb{C}$  mit

$$g(z) = a \quad \text{für alle } z \in U,$$

d.h.

$$f(z) = a \exp(bz) \quad \text{für alle } z \in U.$$

□

**Satz 2.2.6** Für alle  $w, z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\exp(w + z) = \exp(w) \cdot \exp(z).$$

*Beweis.* Wir fixieren  $w \in \mathbb{C}$ . Die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \exp(w + z)$ , ist holomorph in  $\mathbb{C}$  und es gilt  $f' = f$ . Nach Satz 2.2.5 existiert somit ein  $a \in \mathbb{C}$  mit  $f(z) = a \exp(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Da

$$a = f(0) = \exp(w),$$

folgt die Behauptung. □

Natürlich kann man Satz 2.2.6 auch beweisen, indem man das Cauchy-Produkt der Potenzreihen  $\exp(w)$  und  $\exp(z)$  ausrechnet.

**Satz 2.2.7** Für alle  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  gilt:

$$(i) \exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z),$$

$$(ii) \sin(-z) = -\sin(z) \text{ und } \cos(-z) = \cos(z),$$

$$(iii) \sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)) \text{ und } \cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)),$$

$$(iv) \exp(z) = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y).$$

*Beweis.* (i) und (ii) leitet man aus der Darstellung durch Potenzreihen ab.

(iii) Nach (i) und (ii) ist

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z) \quad \text{und} \quad \exp(-iz) = \cos(z) - i \sin(z).$$

Durch Addition bzw. Subtraktion dieser Identitäten erhält man die Behauptung.

(iv) Mit Satz 2.2.6 und (i) schließt man

$$\exp(x + iy) = \exp(x) \cdot \exp(iy) = e^x(\cos(y) + i \sin(y)) = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y).$$

□

**Bemerkung 2.2.8** Die Aussage (i) aus Satz 2.2.7 wird **Eulersche Formel** genannt. Die Beziehungen in Aussage (iii) heißen **Eulersche Darstellungen**. □

Die Eulersche Formel und Satz 2.2.6 implizieren die Additionstheoreme für  $\sin(z)$  und  $\cos(z)$ .

**Satz 2.2.9** Für alle  $w, z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\sin(w + z) = \sin(w) \cos(z) + \cos(w) \sin(z) \quad \text{und} \quad \cos(w + z) = \cos(w) \cos(z) - \sin(w) \sin(z).$$

*Beweis.* Wir haben

$$\begin{aligned} \cos(w + z) + i \sin(w + z) &= \exp(iw + iz) \\ &= \exp(iw) \cdot \exp(iz) \\ &= (\cos(w) + i \sin(w))(\cos(z) + i \sin(z)), \end{aligned}$$

also

$$\cos(w + z) + i \sin(w + z) = \cos(w) \cos(z) - \sin(w) \sin(z) + i(\sin(w) \cos(z) + \cos(w) \sin(z)). \quad (2.2.1)$$

Ersetzt man hier  $w$  und  $z$  durch  $-w$  und  $-z$  und nutzt man Satz 2.2.7(ii), so folgt

$$\cos(w + z) - i \sin(w + z) = \cos(w) \cos(z) - \sin(w) \sin(z) - i(\sin(w) \cos(z) + \cos(w) \sin(z)). \quad (2.2.2)$$

Die Addition bzw. Subtraktion von (2.2.1) und (2.2.2) liefern die Behauptung. □

Nach Satz 2.2.4 wissen wir, dass

$$\exp(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Unter Benutzung der Eigenschaften der reellen Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktion zeigen wir

**Satz 2.2.10** (i) Die Abbildung  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  ist surjektiv.

(ii) Es ist  $\{z \in \mathbb{C} : \exp(z) = 1\} = \{2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$ .

(iii) Die Exponentialfunktion ist periodisch. Genauer gilt

$$\exp(z + 2\pi ik) = \exp(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \quad \text{und } k \in \mathbb{Z}.$$

*Beweis.* (i) Sei  $w \in \mathbb{C}^*$ . Wegen  $|w| \neq 0$  und  $\frac{w}{|w|} \in S^1$  existieren  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $e^x = |w|$  und  $\cos(y) + i \sin(y) = \frac{w}{|w|}$ . Für  $z = x + iy$  gilt dann aufgrund von Satz 2.2.7(iv)

$$\exp(z) = e^x(\cos(y) + i \sin(y)) = |w| \cdot \frac{w}{|w|} = w.$$

Damit ist (i) gezeigt.

(ii) Aus

$$\exp(z) = e^x(\cos(y) + i \sin(y)) = 1$$

folgt

$$|\exp(z)| = e^x = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\exp(z)}{|\exp(z)|} = \cos(y) + i \sin(y) = 1,$$

was wiederum

$$x = 0 \quad \text{und} \quad y = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

impliziert. Damit ist  $\{z \in \mathbb{C} : \exp(z) = 1\} \subseteq \{2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$  gezeigt. Die umgekehrte Inklusion ist offensichtlich.

(iii) Nach Satz 2.2.6 und (ii) haben wir für  $z \in \mathbb{C}$  und  $k \in \mathbb{Z}$

$$\exp(z + 2\pi ik) = \exp(z) \cdot \exp(2\pi ik) = \exp(z).$$

□

**Beispiel 2.2.11** Die hyperbolischen Funktionen

$$\sinh(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$$

sind ebenfalls holomorph in  $\mathbb{C}$ . Dabei gilt

$$\sinh'(z) = \cosh(z) \quad \text{und} \quad \cosh'(z) = \sinh(z).$$

Außerdem sieht man mit Hilfe von Satz 2.2.7(iii), dass

$$\sinh(z) = -i \sin(iz) \quad \text{und} \quad \cosh(z) = \cos(iz). \quad (2.2.3)$$

Hieraus folgen mit Satz 2.2.9 die Additionstheoreme

$$\sinh(w + z) = \sinh(w) \cosh(z) + \cosh(w) \sinh(z)$$

und

$$\cosh(w + z) = \cosh(w) \cosh(z) + \sinh(w) \sinh(z).$$

□

Mittels der hyperbolischen Funktionen erhält man die Zerlegung von  $\sin(z)$  und  $\cos(z)$  in Real- und Imaginärteil.

**Satz 2.2.12** Für alle  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  ist

$$\sin(x + iy) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)$$

und

$$\cos(x + iy) = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y) .$$

*Beweis.* Aufgrund von Satz 2.2.9 und (2.2.3) haben wir

$$\sin(x + iy) = \sin(x) \cos(iy) + \cos(x) \sin(iy) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)$$

und

$$\cos(x + iy) = \cos(x) \cos(iy) - \sin(x) \sin(iy) = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y) .$$

□

Der nächste Satz besagt, dass  $\sin(z)$  und  $\cos(z)$  neben den reellen Nullstellen keine weiteren Nullstellen besitzen.

**Satz 2.2.13** (i) Die Menge aller Nullstellen der Sinusfunktion  $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist  $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ .

(ii) Die Menge aller Nullstellen der Cosinusfunktion  $\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist  $\{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ .

*Beweis.* Nach Satz 2.2.7(iii) ist

$$2i \sin(z) = \exp(iz) - \exp(-iz) = \exp(-iz) [\exp(2iz) - 1]$$

und

$$\begin{aligned} 2 \cos(z) &= \exp(iz) + \exp(-iz) = \exp(iz) - \exp(i\pi) \exp(-iz) \\ &= \exp(i(\pi - z)) \left[ \exp\left(2i\left(z - \frac{\pi}{2}\right)\right) - 1 \right] . \end{aligned}$$

Also ist

$$\sin(z) = 0 \iff \exp(2iz) = 1$$

und

$$\cos(z) = 0 \iff \exp\left(2i\left(z - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 .$$

Mit Satz 2.2.10(ii) folgt die Behauptung. □

**Satz 2.2.14** Die Funktionen  $\sin(z)$  und  $\cos(z)$  sind periodisch. Genauer gilt

$$\sin(z + 2\pi k) = \sin(z) \quad \text{und} \quad \cos(z + 2\pi k) = \cos(z)$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$  und  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 2.2.7(iii) und Satz 2.2.10(iii). □

Analog zum Reellen definiert man die Funktionen  $\tan(z)$ ,  $\cot(z)$ ,  $\tanh(z)$  und  $\coth(z)$ . Diese Funktionen sind nach Satz 2.1.15 in ihrem Definitionsbereich holomorph.

Wir beenden diesen Abschnitt mit zwei weiteren Beispielen für holomorphe Funktionen. Für Details verweisen wir auf [5], § 5.5 und [6], § 3.2.

**Beispiel 2.2.15** Durch

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z},$$

wobei  $n^z = \exp(z \cdot \log(n))$ , wird eine in der Halbebene  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$  holomorphe Funktion  $\zeta(z)$  definiert. Diese Funktion wird **Riemannsche Zetafunktion** genannt.  $\square$

**Beispiel 2.2.16** Seien  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$  derart, dass  $\{w_1, w_2\}$  über  $\mathbb{R}$  linear unabhängig ist, und sei

$$G(w_1, w_2) = \{k_1 w_1 + k_2 w_2 : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Dann definiert

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{w \in G(w_1, w_2) \\ w \neq 0}} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

eine in  $\mathbb{C} \setminus G(w_1, w_2)$  holomorphe Funktion  $\wp(z)$ . Diese Funktion heißt **Weierstrasssche  $\wp$ -Funktion**. Sie ist doppelt-periodisch, denn für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus G(w_1, w_2)$  gilt

$$\wp(z + w_1) = \wp(z + w_2) = \wp(z).$$

$\square$

## 2.3 Komplexe Kurvenintegrale

Wir führen komplexe Kurvenintegrale auf reelle Kurvenintegrale zurück.

**Definition 2.3.1** Sei  $\Gamma$  eine orientierte stückweise differenzierbare Jordan-Kurve in  $\mathbb{C}$  und sei  $f = u + iv : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann ist

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \int_{\Gamma} (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + i \int_{\Gamma} (v(x, y) dx + u(x, y) dy).$$

**Bemerkung 2.3.2** Das Integral von  $f = u + iv$  über der Kurve  $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$  erhält man aus dem Ansatz

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (u(x, y) + iv(x, y))(dx + i dy),$$

also dadurch, dass man  $dz$  als die komplexe 1-Form  $dx + i dy$  versteht.  $\square$

**Satz 2.3.3** Sei  $\Gamma$  eine orientierte differenzierbare Jordan-Kurve in  $\mathbb{C}$ , sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Parametrisierung von  $\Gamma$  aus der fixierten Orientierung und sei  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

*Beweis.* Sei wieder  $f = u + iv$  und sei  $\gamma = \alpha + i\beta$  mit Funktionen  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Nach Definition der reellen Kurvenintegrale haben wir dann

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma} (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + i \int_{\Gamma} (v(x, y) dx + u(x, y) dy) \\ &= \int_a^b (u(\gamma(t))\alpha'(t) - v(\gamma(t))\beta'(t)) dt + i \int_a^b (v(\gamma(t))\alpha'(t) + u(\gamma(t))\beta'(t)) dt. \end{aligned}$$

Andererseits haben wir

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt &= \int_a^b (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t)))(\alpha'(t) + i\beta'(t)) dt \\ &= \int_a^b (u(\gamma(t))\alpha'(t) - v(\gamma(t))\beta'(t)) dt + i \int_a^b (v(\gamma(t))\alpha'(t) + u(\gamma(t))\beta'(t)) dt . \end{aligned}$$

□

**Beispiel 2.3.4** Seien  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$  und sei  $\Gamma$  die Strecke von  $z_0$  nach  $z_1$ . Dann ist

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0),$$

eine Parametrisierung von  $\Gamma$ . Damit berechnet man

$$\int_{\Gamma} dz = \int_0^1 \gamma'(t) dt = \int_0^1 (z_1 - z_0) dt = z_1 - z_0$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z dz &= \int_0^1 \gamma(t)\gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 (z_0 + t(z_1 - z_0))(z_1 - z_0) dt \\ &= z_0(z_1 - z_0) + \frac{1}{2}(z_1 - z_0)^2 \\ &= \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2). \end{aligned}$$

□

Von wesentlicher Bedeutung für die Theorie komplexer Funktionen ist

**Satz 2.3.5** Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$ , sei  $r > 0$  und sei die Kreislinie  $S(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$  im positiven Sinn orientiert. Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{S(z_0, r)} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{für } n = -1 \end{cases} .$$

*Beweis.* Die Abbildung

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + r(\cos(t) + i\sin(t)) = z_0 + re^{it},$$

ist eine Parametrisierung von  $S(z_0, r)$  in der fixierten Orientierung. Wegen

$$\gamma'(t) = r(-\sin(t) + i\cos(t)) = ri(\cos(t) + i\sin(t)) = ire^{it}$$

haben wir somit

$$\begin{aligned} \int_{S(z_0, r)} (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} (\gamma(t) - z_0)^n \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n ire^{it} dt \\ &= r^{n+1} \int_0^{2\pi} ie^{i(n+1)t} dt \\ &= r^{n+1} \left[ -\int_0^{2\pi} \sin((n+1)t) dt + i \int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) dt \right]. \end{aligned}$$

Die Behauptung ist jetzt offensichtlich. □

Für das komplexe Kurvenintegral hat man folgende Rechenregeln.

