

1 Formen und äußeres Differential

Wir betrachten den n -dimensionalen reellen Raum

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x^1, \dots, x^n) : x^i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, n\} .$$

Definition 1.1 Ein **Tangentialvektor** an \mathbb{R}^n im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein Paar (x, \mathbf{a}) mit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Der Punkt x wird dann **Fußpunkt** des Tangentialvektors (x, \mathbf{a}) genannt. Die Menge aller Tangentialvektoren an \mathbb{R}^n im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $T_x \mathbb{R}^n$.

Lemma 1.2 Die Menge $T_x \mathbb{R}^n$ ist zusammen mit den Operationen

$$(x, \mathbf{a}) + (x, \mathbf{b}) = (x, \mathbf{a} + \mathbf{b})$$

und

$$\alpha(x, \mathbf{a}) = (x, \alpha \mathbf{a}) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}$$

ein n -dimensionaler Vektorraum. □

Definition 1.3 Der Vektorraum $T_x \mathbb{R}^n$ heißt der **Tangentialraum** an \mathbb{R}^n im Punkte $x \in \mathbb{R}^n$.

Im Folgenden sei \mathcal{O} eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n . (Wir werden im Weiteren hauptsächlich den Fall $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$ betrachten.)

Definition 1.4 Ein **Vektorfeld** auf \mathcal{O} ist eine Abbildung V , die jedem $x \in \mathcal{O}$ einen Tangentialvektor $V(x) \in T_x \mathbb{R}^n$ zuordnet.

Beispiel 1.5 (i) Sei $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ die Standardbasis des \mathbb{R}^n , also

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 := (0, 1, 0, \dots, 0) \text{ usw.}$$

Wir definieren das Vektorfeld ∂_i auf \mathbb{R}^n für $i = 1, \dots, n$ durch

$$\partial_i(x) := (x, \mathbf{e}_i) .$$

(ii) Sei $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Das Vektorfeld $\text{grad}(f)$ auf \mathcal{O} ist durch

$$\text{grad}(f) := \sum_{i=1}^n \partial_i(f) \partial_i$$

gegeben. Dabei ist

$$\partial_i(f) := \frac{\partial f}{\partial x^i} .$$

□

Da $\{\partial_1(x), \dots, \partial_n(x)\}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von $T_x \mathbb{R}^n$ ist, kann jedes Vektorfeld V auf \mathcal{O} in der Form

$$V = \sum_{i=1}^n V^i \partial_i \tag{1.1}$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen $V^i : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ geschrieben werden. Dabei bedeutet (1.1), dass

$$V(x) = \sum_{i=1}^n V^i(x) \partial_i(x) \quad \text{für alle } x \in \mathcal{O} .$$

Definition 1.6 Ein Vektorfeld V auf \mathcal{O} heißt **glatt** $:\Leftrightarrow$ Die Koeffizientenfunktionen $V^i : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, sind von der Klasse C^∞ , also unendlich oft differenzierbar. Die Menge der glatten Vektorfelder auf \mathcal{O} bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}(\mathcal{O})$.

Definition 1.7 Für einen reellen Vektorraum E und $k \in \mathbb{N}$ sei $\Lambda^k(T_x\mathbb{R}^n, E)$ der Vektorraum der alternierenden k -linearen Abbildungen auf $T_x\mathbb{R}^n$ mit Werten in E , d.h. der Abbildungen

$$\varphi : \underbrace{T_x\mathbb{R}^n \times \dots \times T_x\mathbb{R}^n}_{k\text{-mal}} \rightarrow E$$

mit den folgenden beiden Eigenschaften.

(i) Für alle $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_k \in T_x\mathbb{R}^n$, alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $i = 1, \dots, k$ gilt

$$\begin{aligned} & \varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha v_i + \beta w_i, v_{i+1}, \dots, v_k) \\ &= \alpha \varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k) + \beta \varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \dots, v_k). \end{aligned}$$

(ii) Für alle $v_1, \dots, v_k \in T_x\mathbb{R}^n$ und $1 \leq i < j \leq k$ gilt

$$\begin{aligned} & \varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_k) \\ &= -\varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Des Weiteren setzen wir

$$\Lambda^k(T_x\mathbb{R}^n) := \Lambda^k(T_x\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Insbesondere ist $\Lambda^1(T_x\mathbb{R}^n)$ der Raum der linearen Abbildungen $\varphi : T_x\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, also der duale Vektorraum zu $T_x\mathbb{R}^n$. Dieser wird auch mit $T_x^*\mathbb{R}^n$ bezeichnet und der **Kotangentialraum** an \mathbb{R}^n im Punkt x genannt.