**Satz 2.3.6** Sei  $\Gamma$  eine orientierte stückweise differenzierbare Jordan-Kurve in  $\mathbb{C}$  und seien  $f, g : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann gilt:

- (i)  $\int_{\Gamma} (\lambda f(z) + \mu g(z)) dz = \lambda \int_{\Gamma} f(z) dz + \mu \int_{\Gamma} g(z) dz$  für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ,
- (ii)  $\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{\Gamma} |f| \cdot L(\Gamma)$ , wobei  $L(\Gamma)$  die Länge der Kurve  $\Gamma$  ist.

*Beweis.* Behauptung (i) folgt aus der entsprechenden Regel für reelle Kurvenintegrale.

(ii) Wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $\Gamma$  differenzierbar ist. Ist dann  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Parametrisierung von  $\Gamma$ , so haben wir

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{\Gamma} |f| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &= \max_{\Gamma} |f| \cdot L(\Gamma). \end{aligned}$$

□

Im Rest dieses Abschnitts geht es um Beziehungen zwischen holomorphen Funktionen und der Wegunabhängigkeit komplexer Kurvenintegrale. Dabei sei  $U$  ein Gebiet in  $\mathbb{C}$ , d.h. eine nichtleere, offene und zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{C}$ . Wir bezeichnen die Menge aller orientierten stückweise differenzierbaren Jordan-Kurven in  $U$  mit  $J^1(U)$  und setzen

$$J_c^1(U) := \{ \Gamma \in J^1(U) : \Gamma \text{ ist geschlossen} \}.$$

Wie üblich bezeichne  $C(U, \mathbb{C})$  den Raum der stetigen Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Definition 2.3.7** Wir sagen, dass die Kurvenintegrale von  $f \in C(U, \mathbb{C})$  **wegunabhängig in  $U$**  sind, falls eine solche Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  existiert, dass

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0)$$

für jede Kurve  $\Gamma \in J^1(U)$  mit Anfangspunkt  $z_0$  und Endpunkt  $z_1$ .

**Lemma 2.3.8** Die Kurvenintegrale von  $f \in C(U, \mathbb{C})$  sind genau dann wegunabhängig in  $U$ , wenn

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{für alle } \Gamma \in J_c^1(U). \quad (2.3.1)$$

*Beweis.* Sei  $f \in C(U, \mathbb{C})$  und gelte (2.3.1). Wir fixieren ein  $w_0 \in U$  und definieren  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$F(w) = \int_{\Gamma_w} f(z) dz$$

für eine Kurve  $\Gamma_w \in J^1(U)$  von  $w_0$  nach  $w$ . Dann ist  $F$ , wie man leicht sieht, korrekt definiert. Ist  $\Gamma \in J^1(U)$  eine Kurve von  $z_0$  nach  $z_1$  und sind  $\Gamma_i \in J^1(U)$ ,  $i = 0, 1$ , Kurven von  $w_0$  nach  $z_i$ , so haben wir

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz + \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_{\Gamma_1} f(z) dz = 0$$

und somit

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz - \int_{\Gamma_0} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Damit ist eine Richtung gezeigt. Die andere Richtung ist offensichtlich.  $\square$

In Analogie zur reellen Situation definieren wir:

**Definition 2.3.9** Wir nennen  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine **Stammfunktion** von  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , falls  $F \in \mathcal{O}(U)$  und

$$F'(z) = f(z) \quad \text{für alle } z \in U.$$

**Satz 2.3.10** Sind  $F_1, F_2 \in \mathcal{O}(U)$  zwei Stammfunktionen von  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , so ist  $F_2 - F_1$  konstant.

*Beweis.* Dies ist eine Konsequenz von Satz 2.1.16.  $\square$

Der nächste Satz besagt, dass  $f \in C(U, \mathbb{C})$  genau dann eine Stammfunktion besitzt, wenn die Kurvenintegrale von  $f$  wegunabhängig in  $U$  sind.

**Satz 2.3.11** Sei  $f \in C(U, \mathbb{C})$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine Stammfunktion von  $f$ .
- (ii) Für jede Kurve  $\Gamma \in J^1(U)$  mit Anfangspunkt  $z_0$  und Endpunkt  $z_1$  gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0).$$

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , d.h.  $F \in \mathcal{O}(U)$  und  $F' = f$ , und sei  $\Gamma \in J^1(U)$  eine Kurve von  $z_0$  nach  $z_1$ . Wir nehmen o.B.d.A. an, dass  $\Gamma$  differenzierbar ist, und wählen eine Parametrisierung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  von  $\Gamma$  aus der fixierten Orientierung. Dann haben wir

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Wegen

$$F'(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{d(F \circ \gamma)}{dt}(t)$$

folgt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b \frac{d(F \circ \gamma)}{dt}(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z_1) - F(z_0).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wir müssen zeigen, dass  $F'(z) = f(z)$  für alle  $z \in U$ . Sei  $z_0 \in U$  beliebig und sei  $D$  eine offene Kreisscheibe um  $z_0$  mit  $D \subseteq U$ . Wir definieren  $F_1 : D \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$F_1(z) := \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta \quad \text{für } z \in D \setminus \{z_0\} \quad \text{und} \quad F_1(z_0) := f(z_0),$$

wobei  $[z_0, z]$  die Strecke von  $z_0$  nach  $z$  bezeichnet. Da nach Voraussetzung

$$F(z) = F(z_0) - \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta \quad \text{für alle } z \in D,$$

gilt dann

$$F(z) = F(z_0) + (z - z_0)F_1(z_0) \quad \text{für alle } z \in D.$$

Also genügt es nach Lemma 2.1.2 zu zeigen, dass  $F_1$  stetig in  $z_0$  ist. Für  $z \in D \setminus \{z_0\}$  schließen wir mit Hilfe von Satz 2.3.6(ii), dass

$$\begin{aligned} |F_1(z) - F_1(z_0)| &= \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} (f(\zeta) - f(\zeta_0)) \, d\zeta \right| \\ &= \frac{1}{|z - z_0|} \left| \int_{[z_0, z]} (f(\zeta) - f(\zeta_0)) \, d\zeta \right| \\ &\leq \max_{\zeta \in [z_0, z]} |f(\zeta) - f(z_0)|. \end{aligned}$$

Hieraus und aus der Stetigkeit von  $f$  folgt die Stetigkeit von  $F_1$  in  $z_0$ .  $\square$

Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Wegunabhängigkeit der Kurvenintegrale einer komplexen Funktion und deren Holomorphie im wesentlichen äquivalent sind. Dazu benötigen wir einen weiteren Begriff.

**Definition 2.3.12** Ein Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$  heißt **einfach zusammenhängend**, falls jede beschränkte Menge  $V \subseteq \mathbb{C}$ , deren Rand eine geschlossene Jordan-Kurve in  $U$  ist, in  $U$  enthalten ist.

**Beispiel 2.3.13** Die komplexe Ebene  $\mathbb{C}$ , die offenen Kreisscheiben  $D(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $R > 0$ , und die geschlitzten Ebenen  $\mathbb{C} \setminus \{tw_0 : t \in [0, \infty[)\}$ ,  $w_0 \in S^1$ , sind einfach zusammenhängend. Dagegen sind die Kreisringe  $A(z_0, R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $0 < R_1 < R_2$ , und die punktierten Ebenen  $\mathbb{C} \setminus \{w_0\}$ ,  $w_0 \in \mathbb{C}$ , nicht einfach zusammenhängend.  $\square$

**Bemerkung 2.3.14** Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein beschränktes Gebiet und ist der Rand  $\partial U$  von  $U$  die disjunkte Vereinigung von geschlossenen Jordan-Kurven, so ist  $U$  genau dann einfach zusammenhängend, wenn  $\partial U$  aus genau einer Jordan-Kurve besteht. Hierbei ist die Voraussetzung, dass  $U$  beschränkt ist, wesentlich. Zum Beispiel ist der Rand von  $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$  eine geschlossene Jordan-Kurve, aber  $V$  ist nicht einfach zusammenhängend.  $\square$

**Satz 2.3.15** Sei  $U$  einfach zusammenhängend und seien  $u, v \in C^1(U, \mathbb{R})$ . Dann sind die Kurvenintegrale der Funktion  $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann wegunabhängig in  $U$ , wenn  $f \in \mathcal{O}(U)$ .

Für den Beweis dieses Satzes erinnern wir zunächst an folgendes Resultat.

**Satz 2.3.16** Sei  $V$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , sei  $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n) \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$  und seien die Kurvenintegrale von  $\varphi$  in  $V$  wegunabhängig, d.h.

$$\int_{\Gamma} (\varphi^1(x) \, dx^1 + \dots + \varphi^n(x) \, dx^n) = 0$$

für alle geschlossenen stückweise differenzierbaren Jordan-Kurven  $\Gamma$  in  $V$ . Dann gilt

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(x) = \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}(x) \quad \text{für alle } x \in V \quad \text{und } i, j = 1, \dots, n.$$

*Beweis von Satz 2.3.15.* Seien die Kurvenintegrale von  $f$  wegunabhängig in  $U$ . Nach Definition dieser Kurvenintegrale gilt dann

$$\int_{\Gamma} (u(x, y) \, dx - v(x, y) \, dy) = \int_{\Gamma} (v(x, y) \, dx + u(x, y) \, dy) = 0 \quad \text{für alle } \Gamma \in J_c^1(U).$$

Hieraus folgt mit Satz 2.3.16, dass

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{auf } U .$$

Das heißt, es gelten die Cauchy-Riemann-Gleichungen. Dies liefert mit Folgerung 2.1.8, dass  $f \in \mathcal{O}(U)$ .

Sei nun umgekehrt  $f \in \mathcal{O}(U)$ . Sei  $\Gamma \in J_c^1(U)$  und sei  $V \subseteq \mathbb{C}$  das von  $\Gamma$  berandete beschränkte Gebiet. Da  $U$  einfach zusammenhängend ist, ist  $V \subseteq U$ . Unter Benutzung des Satzes von Stokes in der Ebene und der Cauchy-Riemann-Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma} (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + i \int_{\Gamma} (v(x, y) dx + u(x, y) dy) \\ &= - \int_V \left( \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y) + i \int_V \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 2.3.17** Satz 2.3.15 wird falsch, wenn man die Voraussetzung, dass  $U$  einfach zusammenhängend ist, weglässt. Zum Beispiel ist  $f(z) = 1/z$  holomorph in  $\mathbb{C}^*$ , aber die Kurvenintegrale von  $f$  sind nach Satz 2.3.5 nicht wegunabhängig in  $\mathbb{C}^*$ .  $\square$

**Folgerung 2.3.18** Ist  $U$  einfach zusammenhängend, so besitzt jede Funktion  $f = u + iv \in \mathcal{O}(U)$  mit  $u, v \in C^1(U, \mathbb{R})$  eine Stammfunktion.

*Beweis.* Dies folgt aus den Sätzen 2.3.11 und 2.3.15.  $\square$

**Bemerkung 2.3.19** Man kann Folgerung 2.3.18 auch ohne die Voraussetzung, dass  $u$  und  $v$   $C^1$ -Funktionen sind, beweisen (vgl. [5], § 7.1).  $\square$

Wir beenden diesen Abschnitt mit

**Beispiel 2.3.20** Wir betrachten die geschlitzte Ebene  $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$  und die Funktion  $f(z) = 1/z$ . Da  $\mathbb{C}^-$  einfach zusammenhängend ist und da  $f$  holomorph in  $\mathbb{C}^-$  ist, wird durch

$$F(z) = \int_{\Gamma_z} \frac{dz}{z}$$

für eine Kurve  $\Gamma_z \in J^1(\mathbb{C}^-)$  von 1 nach  $z$  eine Stammfunktion  $F : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}$  von  $f$  definiert. Zur Berechnung von  $F(z)$  wählen wir

$$\Gamma_z = \Gamma_{z,1} \cup \Gamma_{z,2} ,$$

wobei  $\Gamma_{z,1}$  die Strecke von 1 nach  $|z|$  und  $\Gamma_{z,2}$  der Kreisbogen von  $|z|$  nach  $z$  ist. Schreiben wir  $z \in \mathbb{C}^-$  in der Form  $z = re^{i\theta}$  mit  $r > 0$  und  $-\pi < \theta < \pi$ , so ist

$$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} , \quad \gamma_1(t) = 1 + t(r - 1) ,$$

eine Parametrisierung von  $\Gamma_{z,1}$  und

$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} , \quad \gamma_2(t) = re^{it\theta} ,$$

eine Parametrisierung von  $\Gamma_{z,2}$ . Folglich ist

$$\int_{\Gamma_z} f(z) dz = \int_{\Gamma_{z,1}} f(z) dz + \int_{\Gamma_{z,2}} f(z) dz = \int_0^1 \frac{r-1}{1+t(r-1)} dt + \int_0^1 \frac{ri\theta e^{it\theta}}{re^{it\theta}} dt = \log(r) + i\theta .$$

Wir erhalten somit, dass die Funktion  $F : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}$ , gegeben durch

$$F(re^{i\theta}) = \log(r) + i\theta \quad \text{für } r > 0 \quad \text{und} \quad -\pi < \theta < \pi,$$

holomorph in  $\mathbb{C}^-$  ist und dass

$$F'(z) = \frac{1}{z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^-.$$

Außerdem gilt

$$\exp(F(re^{i\theta})) = \exp(\log(r) + i\theta) = e^{\log(r)} e^{i\theta} = re^{i\theta}.$$

Die Funktion  $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^-)$  kehrt also die Exponentialfunktion lokal um. Sie wird der **Hauptzweig des Logarithmus** genannt und mit  $\log(z)$  bezeichnet.  $\square$

## 2.4 Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformel

**Satz 2.4.1 (Cauchyscher Integralsatz)** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet, sei  $f \in \mathcal{O}(U)$  und sei  $\Gamma \in J_c^1(U)$ . Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

*Beweis.* Die Behauptung ist, unter Berücksichtigung von Lemma 2.3.8 und Bemerkung 2.3.19, eine der Implikationen von Satz 2.3.15.  $\square$

Wir wollen aus dem letzten Satz eine Folgerung ziehen, die zuweilen ebenfalls als Cauchyscher Integralsatz zitiert wird. Dazu führen wir einen weiteren Begriff ein.

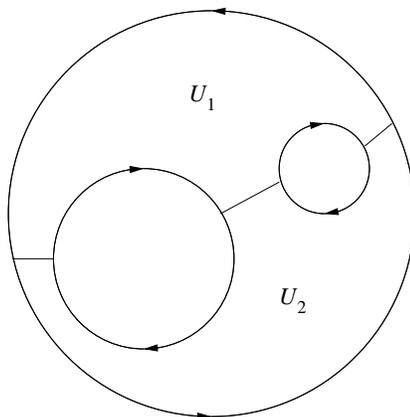
**Definition 2.4.2** Wir nennen ein Gebiet  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein **Standardgebiet**, falls  $U$  beschränkt ist und der Rand  $\partial U$  von  $U$  die disjunkte Vereinigung von endlich vielen Kurven  $\Gamma_i \in J_c^1(\mathbb{C})$  ist.

**Folgerung 2.4.3** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Standardgebiet und sei  $f$  holomorph in  $\bar{U} = U \cup \partial U$ . Dann ist

$$\int_{\partial U} f(z) dz = 0,$$

wobei  $\partial U$  mit der von  $U$  induzierten Orientierung versehen ist.

*Beweis.* Wir zerlegen  $U$  wie im Bild unten skizziert in einfach zusammenhängende Gebiete  $U_1, \dots, U_k$ .



Dann gilt

$$\int_{\partial U} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \int_{\partial U_j} f(z) dz . \quad (2.4.1)$$

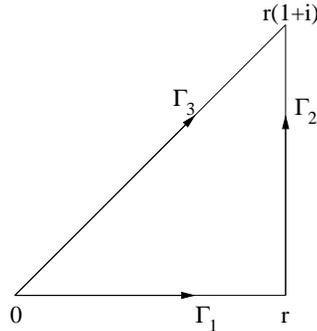
Da  $f$  holomorph in  $\bar{U}$  ist, können wir einfach zusammenhängende Gebiete  $U'_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , derart wählen, dass  $\bar{U}_j \subseteq U'_j$  und  $f$  holomorph in  $U'_j$  ist. Dann ist  $\partial U_j \in J_c^1(U'_j)$  und mit Satz 2.4.1 folgt

$$\int_{\partial U_j} f(z) dz = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, k .$$

Dies liefert zusammen mit (2.4.1) die Behauptung.  $\square$

Als Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes berechnen wir die so genannten Fresnelschen Integrale.

**Beispiel 2.4.4** Wir wollen die uneigentlichen Integrale  $\int_0^\infty \cos(t^2) dt$  und  $\int_0^\infty \sin(t^2) dt$  berechnen. Sei  $f(z) = \exp(-z^2)$ , sei  $r > 0$  und seien  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  und  $\Gamma_3$  die im Bild unten angegebenen Kurven.



Da  $f$  holomorph in  $\mathbb{C}$  ist, gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_3} f(z) dz . \quad (2.4.2)$$

Seien  $\gamma_j : [0, r] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , die durch

$$\gamma_1(t) = t, \quad \gamma_2(t) = r + it \quad \text{und} \quad \gamma_3(t) = (1+i)t$$

gegebenen Parametrisierungen von  $\Gamma_i$ . Damit ist

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} f(z) dz &= \int_0^r e^{-t^2} dt, \\ \int_{\Gamma_2} f(z) dz &= i \int_0^r e^{-(r+it)^2} dt \quad \text{und} \\ \int_{\Gamma_3} f(z) dz &= (1+i) \int_0^r e^{-(1+i)^2 t^2} dt . \end{aligned}$$

Die Abschätzung

$$\left| \int_{\Gamma_2} f(z) dz \right| \leq \int_0^r \left| e^{-(r+it)^2} \right| dt = \int_0^r e^{-r^2} e^{t^2} dt \leq e^{-r^2} \int_0^r e^{rt} dt = e^{-r^2} \frac{1}{r} (e^{r^2} - 1) \leq \frac{1}{r}$$

impliziert, dass

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma_2} f(z) dz \right| = 0.$$

Also haben wir aufgrund von (2.4.2)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_3} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} f(z) dz, \quad \text{d.h.} \quad (1+i) \int_0^\infty e^{-(1+i)^2 t^2} dt = \int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

Da bekanntlich

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

folgt

$$\int_0^\infty e^{-(1+i)^2 t^2} dt = \frac{1-i}{4} \sqrt{\pi}. \quad (2.4.3)$$

Wegen

$$e^{-(1+i)^2 t^2} = e^{-2it^2} = \cos(-2t^2) + i \sin(-2t^2) = \cos(2t^2) - i \sin(2t^2)$$

ist (2.4.3) zu

$$\int_0^\infty \cos(2t^2) dt = \int_0^\infty \sin(2t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

äquivalent. Substituieren wir jetzt noch  $s = \sqrt{2}t$ , so erhalten wir

$$\int_0^\infty \cos(s^2) ds = \int_0^\infty \sin(s^2) ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

□

Als nächstes leiten wir die Cauchysche Integralformel her. Dabei ist der Rand  $S(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$  der Kreisscheibe  $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$  mit der positiven Orientierung versehen.

**Lemma 2.4.5** *Ist die komplexe Funktion  $f$  stetig in  $\overline{D(z_0, R)}$  und holomorph in  $\overline{D(z_0, R)} \setminus \{z_0\}$ , so ist*

$$\int_{S(z_0, R)} f(z) dz = 0.$$

*Beweis.* Da  $\overline{D(z_0, R)}$  kompakt ist und  $f$  in  $\overline{D(z_0, R)}$  stetig ist, existiert

$$c := \max_{D(z_0, R)} |f|.$$

Mit Hilfe von Satz 2.3.6(ii) schließen wir für  $r \in ]0, R[$ , dass

$$\left| \int_{S(z_0, r)} f(z) dz \right| \leq \max_{S(z_0, r)} |f| \cdot L(S(z_0, r)) \leq c \cdot 2\pi r.$$

Dies impliziert, dass

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S(z_0, r)} f(z) dz = 0. \quad (2.4.4)$$

Außerdem ist  $f$  für jedes  $r \in ]0, R[$  auf dem Abschluss  $\overline{A(z_0, r, R)}$  des Kreisringes  $A(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - z_0| \leq R\}$  holomorph. Nach Folgerung 2.4.3 folgt

$$0 = \int_{\partial A(z_0, r, R)} f(z) dz = \int_{S(z_0, R)} f(z) dz - \int_{S(z_0, r)} f(z) dz.$$

Also haben wir

$$\int_{S(z_0, R)} f(z) dz = \int_{S(z_0, r)} f(z) dz \quad \text{für alle } r \in ]0, R[. \quad (2.4.5)$$

Aus (2.4.4) und (2.4.5) erhalten wir die Behauptung. □

**Lemma 2.4.6** *Ist die komplexe Funktion  $f$  in  $\overline{D(z_0, R)}$  holomorph, so gilt*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0, R)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz .$$

*Beweis.* Die komplexe Funktion  $g$ , gegeben durch

$$g(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{für } z \neq z_0 \quad \text{und} \quad g(z_0) := f'(z_0) ,$$

ist stetig in  $\overline{D(z_0, R)}$  und holomorph in  $\overline{D(z_0, R)} \setminus \{z_0\}$  (vgl. Lemma 2.1.2(i)). Wir wenden Lemma 2.4.5 und Satz 2.3.5 an und schließen

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S(z_0, R)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= \int_{S(z_0, R)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_{S(z_0, R)} \frac{dz}{z - z_0} \\ &= \int_{S(z_0, R)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) . \end{aligned}$$

Dies ergibt unmittelbar die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.4.7 (Cauchysche Integralformel)** *Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Standardgebiet und sei  $f$  holomorph in  $\overline{U}$ . Dann gilt*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \text{für alle } z_0 \in U .$$

*Beweis.* Sei  $z_0 \in U$ . Da  $U$  offen ist, können wir ein  $R > 0$  derart wählen, dass

$$\overline{D(z_0, R)} \subseteq U .$$

Wir setzen

$$U' := U \setminus \overline{D(z_0, R)} .$$

Dann ist  $U'$  ein Standardgebiet und

$$\partial U' = \partial U \cup S(z_0, R) ,$$

wobei auf  $\partial U$  die von  $U$  und die von  $U'$  induzierte Orientierung übereinstimmen und  $U'$  auf  $S(z_0, R)$  die negative Orientierung induziert. Da  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  holomorph in  $\overline{U'}$  ist, gilt nach Folgerung 2.4.3

$$0 = \int_{\partial U'} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{S(z_0, R)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz ,$$

also

$$\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{S(z_0, R)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz . \tag{2.4.6}$$

Außerdem haben wir nach Lemma 2.4.6

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0, R)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz . \tag{2.4.7}$$

Aus (2.4.6) und (2.4.7) folgt die Behauptung.  $\square$

Die Cauchysche Integralformel kann folgendermaßen zur Berechnung von komplexen Kurvenintegralen benutzt werden.