Bemerkung 1.8 (i) Die Bedingung (ii) aus Definition 1.7 kann durch die Bedingung

$$\varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_k) = 0$$

für alle $v, v_1, \dots, v_k \in T_x\mathbb{R}^n$ und $1 \leq i < j \leq k$ ersetzt werden.

(ii) Für $k > n$ ist

$$\Lambda^k(T_x\mathbb{R}^n, E) = \{0\}.$$

□

Definition 1.9 Eine (reelle) k -Form auf \mathcal{O} ist eine Abbildung ω , die jedem $x \in \mathcal{O}$ ein $\omega_x \in \Lambda^k(T_x\mathbb{R}^n)$ zuordnet.

Beispiel 1.10 Wir definieren die 1-Form dx^i auf \mathbb{R}^n für $i = 1, \dots, n$ durch

$$(dx^i)_x(\partial_j(x)) := \delta_{ij} \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

□

Sind ν^1, \dots, ν^k 1-Formen auf \mathcal{O} , so sei $\nu^1 \wedge \dots \wedge \nu^k$ die durch

$$(\nu^1 \wedge \dots \wedge \nu^k)_x(v_1, \dots, v_k) := \begin{vmatrix} \nu_x^1(v_1) & \dots & \nu_x^1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \nu_x^k(v_1) & \dots & \nu_x^k(v_k) \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

für $v_1, \dots, v_k \in T_x \mathbb{R}^n$ bestimmte k -Form auf \mathcal{O} . Insbesondere ist

$$(\nu^1 \wedge \nu^2)_x(v_1, v_2) = \nu_x^1(v_1)\nu_x^2(v_2) - \nu_x^1(v_2)\nu_x^2(v_1).$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} & \nu^1 \wedge \dots \wedge \nu^{i-1} \wedge \nu^i \wedge \nu^{i+1} \wedge \dots \wedge \nu^{j-1} \wedge \nu^j \wedge \nu^{j+1} \wedge \dots \wedge \nu^k \\ &= -\nu^1 \wedge \dots \wedge \nu^{i-1} \wedge \nu^j \wedge \nu^{i+1} \wedge \dots \wedge \nu^{j-1} \wedge \nu^i \wedge \nu^{j+1} \wedge \dots \wedge \nu^k. \end{aligned}$$

Da die Elemente

$$(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k})_x \quad \text{mit} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$$

eine Basis von $\Lambda^k(T_x \mathbb{R}^n)$ bilden, kann jede k -Form ω auf \mathcal{O} in eindeutiger Weise in der Form

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \quad (1.3)$$

mit Funktionen $\omega_{i_1 \dots i_k} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ geschrieben werden, wobei die Addition und Multiplikation in (1.3) wiederum punktweise zu verstehen sind.

Definition 1.11 *Das äußere Produkt einer k -Form*

$$\omega^1 = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k}^1 \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

und einer l -Form

$$\omega^2 = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n} \omega_{j_1 \dots j_l}^2 \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}$$

auf \mathcal{O} ist die $k+l$ -Form

$$\omega^1 \wedge \omega^2 := \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n}} \omega_{i_1 \dots i_k}^1 \omega_{j_1 \dots j_l}^2 \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}.$$

Man überprüft leicht, dass Definition 1.11 im Fall, dass ω^1 und ω^2 1-Formen sind, mit (1.2) verträglich ist.