**Beispiel 2.4.8** (i) Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Standardgebiet und sei  $-i \in U$ . Mit der Cauchyschen Integralformel für  $f(z) = z^5 - z^3$  und  $z_0 = -i$  erhalten wir

$$\int_{\partial U} \frac{z^5 - z^3}{z + i} dz = \int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i(-i - i) = 4\pi.$$

(ii) Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Standardgebiet mit  $\pm i \in U$  und  $0 \notin \overline{U}$ . Dann ist  $f(z) = z^{-7}$  holomorph in  $\overline{U}$ . Folglich ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} \frac{dz}{z^7(z^2 + 1)} &= \frac{1}{2i} \int_{\partial U} \left( \frac{f(z)}{z - i} - \frac{f(z)}{z + i} \right) dz \\ &= \frac{1}{2i} \left( \int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - i} dz - \int_{\partial U} \frac{f(z)}{z + i} dz \right) \\ &= \pi(f(i) - f(-i)) \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$

□

Die Cauchysche Integralformel findet auch bei der Berechnung reeller Integrale Anwendung.

**Beispiel 2.4.9** Wir berechnen das uneigentliche Integral  $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$ . Dazu setzen wir

$$g(z) := \frac{z^2}{z^4 + 1}.$$

Sei

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

und sei

$$U_R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ und } |z| < R\}.$$

Dann ist

$$z^4 + 1 = (z - z_0)(z + z_0)(z - \overline{z_0})(z + \overline{z_0})$$

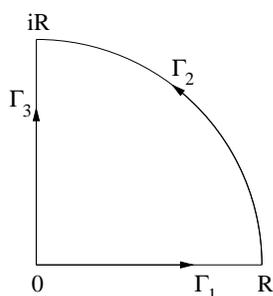
und

$$f(z) = \frac{z^2}{(z + z_0)(z - \overline{z_0})(z + \overline{z_0})}$$

ist für  $R > 1$  holomorph in  $\overline{U_R}$ . Also gilt nach der Cauchyschen Integralformel

$$\int_{\partial U_R} g(z) dz = \int_{\partial U_R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) = \frac{\pi i \overline{z_0}}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1 + i).$$

Seien nun andererseits  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  und  $\Gamma_3$  die im Bild unten angegebenen Kurven für  $R > 1$ .



Dann ist

$$\int_{\partial U_R} g(z) dz = \int_{\Gamma_1} g(z) dz + \int_{\Gamma_2} g(z) dz - \int_{\Gamma_3} g(z) dz$$

und somit

$$\int_{\Gamma_1} g(z) dz - \int_{\Gamma_3} g(z) dz = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1+i) - \int_{\Gamma_2} g(z) dz. \quad (2.4.8)$$

Wir parametrisieren  $\Gamma_1$  durch

$$\gamma_1 : [0, R] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = t,$$

$\Gamma_2$  durch

$$\gamma_2 : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = Re^{it},$$

und  $\Gamma_3$  durch

$$\gamma_3 : [0, R] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_3(t) = it,$$

und berechnen

$$\int_{\Gamma_1} g(z) dz = \int_0^R \frac{t^2}{t^4+1} dt \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma_3} g(z) dz = -i \int_0^R \frac{t^2}{t^4+1} dt \quad (2.4.9)$$

sowie

$$\int_{\Gamma_2} g(z) dz = i \int_0^{\pi/2} \frac{R^3 e^{3it}}{R^4 e^{4it} + 1} dt.$$

Wegen

$$|R^4 e^{4it} + 1| \geq |R^4 e^{4it}| - 1 = R^4 - 1$$

und folglich

$$\left| \int_{\Gamma_2} g(z) dz \right| \leq \int_0^{\pi/2} \frac{|R^3 e^{3it}|}{|R^4 e^{4it} + 1|} dt \leq \frac{\pi R^3}{2(R^4 - 1)}$$

gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} g(z) dz = 0. \quad (2.4.10)$$

Aus (2.4.8), (2.4.9) und (2.4.10) erhalten wir

$$(1+i) \int_0^\infty \frac{t^2}{t^4+1} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{\Gamma_1} f(z) dz - \int_{\Gamma_3} f(z) dz \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1+i),$$

d.h.

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

□

**Beispiel 2.4.10** Wir wollen  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos(\theta)}$  für  $a > 1$  berechnen. Dazu parametrisieren wir  $S^1$  durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(\theta) = e^{i\theta}.$$

Dann ist

$$\gamma(\theta) + \gamma(\theta)^{-1} = 2 \cos(\theta) \quad \text{und} \quad \gamma'(\theta) = i\gamma(\theta).$$

Folglich haben wir

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos(\theta)} &= \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(\theta) d\theta}{i\gamma(\theta) \left( a + \frac{1}{2}(\gamma(\theta) + \gamma(\theta)^{-1}) \right)} \\ &= \int_{S^1} \frac{dz}{iz \left( a + \frac{1}{2}(z + z^{-1}) \right)} \\ &= \frac{2}{i} \int_{S^1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$z^2 + 2az + 1 = (z - z_1)(z - z_2)$$

mit

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1} \in D(0, 1) \quad \text{und} \quad z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1} \notin \overline{D(0, 1)}.$$

Setzen wir also  $f(z) := \frac{1}{z - z_2}$ , so ist  $f$  holomorph in  $\overline{D(0, 1)}$  und mit der Cauchyschen Integralformel folgt

$$\int_{S^1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \int_{\partial D(0, 1)} \frac{f(z)}{z - z_1} dz = 2\pi i f(z_1) = \frac{\pi i}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

□

## 2.5 Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen

Im Abschnitt 2.2 haben wir bereits gesehen, dass eine komplexe Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzgebietes holomorph ist. Jetzt wollen wir die Umkehrung beweisen. Wir wollen also zeigen, dass eine holomorphe Funktion um jeden Punkt ihres Definitionsbereiches in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Als Vorbereitung beweisen wir

**Lemma 2.5.1** Sei  $f : S(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und sei  $F : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

definiert. Für alle  $z \in D(z_0, R)$  gilt dann

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

*Beweis.* Sei  $z \in D(z_0, R)$  fixiert und sei  $g : S(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

definiert. Wegen

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{R} < 1 \quad \text{für alle} \quad \zeta \in S(z_0, R) \quad (2.5.1)$$

haben wir

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k$$

und somit

$$g(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \quad \text{für alle} \quad \zeta \in S(z_0, R). \quad (2.5.2)$$

Da  $f : S(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ist, existiert

$$c = \max_{S(z_0, R)} |f|.$$

Aus

$$\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|f(\zeta)|}{R} \leq \frac{c}{R} \quad \text{für alle } \zeta \in S(z_0, R)$$

und (2.5.1) folgt, dass in (2.5.2) gleichmäßige Konvergenz vorliegt. Also können wir  $g$  integrieren, indem wir die Reihe in (2.5.2) gliedweise integrieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0, R)} g(\zeta) \, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{S(z_0, R)} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 2.5.2** Die in Lemma 2.5.1 definierte Funktion  $F$  ist nach Satz 2.2.1 holomorph. Demzufolge liefert das Lemma ein Konstruktionsprinzip für holomorphe Funktionen aus stetigen Funktionen. □

**Satz 2.5.3** Ist  $f$  holomorph in  $\overline{D(z_0, R)}$ , so gilt für alle  $z \in D(z_0, R)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta.$$

*Beweis.* Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \quad \text{für alle } z \in D(z_0, R).$$

Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus Lemma 2.5.1. □

Der letzte Satz wird auch als Entwicklungssatz für holomorphe Funktionen zitiert. Aus ihm kann man eine Reihe von Folgerungen ziehen.

**Folgerung 2.5.4** Ist  $f$  holomorph in  $U \subseteq \mathbb{C}$ , so ist  $f$  unendlich oft komplex differenzierbar in  $U$ .

*Beweis.* Sei  $f$  holomorph in  $U$  und sei  $z_0 \in U$ . Dann existiert ein solches  $R > 0$ , dass  $f$  in  $\overline{D(z_0, R)}$  holomorph ist. Dies impliziert nach Satz 2.5.3, dass  $f$  in  $D(z_0, R)$  in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Hieraus folgt mit Satz 2.2.1, dass  $f$  in  $D(z_0, R)$  unendlich oft komplex differenzierbar ist. Da  $z_0 \in U$  beliebig war, ist damit die Behauptung bewiesen. □

Im folgenden bezeichne  $f^{(k)}(z_0)$  die  $k$ -te komplexe Ableitung von  $f$  an der Stelle  $z_0$ .

**Folgerung 2.5.5** Ist  $f$  holomorph in  $\overline{D(z_0, R)}$ , so ist

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{S(z_0, R)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

*Beweis.* Aus

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in D(z_0, R)$$

folgt durch wiederholte Anwendung von Satz 2.2.1, dass

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k .$$

Also liefert Satz 2.5.3 die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.5.6 (Cauchysche Integralformel für die Ableitungen)** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Standardgebiet und sei  $f$  holomorph in  $\overline{U}$ . Dann gilt

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} .$$

*Beweis.* Wir gehen wie beim Beweis der Cauchyschen Integralformel (Satz 2.4.7) vor. Sei also  $k \in \mathbb{N}$ , sei  $z_0 \in U$  und sei  $R > 0$  so gewählt, dass

$$\overline{D(z_0, R)} \subseteq U .$$

Dann ist  $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$  holomorph in  $\overline{U'}$ , wobei wieder

$$U' := U \setminus \overline{D(z_0, R)} .$$

Nach Folgerung 2.4.3 gilt somit

$$0 = \int_{\partial U'} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \int_{\partial U} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz - \int_{S(z_0, R)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz ,$$

d.h.

$$\int_{\partial U} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \int_{S(z_0, R)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz .$$

Hieraus erhalten wir mit Folgerung 2.5.5 die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.5.7** Sei  $f$  holomorph in  $\overline{D(z_0, R)}$  und sei  $c := \max_{S(z_0, R)} |f|$ . Dann gilt

$$\left| f^{(k)}(z_0) \right| \leq \frac{k! c}{R^k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} .$$

*Beweis.* Wir nutzen Folgerung 2.5.5 und Satz 2.3.6(ii) und schließen

$$\begin{aligned} \left| f^{(k)}(z_0) \right| &= \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{S(z_0, R)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \max_{S(z_0, R)} \left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \right| \cdot L(S(z_0, R)) \\ &= \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{c}{R^{k+1}} \cdot 2\pi R \\ &= \frac{k! c}{R^k} . \end{aligned}$$

$\square$

**Definition 2.5.8** Eine Funktion, die holomorph in  $\mathbb{C}$  ist, heißt **ganze Funktion**.

**Satz 2.5.9 (Satz von Liouville)** *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

*Beweis.* Sei  $f$  eine beschränkte ganze Funktion und sei  $M > 0$  so gewählt, dass

$$|f(z)| \leq M \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Da  $f$  für jedes  $R > 0$  und jedes  $z \in \mathbb{C}$  holomorph in  $\overline{D(z, R)}$  ist, gilt nach Satz 2.5.7 mit  $k = 1$

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R} \quad \text{für alle } R > 0 \quad \text{und alle } z \in \mathbb{C}.$$

Folglich ist

$$f'(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Also ist  $f$  nach Satz 2.1.16 tatsächlich konstant.  $\square$

Wir beenden diesen Abschnitt mit dem Beweis eines Kriteriums für die Hebbarkeit isolierter Singularitäten holomorpher Funktionen.

**Satz 2.5.10** *Ist die komplexe Funktion  $f$  holomorph und beschränkt in  $\overline{D(z_0, R)} \setminus \{z_0\}$ , so besitzt  $f$  eine holomorphe Fortsetzung auf  $\overline{D(z_0, R)}$ .*

*Beweis.* Sei  $f$  holomorph in  $\overline{D(z_0, R)} \setminus \{z_0\}$  und gelte

$$|f(z)| \leq M \quad \text{für alle } z \in D(z_0, R). \quad (2.5.3)$$

Wir betrachten

$$F : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Diese Funktion ist nach Lemma 2.5.1 und Satz 2.2.1 holomorph. Folglich sind wir fertig, wenn wir gezeigt haben, dass

$$F(z) = f(z) \quad \text{für alle } z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}. \quad (2.5.4)$$

Sei  $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$  fixiert. Sei  $r > 0$  so gewählt, dass

$$r < \frac{|z - z_0|}{2} \quad \text{und} \quad \overline{D(z, r)} \leq D(z_0, R),$$

und sei  $\rho \in ]0, |z - z_0|/2[$ . Da  $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  holomorph in  $\overline{D(z_0, R)} \setminus (D(z, r) \cup D(z_0, \rho))$  ist, gilt nach Folgerung 2.4.3

$$\int_{S(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{S(z, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{S(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (2.5.5)$$

Wegen (2.5.3) und

$$|\zeta - z| > \frac{|z - z_0|}{2} \quad \text{für alle } \zeta \in S(z_0, \rho)$$

ist

$$\left| \int_{S(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \max_{\zeta \in S(z_0, \rho)} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| \cdot L(S(z_0, \rho)) \leq \frac{4\pi M \rho}{|z - z_0|}.$$

Da (2.5.5) für alle  $\rho \in ]0, |z - z_0|/2[$  gilt und da nach der Cauchyschen Integralformel

$$\int_{S(z, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z),$$

folgt

$$\int_{S(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z).$$

Damit ist (2.5.4) gezeigt und der Satz ist bewiesen.  $\square$

## 2.6 Laurent-Reihen und Residuen

**Definition 2.6.1** Eine **Laurent-Reihe** um  $z_0 \in \mathbb{C}$  ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Sie heißt **konvergent** in  $z \in \mathbb{C}$ , falls die beiden Reihen

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (2.6.1)$$

konvergent in  $z$  sind. In diesem Fall wird

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k := \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

gesetzt. Die erste Reihe in (2.6.1) wird **Hauptteil**, die zweite Reihe **regulärer Teil** der Laurent-Reihe genannt.

Im folgenden sei  $A(z_0, R_1, R_2)$  wieder der Kreisring um  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit innerem Radius  $R_1$  und äußerem Radius  $R_2$ , d.h.

$$A(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$

Dabei sind  $R_1 = 0$  und  $R_2 = \infty$  zugelassen.

**Lemma 2.6.2** Sei  $\rho_-$  der Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} w^k$ , sei  $\rho_+$  der Konvergenzradius von  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  und gelte  $1/\rho_- < \rho_+$ . Dann konvergiert die Laurent-Reihe  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  in  $A(z_0, 1/\rho_-, \rho_+)$  gegen eine holomorphe Funktion  $f(z)$ .

*Beweis.* Nach Voraussetzung und Satz 2.2.1 konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} w^k$  in  $\{w \in \mathbb{C} : |w| < \rho_-\}$  gegen eine holomorphe Funktion  $g(w)$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  in  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho_+\}$  gegen eine holomorphe Funktion  $f_+(z)$ . Indem wir  $w = \frac{1}{z - z_0}$  setzen, erhalten wir, dass  $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k$  in  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > 1/\rho_-\}$  gegen die holomorphe Funktion  $f_-(z) = g\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$  konvergiert. Also konvergiert  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  in  $A(z_0, 1/\rho_-, \rho_+)$  gegen die holomorphe Funktion  $f(z) = f_-(z) + f_+(z)$ .  $\square$

Der nächste Satz besagt, dass eine in einem Kreisring holomorphe Funktion in eine Laurent-Reihe entwickelt werden kann.

**Satz 2.6.3** Sei  $f$  holomorph in  $\overline{A(z_0, R_1, R_2)}$ , wobei  $0 < R_1 < R_2 < \infty$ , und sei

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.6.2)$$

für ein  $r \in [R_1, R_2]$ . Dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in A(z_0, R_1, R_2).$$

*Beweis.* Die Cauchysche Integralformel impliziert, dass für alle  $z \in A(z_0, R_1, R_2)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A(z_0, R_1, R_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0, R_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.5.1 haben wir außerdem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{2\pi i} \int_{S(z_0, R_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \quad \text{für alle } z \in D(z_0, R_2).$$

Indem man die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} - 1} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k$$

benutzt und ähnlich wie im Beweis von Lemma 2.5.1 argumentiert, erhält man für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| > R_1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0, R_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{S(z_0, R_1)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} d\zeta \\ &= -\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^k}{2\pi i} \int_{S(z_0, R_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

Da aufgrund von Folgerung 2.4.3 und der Tatsache, dass  $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k}$  für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  holomorph in  $\overline{A(z_0, R_1, R_2)}$  ist, die  $a_k$  nicht von der Wahl von  $r \in [R_1, R_2]$  abhängen, folgt für alle  $z \in A(z_0, R_1, R_2)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

□

**Folgerung 2.6.4** Ist  $f$  holomorph in  $\overline{D(z_0, R)} \setminus \{z_0\}$ , so gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\},$$

wobei die Koeffizienten  $a_k$  durch (2.6.2) für ein  $r \in ]0, R]$  gegeben sind.

*Beweis.* Sei  $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ , sei  $r \in ]0, R[$  und sei  $r' := \min\{r, |z|\}$ . Indem wir Satz 2.6.3 für ein  $R_1 \in ]0, r'[$  und  $R_2 = R$  anwenden, erhalten wir

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k .$$

□

**Bemerkung 2.6.5** Die Koeffizienten  $a_k$  der Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

sind eindeutig bestimmt. Gilt nämlich

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in A(z_0, R_1, R_2)$$

und ist  $r \in ]R_1, R_2[$ , so folgt mit Satz 2.3.5

$$\int_{S(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \int_{S(z_0, r)} (\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta = 2\pi i b_n .$$

□

**Definition 2.6.6** Sei  $f$  holomorph in  $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$  und sei

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

die Laurent-Entwicklung von  $f$  um  $z_0$ . Die Zahl

$$\operatorname{Res}(f, z_0) := a_{-1}$$

heißt das **Residuum von  $f$  an der Stelle  $z_0$** .

**Lemma 2.6.7** Ist  $f$  holomorph in  $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ , so ist

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0, r)} f(z) dz$$

für jedes  $r \in ]0, R[$ .

*Beweis.* Die Behauptung folgt aus Folgerung 2.6.4. □

**Beispiel 2.6.8** (i) Ist  $f$  holomorph in  $z_0$ , so kann  $f$  um  $z_0$  in eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

entwickelt werden. Also ist in diesem Fall

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = 0 .$$

(ii) Sei  $f(z) = \exp(1/z)$ . Die Laurent-Entwicklung von  $f$  um 0 ist

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^0 \frac{z^k}{(-k)!}$$

Folglich ist

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 1.$$

(iii) Sei  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ . Für  $|z - 1| < 2$  ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)(z+1)} \\ &= \frac{1}{2(z-1)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{z-1}{2} + 1\right)} \\ &= \frac{1}{2(z-1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z-1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+2}} (z-1)^k. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \frac{1}{2}.$$

□

Bevor wir ein weiteres Beispiel angeben, beweisen wir

**Satz 2.6.9** Seien  $g$  und  $h$  holomorph in  $z_0$  und gelte  $h(z_0) = 0$  und  $h'(z_0) \neq 0$ . Für  $f := g/h$  ist dann

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

*Beweis.* Wegen

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = h'(z_0) \neq 0$$

ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \quad (2.6.3)$$

Aufgrund der Existenz dieses Grenzwertes hat die Laurent-Entwicklung von  $f$  um  $z_0$  die Gestalt

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Dies impliziert, dass

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z). \quad (2.6.4)$$

Aus (2.6.3) und (2.6.4) folgt die Behauptung. □

**Beispiel 2.6.10** Sei  $f(z) = \cot(z)$ . Indem wir Satz 2.6.9 auf  $g(z) = \cos(z)$  und  $h(z) = \sin(z)$  anwenden, erhalten wir

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 1.$$

□

Einer der zentralen Sätze dieses Kapitels ist

**Satz 2.6.11 (Residuensatz)** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Standardgebiet, seien  $z_1, \dots, z_n \in U$  und sei  $f$  holomorph in  $\overline{U} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ . Dann ist

$$\int_{\partial U} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k) .$$

*Beweis.* Seien  $R_1, \dots, R_n > 0$  so gewählt, dass

$$\overline{D(z_k, R_k)} \subseteq U \quad \text{für } k = 1, \dots, n$$

und

$$\overline{D(z_k, R_k)} \cap \overline{D(z_l, R_l)} = \emptyset \quad \text{für } k \neq l .$$

Wir setzen

$$U' := U \setminus \bigcup_{k=1}^n \overline{D(z_k, R_k)} .$$

Da  $f$  holomorph in  $\overline{U'}$  ist, gilt nach Folgerung 2.4.3

$$0 = \int_{\partial U'} f(z) dz = \int_{\partial U} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{S(z_k, R_k)} f(z) dz ,$$

d.h.

$$\int_{\partial U} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{S(z_k, R_k)} f(z) dz . \quad (2.6.5)$$

Außerdem haben wir nach Lemma 2.6.7, dass

$$\int_{S(z_k, R_k)} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k) \quad \text{für } k = 1, \dots, n . \quad (2.6.6)$$

Aus (2.6.5) und (2.6.6) folgt die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 2.6.12** (i) Wir berechnen

$$\int_{S(i,1)} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz .$$

Die Funktion  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$  ist in  $\overline{D(i, 1)} \setminus \{i\}$  holomorph. Da die Laurent-Entwicklung von  $f$  um  $i$  die Gestalt

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k (z - i)^k$$

hat, ist

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{iz}}{z + i} = \frac{1}{2ie} .$$

Mit Satz 2.6.11 folgt

$$\int_{S(i,1)} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = \frac{\pi}{e} .$$

(ii) Zur Berechnung von

$$\int_{S(0,3)} \frac{dz}{z(z-1)(z-2)}$$

betrachten wir die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ . Diese Funktion ist in  $\overline{D(0,3)} \setminus \{0,1,2\}$  holomorph. Wie bei (i) sieht man, dass

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad \text{für } z_0 = 0, 1, 2.$$

Folglich ist

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Res}(f, 1) = -1 \quad \text{und} \quad \operatorname{Res}(f, 2) = \frac{1}{2}.$$

Wir erhalten

$$\int_{S(0,3)} \frac{dz}{z(z-1)(z-2)} = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 1) + \operatorname{Res}(f, 2)) = 0.$$

□

Im folgenden Satz bezeichne  $H$  die obere Halbebene, d.h.

$$H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

**Satz 2.6.13** Sei  $f$  holomorph in  $\overline{H} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ , wobei  $z_1, \dots, z_n \in H$ . Es existiere das uneigentliche Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  und es gelte  $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ . Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k).$$

*Beweis.* Sei  $U_R = \{z \in H : |z| < R\}$ , wobei  $R > 0$  so groß gewählt ist, dass  $z_1, \dots, z_n \in U_R$ . Nach dem Residuensatz ist dann

$$\int_{\partial U_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k). \quad (2.6.7)$$

Andererseits ist

$$\int_{\partial U_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + i \int_0^\pi \operatorname{Re}^{it} f(\operatorname{Re}^{it}) dt. \quad (2.6.8)$$

Die Voraussetzung  $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$  bedeutet, dass zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $c(\varepsilon) > 0$  mit

$$|z f(z)| \leq \varepsilon \quad \text{für } |z| \geq c(\varepsilon)$$

existiert. Ist also  $R \geq c(\varepsilon)$ , so haben wir

$$\left| \int_0^\pi \operatorname{Re}^{it} f(\operatorname{Re}^{it}) dt \right| \leq \int_0^\pi |\operatorname{Re}^{it} f(\operatorname{Re}^{it})| dt \leq \pi \varepsilon,$$

was

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \operatorname{Re}^{it} f(\operatorname{Re}^{it}) dt = 0 \quad (2.6.9)$$

impliziert. Da aufgrund der vorausgesetzten Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx,$$

liefern (2.6.7), (2.6.8) und (2.6.9) die Behauptung. □

**Beispiel 2.6.14** Wir berechnen  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$ . Dieses uneigentliche Integral existiert, die Funktion  $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$  ist holomorph in  $\overline{H} \setminus \{i\}$  und  $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0$ . Sei

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - i)^k$$

die Potenzreihenentwicklung von  $g(z) := \frac{1}{(z + i)^2}$  um  $i$ . Dann ist

$$f(z) = \sum_{k=-2}^{\infty} b_{k+2} (z - i)^k$$

die Laurent-Entwicklung von  $f$  um  $i$ . Folglich ist

$$\operatorname{Res}(f, i) = b_1 = g'(i) = \frac{1}{4i}.$$

Wenden wir nun Satz 2.6.13 an, so erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = \frac{\pi}{2}.$$

Analog kann man  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^k}$  für ein beliebiges  $k \in \mathbb{N}$  berechnen. □

# Kapitel 3

## Elemente der Variationsrechnung

### 3.1 Differenzierbarkeit auf Banach-Räumen

Wir wiederholen zunächst die Definitionen des normierten Raumes und des Banach-Raumes.