Beispiel 1.12 Für die Formen

$$\omega^1 = f_1 \mathrm{d}x^1 + f_2 \mathrm{d}x^3 \quad \text{und} \quad \omega^2 = f_3 \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + f_4 \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^4$$

auf \mathcal{O} mit Funktionen $f_1, \dots, f_4 : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} \omega^1 \wedge \omega^2 &= f_1 f_3 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + f_1 f_4 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^4 \\ &\quad + f_2 f_3 \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + f_2 f_4 \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^4 \\ &= f_1 f_3 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + f_1 f_4 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^4 \\ &\quad - f_2 f_4 \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^4. \end{aligned}$$

□

Definition 1.13 *Sei E ein reeller Vektorraum. Eine E -wertige k -Form auf \mathcal{O} ist eine Abbildung η , die jedem $x \in \mathcal{O}$ ein $\eta_x \in \Lambda^k(T_x \mathbb{R}^n, E)$ zuordnet.*

Jede E -wertige k -Form η kann in eindeutiger Weise als

$$\eta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \eta_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

mit Abbildungen $\eta_{i_1 \dots i_k} : \mathcal{O} \rightarrow E$ geschrieben werden.

Bemerkung 1.14 Für E -wertige Formen η^1 und η^2 ist $\eta^1 \wedge \eta^2$ i.Allg. nicht definiert. Jedoch kann man $\eta \wedge \omega$ für eine E -wertige Form η und eine reelle Form ω wie in Definition 1.11 bilden. \square

Definition 1.15 Eine E -wertige k -Form η auf \mathcal{O} heißt **glatt** $:\Leftrightarrow$ Alle Koeffizientenabbildungen $\eta_{i_1 \dots i_k} : \mathcal{O} \rightarrow E$ sind von der Klasse C^∞ . Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\Omega^k(\mathcal{O}, E)$ der Raum der glatten E -wertigen k -Formen auf \mathcal{O} . Den Raum der glatten reellen k -Formen auf \mathcal{O} bezeichnen wir mit $\Omega^k(\mathcal{O})$, d.h.

$$\Omega^k(\mathcal{O}) := \Omega^k(\mathcal{O}, \mathbb{R}).$$

Außerdem sei $\Omega^0(\mathcal{O}, E)$ der Raum der C^∞ -Abbildungen $f : \mathcal{O} \rightarrow E$. Insbesondere ist

$$\Omega^0(\mathcal{O}) := \Omega^0(\mathcal{O}, \mathbb{R}).$$

der Ring der glatten reellen Funktionen auf \mathcal{O} .

Man sieht leicht ein, dass $\mathfrak{X}(\mathcal{O})$ und $\Omega^k(\mathcal{O}, E)$ mit der punktweisen Addition und der punktweisen Multiplikation mit reellen Funktionen Moduln über dem Ring $\Omega^0(\mathcal{O})$ sind.

Bemerkung 1.16 Sei $\eta \in \Omega^k(\mathcal{O}, E)$.

- (i) Statt $\eta_x(v_1, \dots, v_k)$ für $x \in \mathcal{O}$ und $v_1, \dots, v_k \in T_x \mathbb{R}^n$ schreiben wir auch $\eta(v_1, \dots, v_k)$.
- (ii) Sind $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(\mathcal{O})$, so sei $\eta(X_1, \dots, X_k) \in \Omega^0(\mathcal{O}, E)$ durch

$$(\eta(X_1, \dots, X_k))(x) := \eta(X_1(x), \dots, X_k(x))$$

erklärt.

- (iii) Ist $f \in \Omega^0(\mathcal{O})$, so sei

$$f \wedge \eta := f\eta \in \Omega^k(\mathcal{O}, E).$$

(Analog für $f \in \Omega^0(\mathcal{O}, E)$ und $\eta \in \Omega^k(\mathcal{O})$.)

\square

Definition 1.17 Das **äußere Differential** $d : \Omega^k(\mathcal{O}, E) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{O}, E)$, $k \in \mathbb{N}_0$, ist folgendermaßen definiert. Ist

$$\eta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \eta_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(\mathcal{O}, E),$$

so sei

$$d\eta := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \partial_j(\eta_{i_1 \dots i_k}) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Insbesondere ist

$$df := \sum_{j=1}^n \partial_j(f) dx^j \quad \text{für } f \in \Omega^0(\mathcal{O}, E)$$

und somit gilt

$$d\eta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\eta_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Beispiel 1.18 Für die Form

$$\omega = \sin(x^1 x^4) dx^1 \wedge dx^3 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$$

ist

$$\begin{aligned} d\omega &= x^4 \cos(x^1 x^4) dx^1 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + x^1 \cos(x^1 x^4) dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ &= x^1 \cos(x^1 x^4) dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4 . \end{aligned}$$