**Definition 3.1.1** *Ein normierter Raum ist ein (reeller oder komplexer) Vektorraum  $E$ , der mit einer Norm  $\| \cdot \|$  versehen ist.*

Ist  $E$  ein normierter Raum, so wird durch

$$d(v_1, v_2) := \|v_1 - v_2\| \quad \text{für } v_1, v_2 \in E$$

eine Abstandsfunktion  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $E$  definiert. Folglich ist ein normierter Raum immer auch ein metrischer Raum. Damit erhalten die Begriffe “offen”, “abgeschlossen”, “Cauchy-Folge”, “konvergent” usw. in einem normierten Raum Sinn.

**Definition 3.1.2** *Ein normierter Raum  $E$  heißt **Banach-Raum**, falls  $E$  als metrischer Raum vollständig ist, d.h. falls jede Cauchy-Folge in  $E$  konvergent ist.*

Als nächstes beschreiben wir einen Banach-Raum, der für die Überlegungen in den folgenden Abschnitten wichtig ist. Sei  $U$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ , also eine nichtleere, offene und zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und sei  $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Sei

$$C^k(U) := \{\varphi : U \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}.$$

Insbesondere ist  $C^0(U)$  der Raum der stetigen Funktionen  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Für einen Multiindex  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  sei

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Die Menge aller Multiindizes  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  mit  $|\alpha| \leq k$  bezeichnen wir mit  $I(n, k)$ . Ist  $\varphi \in C^k(U)$  und  $\alpha \in I(n, k)$ , so sei

$$\partial^\alpha \varphi := \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{(\partial x^1)^{\alpha_1} (\partial x^2)^{\alpha_2} \dots (\partial x^n)^{\alpha_n}}.$$

Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \varphi &= \varphi & \text{für } \alpha &= (0, 0, 0, \dots, 0), \\ \partial^\alpha \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} & \text{für } \alpha &= (1, 0, 0, \dots, 0) \quad \text{und} \\ \partial^\alpha \varphi &= \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^1 (\partial x^2)^2} & \text{für } \alpha &= (1, 2, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Den reellen Vektorraum

$$C^k(\bar{U}) := \{\varphi \in C^k(U) : \partial^\alpha \varphi \text{ kann für alle } \alpha \in I(n, k) \text{ stetig auf } \bar{U} \text{ fortgesetzt werden}\}$$

versehen wir mit der durch

$$\|\varphi\|_k := \sum_{\alpha \in I(n, k)} \sup_U |\partial^\alpha \varphi| \quad \text{für } \varphi \in C^k(\bar{U})$$

definierten Norm. Außerdem setzen wir

$$C_0^k(\bar{U}) := \{\varphi \in C^k(\bar{U}) : \varphi|_{\partial U} = 0\} .$$

**Bemerkung 3.1.3** (i) Ist  $\varphi \in C^k(\bar{U})$ , so ist  $\partial^\alpha \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $\alpha \in I(n, k)$  beschränkt. Die Umkehrung gilt nicht. Ist z.B.  $U = ]0, 1[ \subseteq \mathbb{R}$  und  $\varphi(x) = \sin(1/x)$ , so ist  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und beschränkt, aber  $\varphi \notin C^0(\bar{U})$ , denn  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$  existiert nicht.

(ii) Häufig wird auf  $C^k(\bar{U})$  auch die zu  $\|\cdot\|_k$  äquivalente Norm

$$\varphi \in C^k(\bar{U}) \mapsto \max_{\alpha \in I(n, k)} \sup_U |\partial^\alpha \varphi| \in \mathbb{R}$$

betrachtet.

(iii) Wie man unmittelbar sieht, konvergiert eine Folge  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  im normierten Raum  $C^k(\bar{U})$  genau dann gegen  $\varphi$ , wenn  $(\partial^\alpha \varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  für jedes  $\alpha \in I(n, k)$  gleichmäßig gegen  $\partial^\alpha \varphi$  konvergiert.  $\square$

Aus bekannten Konvergenzaussagen für Folgen differenzierbarer Funktionen erhält man:

**Satz 3.1.4** Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt:

(i) Der normierte Raum  $C^k(\bar{U})$  ist ein Banach-Raum.

(ii)  $C_0^k(\bar{U})$  ist ein abgeschlossener Unterraum von  $C^k(\bar{U})$  und somit selbst ein Banach-Raum.  $\square$

Im Rest dieses Abschnitts sei  $E$  ein reeller Banach-Raum. Der **duale Raum zu  $E$**  ist der Vektorraum  $E^*$  aller linearen und stetigen Abbildungen  $K : E \rightarrow \mathbb{R}$  versehen mit der durch

$$\|K\| := \sup_{v \in E \setminus \{0\}} \frac{|K(v)|}{\|v\|} \quad \text{für } K \in E^*$$

gegebenen Norm.

**Bemerkung 3.1.5** Ist  $\dim E < \infty$ , so ist jede lineare Abbildung  $K : E \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dies gilt nicht, wenn  $\dim E = \infty$ .  $\square$

Sei  $D \subseteq E$  nichtleer und offen.

**Definition 3.1.6** (i) Eine Abbildung  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Fréchet-differenzierbar** oder **einfach differenzierbar** in  $v \in E$ , falls ein  $K \in E^*$  mit

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\Phi(v+w) - \Phi(v) - K(w)}{\|w\|} = 0$$

existiert. Die Abbildung  $D\Phi(v) := K$  wird dann das **Differential von  $\Phi$  in  $v$**  genannt.

(ii) Eine Abbildung  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Gâteaux-differenzierbar** in  $v \in E$ , falls der Grenzwert

$$\delta\Phi(v)(w) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(v + tw) - \Phi(v)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \Phi(v + tw) \right|_{t=0}$$

für jedes  $w \in E$  existiert und die Abbildung

$$\delta\Phi(v) : w \in E \mapsto \delta\Phi(v)(w) \in \mathbb{R}$$

linear und stetig ist.

(iii) Eine Abbildung  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **differenzierbar** (bzw. **Gâteaux-differenzierbar**), falls  $\Phi$  differenzierbar (bzw. Gâteaux-differenzierbar) in jedem  $v \in D$  ist.

Die folgenden Sätze sind Verallgemeinerungen von bekannten Aussagen der endlichdimensionalen Analysis.

**Satz 3.1.7** Ist  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $v \in D$ , so ist  $\Phi$  auch Gâteaux-differenzierbar in  $v$  und

$$\delta\Phi(v) = D\Phi(v) .$$

*Beweis.* Sei  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $v \in D$ . Dann ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(v + tw) - \Phi(v) - D\Phi(v)(tw)}{t} = 0 \quad \text{für alle } w \in E .$$

Folglich gilt

$$D\Phi(v)(w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(v + tw) - \Phi(v)}{t} = \delta\Phi(v)(w) \quad \text{für alle } w \in E .$$

□

**Satz 3.1.8** Ist  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  Gâteaux-differenzierbar und ist die Abbildung

$$v \in D \mapsto \delta\Phi(v) \in E^*$$

stetig, so ist  $\Phi$  differenzierbar.

□

**Definition 3.1.9** Sei  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  Gâteaux-differenzierbar. Ein  $v \in D$  heißt **stationärer Punkt** von  $\Phi$ , falls  $\delta\Phi(v) = 0$ .

**Satz 3.1.10** Ist  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  Gâteaux-differenzierbar und hat  $\Phi$  in  $v \in D$  ein lokales Minimum, so ist  $v$  ein stationärer Punkt von  $\Phi$ .

*Beweis.* Sei  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  Gâteaux-differenzierbar, sei  $v \in D$  ein lokales Minimum von  $\Phi$  und sei  $w \in E$  beliebig. Dann hat die reelle Funktion  $\gamma(t) := \Phi(v + tw)$  bei 0 ein lokales Minimum. Also gilt

$$\delta\Phi(v)(w) = \gamma'(0) = 0 .$$

□

### 3.2 Aufgabenstellung und Euler-Lagrange-Gleichung

In der Variationsrechnung geht es um das Auffinden von lokalen Minima eines Funktionals, d.h. einer Funktion, deren Definitionsbereich ein unendlichdimensionaler Raum ist.

Bei der **Aufgabenstellung der Variationsrechnung im weiteren Sinne** sind ein Banach-Raum  $E$  und ein auf einer offenen Teilmenge  $D \subseteq E$  definiertes Funktional  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Gesucht sind alle  $v_0 \in D$ , in denen  $\Phi$  ein lokales Minimum besitzt. Ist  $\Phi$  Gâteaux-differenzierbar, so kann man dieses Problem lösen, indem man zunächst alle stationären Punkte von  $\Phi$  bestimmt und anschließend feststellt, in welchen dieser Punkte ein lokales Minimum von  $\Phi$  vorliegt.

Bei der **Aufgabenstellung der Variationsrechnung im klassischen Sinne** geht man von einem beschränkten Gebiet  $U \in \mathbb{R}^n$  und stetigen Abbildungen  $h : \bar{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\sigma : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$  aus. Gesucht sind dann alle  $\varphi_0$  aus der Menge

$$M(\sigma) := \{ \varphi \in C^1(\bar{U}) : \varphi|_{\partial U} = \sigma \} ,$$

in denen das durch

$$\begin{aligned} \Psi(\varphi) &:= \int_U h \left( x, \varphi(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x^n}(x) \right) dx \\ &= \int_U h(x, \varphi(x), \text{grad}(\varphi)(x)) dx \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

definierte Funktional  $\Psi : M(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  ein lokales Minimum hat. Dies kann folgendermaßen umformuliert werden. Sei  $\varphi^* \in M(\sigma)$  fixiert. Dann ist

$$M(\sigma) = \{ \varphi^* + \varphi : \varphi \in C_0^1(\bar{U}) \} .$$

Also ist die obige Aufgabenstellung dazu gleichwertig, alle  $\varphi_0 \in C_0^1(\bar{U})$  zu bestimmen, in denen das Funktional

$$\varphi \in C_0^1(\bar{U}) \mapsto \Phi(\varphi) := \Psi(\varphi^* + \varphi) \in \mathbb{R}$$

ein lokales Minimum hat. Damit ist man in der Situation der Aufgabenstellung der Variationsrechnung im weiteren Sinne.

Wir werden jetzt die stationären Punkte eines solchen Funktionals  $\Phi$  durch eine partielle Differentialgleichung beschreiben. Wir beginnen mit

**Lemma 3.2.1** *Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand  $\partial U$ , d.h.  $\partial U$  ist eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $\varphi \in C^1(\bar{U})$  und  $\psi \in C_0^1(\bar{U})$ . Dann gilt*

$$\int_U \varphi(x) \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x) dx = - \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) \psi(x) dx .$$

*Beweis.* Sei  $i \in \{1, \dots, n\}$  fixiert und sei

$$X = \varphi \psi \frac{\partial}{\partial x^i} .$$

Dann ist  $X$  ein  $C^1$ -Vektorfeld auf  $\bar{U}$  mit

$$X|_{\partial U} = 0$$

und

$$\text{div}(X) = \frac{\partial}{\partial x^i}(\varphi \psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \psi + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x^i} .$$

Nach dem Gaussischen Integralsatz (Satz 1.7.1), der auch für  $C^1$ -Vektorfelder gilt, haben wir somit

$$\begin{aligned} 0 &= \int_U \langle X, \nu \rangle d(\partial U) \\ &= \int_U \operatorname{div}(X) dU \\ &= \int_U \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) \psi(x) + \varphi(x) \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x) \right) dx, \end{aligned}$$

wobei  $\nu$  das äußere Einheitsnormalenfeld an  $U$  bezeichnet. Dies liefert die Behauptung.  $\square$

**Satz 3.2.2** Sei  $U$  wie in Lemma 3.2.1, sei

$$(x^1, \dots, x^n, y, z^1, \dots, z^n) \in \bar{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto h(x^1, \dots, x^n, y, z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{R}$$

zweimal stetig differenzierbar und sei  $\Phi : C_0^1(\bar{U}) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\Phi(\varphi) = \int_U h(x, \varphi(x), \operatorname{grad}(\varphi)(x)) dx$$

gegeben. Dann gilt:

(i)  $\Phi$  ist differenzierbar und

$$\begin{aligned} D\Phi(\varphi)(\psi) &= \int_U \left( \frac{\partial h}{\partial y}(x, \varphi(x), \operatorname{grad}(\varphi)(x)) \cdot \psi(x) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial z^i}(x, \varphi(x), \operatorname{grad}(\varphi)(x)) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x) \right) dx \end{aligned}$$

für alle  $\varphi, \psi \in C_0^1(\bar{U})$ .

(ii) Ist  $\varphi_0 \in C_0^2(\bar{U})$  ein stationärer Punkt von  $\Phi$ , so gilt

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, \varphi_0(x), \operatorname{grad}(\varphi_0)(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial h}{\partial z^i}(x, \varphi_0(x), \operatorname{grad}(\varphi_0)(x)) \right) \quad \text{für alle } x \in U. \quad (3.2.2)$$

*Beweis.* Seien  $\varphi, \psi \in C_0^1(\bar{U})$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \delta\Phi(\varphi)(\psi) &= \left. \frac{d}{dt} \Phi(\varphi + t\psi) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \int_U h(x, \varphi(x) + t\psi(x), \operatorname{grad}(\varphi + t\psi)(x)) dx \right|_{t=0} \\ &= \int_U \left. \frac{d}{dt} h(x, \varphi(x) + t\psi(x), \operatorname{grad}(\varphi + t\psi)(x)) \right|_{t=0} dx \\ &= \int_U \left( \frac{\partial h}{\partial y}(x, \varphi(x), \operatorname{grad}(\varphi)(x)) \cdot \psi(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial z^i}(x, \varphi(x), \operatorname{grad}(\varphi)(x)) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x) \right) dx. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist  $\delta\Phi(\varphi) \in C_0^1(\bar{U})^*$ . Außerdem hängt  $\delta\Phi(\varphi)$  stetig von  $\varphi$  ab. Mit Satz 3.1.8 folgt die Behauptung (i).

Sei  $\varphi_0 \in C_0^2(\bar{U})$  ein stationärer Punkt von  $\Phi$ . Wegen (i) und Lemma 3.2.1 gilt dann

$$\int_U \left[ \frac{\partial h}{\partial y}(x, \varphi_0(x), \operatorname{grad}(\varphi_0)(x)) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial h}{\partial z^i}(x, \varphi_0(x), \operatorname{grad}(\varphi_0)(x)) \right) \right] \psi(x) dx = 0$$

für alle  $\psi \in C_0^1(\overline{U})$ . Dies liefert die Behauptung (ii).  $\square$

Die Gleichung (3.2.2) wird **Euler-Lagrange-Gleichung zu  $h$**  genannt.

**Satz 3.2.3** Seien  $U$  und  $h$  wie in Satz 3.2.2 und sei  $\sigma : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Hat das durch (3.2.1) definierte Funktional  $\Psi : M(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  in  $\varphi_0 \in M(\sigma) \cap C^2(\overline{U})$  ein lokales Minimum, so erfüllt  $\varphi_0$  die Euler-Lagrange-Gleichung (3.2.2).

*Beweis.* Man betrachte das Funktional

$$\Phi : \varphi \in C_0^1(\overline{U}) \mapsto \Psi(\varphi_0 + \varphi) \in \mathbb{R},$$

welches  $\varphi = 0$  als stationären Punkt hat, und argumentiere wie beim Beweis von Satz 3.2.2.  $\square$

### 3.3 Beispiele für Variationsprobleme

**Beispiel 3.3.1** Seien  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$  fixiert und sei

$$M(y_0, y_1) := \{\varphi \in C^1([0, 1]) : \varphi(0) = y_0, \varphi(1) = y_1\}.$$

Gesucht sind diejenigen Abbildungen  $\varphi \in M(y_0, y_1)$ , für die die Kurve

$$\Gamma_\varphi := \{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}$$

minimale Länge hat.

Offensichtlich ist

$$\gamma_\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_\varphi(x) = (x, \varphi(x)), \quad (3.3.1)$$

eine Parametrisierung von  $\Gamma_\varphi$ . Folglich haben wir für die Länge  $L(\Gamma_\varphi)$  von  $\Gamma_\varphi$

$$\begin{aligned} L(\Gamma_\varphi) &= \int_0^1 \left| \frac{d\gamma_\varphi}{dx}(x) \right| dx \\ &= \int_0^1 |(1, \varphi'(x))| dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx. \end{aligned}$$

Zu minimieren ist somit das Funktional

$$\Psi : M(y_0, y_1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Psi(\varphi) = \int_0^1 h(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx,$$

mit

$$h(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung zu  $h$  für ein  $\varphi \in C^2([0, 1])$  lautet

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial h}{\partial z}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \right) \quad \text{für alle } x \in [0, 1]. \quad (3.3.2)$$

Wegen

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

und

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial h}{\partial z}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}} \right) = \frac{\varphi''(x)}{(1 + (\varphi'(x))^2)^{3/2}}$$

ist (3.3.2) zu

$$\varphi'' = 0 \tag{3.3.3}$$

äquivalent. Die eindeutig bestimmte Lösung  $\varphi_0 \in M(y_0, y_1) \cap C^2([0, 1])$  von (3.3.3) ist

$$\varphi_0(x) = (y_1 - y_0)x + y_0 .$$

Wir wissen damit:

Hat  $\Psi$  in einem  $\varphi_1 \in M(y_0, y_1) \cap C^2([0, 1])$  ein Minimum, so ist  $\varphi_1 = \varphi_0$ .

Zur vollständigen Lösung des Variationsproblems wäre noch zu zeigen:

1. Das Funktional  $\Psi$  hat ein Minimum.
2. Ist  $\Psi$  in einem  $\varphi \in M(y_0, y_1)$  minimal, so ist  $\varphi \in C^2([0, 1])$ . □

**Beispiel 3.3.2** Sei  $M(y_0, y_1)$  wie in Beispiel 3.3.1. Gesucht sind diejenigen Abbildungen  $\varphi \in M(y_0, y_1)$ , für die der durch (3.3.1) gegebene  $C^1$ -Weg  $\gamma_\varphi$  minimale Energie hat.

Ist  $\gamma$  ein  $C^1$ -Weg in  $\mathbb{R}^2$ , d.h. eine  $C^1$ -Abbildung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , so ist die Energie  $E(\gamma)$  von  $\gamma$  durch

$$E(\gamma) := \int_0^1 \left| \frac{d\gamma_\varphi}{dx}(x) \right|^2 dx$$

definiert. Demnach ist

$$E(\gamma_\varphi) = \int_0^1 (1 + (\varphi'(x))^2) dx .$$

Zu minimieren ist somit das Funktional

$$\Psi : M(y_0, y_1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Psi(\varphi) = \int_0^1 h(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx ,$$

mit

$$h(x, y, z) = 1 + z^2 .$$

Wie man leicht sieht, ist auch in diesem Fall die Euler-Lagrange-Gleichung zu  $h$  für ein  $\varphi \in C^2([0, 1])$  zu

$$\varphi'' = 0$$

äquivalent. □

**Beispiel 3.3.3** Seien  $y_0, y_1 > 0$  fixiert und sei

$$M^*(y_0, y_1) := \{ \varphi \in C^1([0, 1]) : \varphi(0) = y_0, \varphi(1) = y_1 \text{ und } \varphi(x) > 0 \text{ für alle } x \in ]0, 1[ \} .$$

In diesem Beispiel sind diejenigen  $\varphi \in M^*(y_0, y_1)$  gesucht, für die der Flächeninhalt  $\text{vol}(A_\varphi)$  der Rotationsfläche

$$A_\varphi := \{ (x, \cos(\theta)\varphi(x), \sin(\theta)\varphi(x)) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi] \}$$

minimal ist. Da

$$\text{vol}(A_\varphi) = 2\pi \int_0^1 \varphi(x) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx ,$$

ist das Funktional

$$\Psi : M^*(y_0, y_1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Psi(\varphi) = \int_0^1 h(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx,$$

mit

$$h(x, y, z) = y\sqrt{1+z^2}.$$

zu minimieren.

Wir bestimmen die Euler-Lagrange-Gleichung zu  $h$  für ein  $\varphi \in C^2([0, 1])$ . Es ist

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial h}{\partial z}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\varphi(x)\varphi'(x)}{(1 + (\varphi'(x))^2)^{1/2}} \right) \\ &= \frac{((\varphi'(x))^2 + \varphi(x)\varphi''(x)) (1 + (\varphi'(x))^2)^{1/2} - \varphi(x) (\varphi'(x))^2 \varphi''(x) (1 + (\varphi'(x))^2)^{-1/2}}{1 + (\varphi'(x))^2} \\ &= \frac{((\varphi'(x))^2 + \varphi(x)\varphi''(x)) (1 + (\varphi'(x))^2) - \varphi(x) (\varphi'(x))^2 \varphi''(x)}{(1 + (\varphi'(x))^2)^{3/2}} \\ &= \frac{(\varphi'(x))^2 + \varphi(x)\varphi''(x) + (\varphi'(x))^4}{(1 + (\varphi'(x))^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial y}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial h}{\partial z}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \right) \\ &= \frac{1}{(1 + (\varphi'(x))^2)^{3/2}} \left( (1 + (\varphi'(x))^2)^2 - (\varphi'(x))^2 - \varphi(x)\varphi''(x) - (\varphi'(x))^4 \right) \\ &= \frac{1}{(1 + (\varphi'(x))^2)^{3/2}} \left( 1 + (\varphi'(x))^2 - \varphi(x)\varphi''(x) \right). \end{aligned}$$

Folglich erfüllt  $\varphi$  die Euler-Lagrange-Gleichung zu  $h$  genau dann, wenn

$$\varphi\varphi'' = 1 + (\varphi')^2. \quad (3.3.4)$$

Die eindeutig bestimmte Lösung  $\varphi_0 \in M^*(y_0, y_1) \cap C^2([0, 1])$  von (3.3.4) ist

$$\varphi_0(x) = a \cosh \left( \frac{x+b}{a} \right),$$

wobei die reellen Konstanten  $a > 0$  und  $b$  durch

$$a \cosh \left( \frac{b}{a} \right) = y_0 \quad \text{und} \quad a \cosh \left( \frac{1+b}{a} \right) = y_1$$

bestimmt sind. □

Die bisherigen Beispiele waren Variationsprobleme für Funktionen einer Veränderlichen. In den letzten beiden Beispielen werden wir Probleme für Funktionen mehrerer Veränderlicher betrachten. Dabei sei  $B^n$  die offene Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$ , also

$$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\} .$$

Den Abschluss von  $B^n$  bezeichnen wir wieder mit  $\bar{B}^n$ . Als Rand  $\partial B^n$  von  $B^n$  haben wir die Sphäre  $S^{n-1}$ .