□

Satz 1.19 (i) Für $\omega^1, \omega^2 \in \Omega^k(\mathcal{O})$ ist

$$d(\omega^1 + \omega^2) = d\omega^1 + d\omega^2 .$$

(ii) Für $\omega^1 \in \Omega^k(\mathcal{O})$ und $\omega^2 \in \Omega^l(\mathcal{O})$ ist

$$d(\omega^1 \wedge \omega^2) = d\omega^1 \wedge \omega^2 + (-1)^k \omega^1 \wedge d\omega^2 .$$

(iii) Ist $f \in \Omega^0(\mathbb{R})$ die durch

$$f(x) := x^i$$

definierte Funktion, so ist

$$df = dx^i .$$

(iv) Für jedes $\omega \in \Omega^k(\mathcal{O})$ ist

$$d\omega = 0 .$$

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) folgen unmittelbar aus Definition 1.17 und der Ableitungsregel für Produkte von Funktionen.

(iii) Sei f wie angegeben. Dann ist

$$\partial_j(f) = \delta_{ij}$$

und somit

$$df = \sum_{j=1}^n \partial_j(f) dx^j = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} dx^j = dx^i .$$

(iv) Sei $f \in \Omega^0(\mathcal{O})$. Dann ist

$$\begin{aligned} dd f &= d \left(\sum_{j=1}^n \partial_j(f) dx^j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j(f) dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i < j} \partial_i \partial_j(f) dx^i \wedge dx^j + \sum_{i > j} \partial_i \partial_j(f) dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i < j} \partial_i \partial_j(f) dx^i \wedge dx^j + \sum_{i < j} \partial_j \partial_i(f) dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{i < j} (\partial_i \partial_j(f) - \partial_j \partial_i(f)) dx^i \wedge dx^j , \end{aligned}$$

was nach dem Lemma von Schwarz

$$dd f = 0 \tag{1.4}$$

impliziert. Laut Definition 1.17 gilt außerdem

$$d(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = 0. \quad (1.5)$$

Ist nun

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

so erhalten wir aus (1.4) und (1.5) mittels der Aussagen (i) und (ii)

$$\begin{aligned} dd\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} d(dx^{\omega_{i_1 \dots i_k}} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} (dd\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} - d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge d(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.20 (i) Satz 1.19(iii) rechtfertigt die Bezeichnung dx^i .

(ii) Die Aussagen (i) und (iv) aus Satz 1.19 gelten in gleicher Weise für E -wertige Formen, die Aussage (ii) gilt auch für $\omega^1 \in \Omega^k(\mathcal{O}, E)$ und $\omega^2 \in \Omega^l(\mathcal{O})$.

□

Definition 1.21 (1) Ist $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$, so bezeichne $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ das Signum der Permutation

$$j \in \{1, \dots, n\} \mapsto i_j \in \{1, \dots, n\}.$$

(2) Der **Hodge-Operator** $*$: $\Omega^k(\mathcal{O}, E) \rightarrow \Omega^{n-k}(\mathcal{O}, E)$, $k = 0, \dots, n$, ist durch die folgenden zwei Bedingungen definiert.

(i) Für alle $\eta^1, \eta^2 \in \Omega^k(\mathcal{O}, E)$ ist

$$*(\eta^1 + \eta^2) = *\eta^1 + *\eta^2.$$

(ii) Für alle $f \in \Omega^0(\mathcal{O}, E)$ und alle $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ ist

$$*(f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = \varepsilon_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{n-k}} f dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-k}},$$

$$\text{wobei } \{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\}.$$

Wie man leicht sieht, ist

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge *(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Insbesondere ist

$$*f = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad \text{und} \quad *(f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = f$$

für $f \in \Omega^0(\mathcal{O}, E)$.