Zunächst geht es um so genannte **Minimalflächen**.

**Beispiel 3.3.4** Gegeben sei eine stetige Abbildung  $\sigma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Gesucht sind diejenigen  $\varphi \in M(\sigma) = \left\{ \varphi \in C^1(\bar{B}^2) : \varphi|_{S^1} = \sigma \right\}$ , für die der Flächeninhalt des Graphen

$$\text{Graph}(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^3 : x \in B^2\}$$

von  $\varphi$  minimal ist. Zu minimieren ist also das Funktional

$$\Psi : M(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Psi(\varphi) = \int_{B^2} h(x, \varphi(x), \text{grad}(\varphi)(x)) dx,$$

mit

$$h(x, y, z) = \sqrt{1 + |z|^2} = \sqrt{1 + (z^1)^2 + (z^2)^2}.$$

Wir berechnen wieder die Euler-Lagrange-Gleichung zu  $h$ . Für  $i = 1, 2$  ist

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial h}{\partial z^i}(x, \varphi(x), \text{grad}(\varphi)(x)) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) \left( 1 + |\text{grad}(\varphi)(x)|^2 \right)^{-1/2} \right) \\ &= \left( 1 + |\text{grad}(\varphi)(x)|^2 \right)^{-1} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^i)^2}(x) \left( 1 + |\text{grad}(\varphi)(x)|^2 \right)^{1/2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) \left( 1 + |\text{grad}(\varphi)(x)|^2 \right)^{-1/2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^i}(x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial x^i}(x) \right) \right] \\ &= \left( 1 + |\text{grad}(\varphi)(x)|^2 \right)^{-3/2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^i)^2}(x) + \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^i)^2}(x) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x) \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^i)^2}(x) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}(x) \right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^i}(x) - \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial x^i}(x) \right). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial h}{\partial z^i}(x, \varphi(x), \text{grad}(\varphi)(x)) \right) \\ &= \left( 1 + |\text{grad}(\varphi)(x)|^2 \right)^{-3/2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^1)^2}(x) + \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^1)^2}(x) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x) \right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^1)^2}(x) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}(x) \right)^2 \right. \\ & \quad \left. - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x) \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^1)^2}(x) - \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^2}(x) + \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^2)^2}(x) + \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^2)^2}(x) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x) \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^2)^2}(x) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}(x) \right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^2}(x) - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}(x) \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^2)^2}(x) \right) \\ &= \left( 1 + |\text{grad}(\varphi)(x)|^2 \right)^{-3/2} \left( \left( 1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}(x) \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^1)^2}(x) \right. \\ & \quad \left. - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^2}(x) + \left( 1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x) \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^2)^2}(x) \right). \end{aligned}$$

Als Euler-Lagrange-Gleichung erhalten wir also

$$\left(1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right)^2\right) \frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^1)^2} - 2 \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1 \partial x^2} + \left(1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right)^2\right) \frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^2)^2} = 0.$$

Diese Gleichung wird **Minimalflächengleichung** genannt.  $\square$

Als letztes Beispiel geben wir das so genannte **Dirchlet-Problem** an.

**Beispiel 3.3.5** Wir betrachten

$$M(\sigma) = \left\{ \varphi \in C^1(\bar{B}^n) : \varphi|_{S^{n-1}} = \sigma \right\}$$

für eine vorgegebene stetige Abbildung  $\sigma : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Man minimiere das Funktional

$$\Psi : M(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Psi(\varphi) = \int_{B^n} |\text{grad}(\varphi)(x)|^2 dx.$$

Hier ist

$$h(x, y, z) = |z|^2.$$

Da

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial h}{\partial z^i}(x, \varphi(x), \text{grad}(\varphi)(x)) \right) = 2 \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^i)^2},$$

ist in diesem Beispiel die **Laplace-Gleichung**

$$\Delta\varphi = 0$$

die Euler-Lagrange-Gleichung zu  $h$ . Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass es höchstens eine Lösung  $\varphi_0 \in M(\sigma) \cap C^2(\bar{B}^n)$  dieser Gleichung gibt.  $\square$

### 3.4 Laplace-Poisson-Gleichung

In diesem Abschnitt sind einige Fakten zu Lösungen der Laplace- bzw. Poisson-Gleichung zusammengestellt. Für Details verweisen wir auf [3].

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , ein Gebiet. Wir erinnern an folgende Definition.

**Definition 3.4.1** Eine Funktion  $\varphi \in C^2(U)$  heißt **harmonisch**, falls sie eine Lösung der Laplace-Gleichung  $\Delta\varphi = 0$  ist.

**Beispiel 3.4.2** (i) Die konstanten Funktionen und die Funktionen  $\varphi(x) = \langle a, x \rangle + \alpha$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , und  $\varphi(x) = (x^1)^2 - (x^2)^2$  sind harmonisch auf  $\mathbb{R}^n$ .

(ii) Wir definieren  $G_0 : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$G_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log(x) & , n = 2 \\ \frac{1}{n(2-n)\omega_n} |x|^{2-n} & , n > 2 \end{cases},$$

wobei  $\omega_n$  das Volumen der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Dann ist  $G_0$  harmonisch. Für  $n > 2$  sieht man das folgendermaßen. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_0}{\partial x^i}(x) &= \frac{1}{n(2-n)\omega_n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 \right)^{1-n/2} \\ &= \frac{1}{n\omega_n} x^i |x|^{-n}\end{aligned}$$

und folglich

$$\frac{\partial^2 G_0}{(\partial x^i)^2}(x) = \frac{1}{n\omega_n} \left( |x|^{-n} - n (x^i)^2 |x|^{-n-2} \right).$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned}(\Delta G_0)(x) &= \frac{1}{n\omega_n} \sum_{i=1}^n \left( |x|^{-n} - n (x^i)^2 |x|^{-n-2} \right) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \left( |x|^{-n} - |x|^{-n-2} \sum_{i=1}^n (x^i)^2 \right) \\ &= \frac{1}{\omega_n} (|x|^{-n} - |x|^{-n}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Analog geht man für  $n = 2$  vor.

Wie man sofort sieht, ist auch

$$G_y : \mathbb{R}^n \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G_y(x) = G_0(x - y),$$

für jedes  $y \in \mathbb{R}^n$  harmonisch. □

**Definition 3.4.3** Die oben angegebenen Funktionen  $G_y$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , werden **Fundamentallösungen der Laplace-Gleichung** genannt.

**Satz 3.4.4 (Greensche Darstellungsformel)** Sei  $U$  beschränkt und mit glattem Rand. Sei  $\varphi \in C^2(\bar{U})$  und sei  $y \in U$ . Dann gilt

$$\varphi(y) = \int_{\partial U} \left( \varphi(x) \frac{\partial G_y}{\partial \nu}(x) - G_y(x) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(x) \right) d(\partial U) + \int_U G_y(x) (\Delta \varphi)(x) dx.$$

Dabei bezeichnet  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  wieder die äußere Normalableitung (vgl. Bemerkung 1.7.4). □

**Satz 3.4.5 (Starkes Maximumprinzip)** Sei  $\varphi \in C^2(U)$  harmonisch. Existiert ein  $x_0 \in U$  mit

$$\varphi(x_0) = \sup_{x \in U} \varphi(x), \quad (3.4.1)$$

so ist  $\varphi$  konstant. □

**Folgerung 3.4.6 (Schwach Maximumprinzip)** Sei  $U$  beschränkt und sei  $\varphi \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$  harmonisch in  $U$ . Dann gilt

$$\varphi(y) \leq \max_{x \in \partial U} \varphi(x) \quad \text{für alle } y \in U. \quad (3.4.2)$$

*Beweis.* Wir nehmen an, dass (3.4.2) nicht gilt. Dann existiert ein  $x_0 \in U$  mit (3.4.1). Nach Satz 3.4.5 folgt, dass  $\varphi$  konstant ist. Insbesondere gilt (3.4.2), was ein Widerspruch zur Annahme ist.  $\square$

Wir nutzen das eben angegebene Maximumprinzip zum Beweis von

**Satz 3.4.7** *Sei  $U$  beschränkt, sei  $f \in C^0(U)$  und seien  $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$  zwei Lösungen der Poisson-Gleichung zu  $f$ , d.h. es gelte*

$$(\Delta\varphi_i)(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in U \quad \text{und } i = 1, 2.$$

*Ist dann*

$$\varphi_1|_{\partial U} = \varphi_2|_{\partial U}, \tag{3.4.3}$$

*so ist  $\varphi_1 = \varphi_2$ .*

*Beweis.* Gelte (3.4.3). Für  $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2 \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$  haben wir dann

$$\varphi|_{\partial U} = 0.$$

Da  $\varphi$  außerdem harmonisch ist, gilt nach Folgerung 3.4.6

$$\varphi(y) \leq 0 \quad \text{für alle } y \in U.$$

Da auch  $-\varphi$  harmonisch ist, folgt genauso

$$-\varphi(y) \leq 0 \quad \text{für alle } y \in U.$$

Also ist

$$\varphi(y) = 0 \quad \text{für alle } y \in U,$$

d.h.

$$\varphi_1(y) = \varphi_2(y) \quad \text{für alle } y \in U.$$

$\square$

**Bemerkung 3.4.8** Sei  $U$  beschränkt und sei  $\sigma \in C^0(\partial U)$  vorgegeben. Eine unmittelbare Konsequenz von Satz 3.4.7 ist, dass höchstens eine Lösung des **Dirichlet-Problems** existiert. Das heißt, es gibt höchstens eine Funktion  $\varphi \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$  mit

$$(\Delta\varphi)(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in U$$

und

$$\varphi|_{\partial U} = \sigma.$$

$\square$

Der folgende Satz gibt zusammen mit Bemerkung 3.4.8 eine vollständige Lösung des Dirichlet-Problems auf der Kugel.

**Satz 3.4.9 (Poissonsche Darstellungsformel)** *Sei*

$$B_R^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\} \quad \text{und} \quad S_R^{n-1} := \partial B_R^n$$

*für ein  $R > 0$ . Sei  $\sigma : S_R^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und sei  $\varphi : B_R^n \rightarrow \mathbb{R}$  durch*

$$\varphi(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} \int_{S_R^{n-1}} \frac{\sigma(x)}{|x - y|^n} dS_R^{n-1}$$

*definiert. Dann ist  $\varphi \in C^2(B_R^n) \cap C^0(\bar{B}_R^n)$  und es gilt*

$$(\Delta\varphi)(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in B_R^n$$

*sowie*

$$\varphi|_{S_R^{n-1}} = \sigma.$$

$\square$

# Literaturverzeichnis

- [1] I. Agricola, T. Friedrich: Globale Analysis. Differentialformen in Analysis, Geometrie und Physik. Vieweg (2001)
- [2] M. Giaquinta, S. Hildebrandt: Calculus of variations 1: The Lagrangian formalism. Springer (1996)
- [3] J. Jost: Partielle Differentialgleichungen. Springer (1998)
- [4] A.L. Onishchik, R. Sulanke: Algebra und Geometrie 2: Moduln und Algebren. Deutscher Verlag der Wissenschaften (1988)
- [5] R. Remmert: Funktionentheorie 1. Springer (1995)
- [6] R. Remmert: Funktionentheorie 2. Springer (1995)
- [7] R. Sulanke, P. Wintgen: Differentialgeometrie und Faserbündel. Deutscher Verlag der Wissenschaften (1972)