Beispiel 1.22 Für

$$\omega = f_1 dx^1 \wedge dx^3 + f_2 dx^2 \wedge dx^4 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4, E)$$

mit $f_1, f_2 \in \Omega^0(\mathbb{R}^4, E)$ ist

$$\begin{aligned} *\omega &= \varepsilon_{1324} f_1 dx^2 \wedge dx^4 + \varepsilon_{2413} f_2 dx^1 \wedge dx^3 \\ &= -f_1 dx^2 \wedge dx^4 - f_2 dx^1 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

□

2 Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Definition 2.1 (1) Eine (reelle) **Lie-Algebra** ist ein reeller Vektorraum \mathfrak{g} mit einer Operation

$$(X_1, X_2) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto [X_1, X_2] \in \mathfrak{g},$$

die den folgenden Eigenschaften genügt.

(i) $[\cdot, \cdot]$ ist bilinear, d.h. für alle $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$ und alle $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ ist

$$[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2] = \alpha_1 \beta_1 [X_1, Y_1] + \alpha_1 \beta_2 [X_1, Y_2] + \alpha_2 \beta_1 [X_2, Y_1] + \alpha_2 \beta_2 [X_2, Y_2].$$

(ii) $[\cdot, \cdot]$ ist antikommutativ, d.h. für alle $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ gilt

$$[X_1, X_2] = -[X_2, X_1].$$

(iii) $[\cdot, \cdot]$ erfüllt die **Jacobi-Identität**, d.h. für alle $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{g}$ gilt

$$[X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0.$$

(2) \mathfrak{h} heißt **Lie-Unteralgebra** der Lie-Algebra $\mathfrak{g} : \iff \mathfrak{h}$ ist ein Unterraum von \mathfrak{g} und

$$[X_1, X_2] \in \mathfrak{h} \quad \text{für alle } X_1, X_2 \in \mathfrak{h}.$$

Ist $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ eine Lie-Algebra, so wird die Operation $[\cdot, \cdot]$ die **Lie-Klammer** oder das **Lie-Produkt** von \mathfrak{g} genannt.

Sei $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und sei $M_m(K)$ der Vektorraum der $(m \times m)$ -Matrizen mit Koeffizienten in \mathbb{K} .

Lemma 2.2 $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{K}) := M_m(\mathbb{K})$ ist zusammen mit der durch

$$[X_1, X_2] := X_1 X_2 - X_2 X_1$$

definierten Operation $[\cdot, \cdot]$ eine Lie-Algebra.

Beweis. Die Bedingungen (i) und (ii) von Definition 2.1 sind offensichtlich erfüllt. Wir zeigen (iii). Es ist

$$\begin{aligned} [X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] &= X_1 X_2 X_3 - X_1 X_3 X_2 - X_2 X_3 X_1 + X_3 X_2 X_1 \\ &\quad + X_2 X_3 X_1 - X_2 X_1 X_3 - X_3 X_1 X_2 + X_1 X_3 X_2 \\ &\quad + X_3 X_1 X_2 - X_3 X_2 X_1 - X_1 X_2 X_3 + X_2 X_1 X_3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.3 Die Mengen

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}(m) &:= \{X \in M_m(\mathbb{C}) : X + \bar{X}^T = 0\}, \\ \mathfrak{su}(m) &:= \{X \in M_m(\mathbb{C}) : X + \bar{X}^T = 0 \text{ und } \text{tr}(X) = 0\}, \\ \mathfrak{so}(m) &:= \mathfrak{su}(m) \cap M_m(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

sind Lie-Unteralgebren von $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$.

Beweis. Offensichtlich sind $\mathfrak{u}(m)$, $\mathfrak{su}(m)$ und $\mathfrak{so}(m)$ Unterräume von $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$. Sind $X_1, X_2 \in \mathfrak{u}(m)$, so ist

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] + \overline{[X_1, X_2]}^T &= X_1 X_2 - X_2 X_1 + \overline{X_1 X_2}^T - \overline{X_2 X_1}^T \\ &= X_1 X_2 - X_2 X_1 + \bar{X}_2^T \bar{X}_1^T - \bar{X}_1^T \bar{X}_2^T \\ &= X_1 X_2 - X_2 X_1 + X_2 X_1 - X_1 X_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{tr}([X_1, X_2]) = \operatorname{tr}(X_1 X_2) - \operatorname{tr}(X_2 X_1) = 0.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar. \square

Wir werden vor allem die Lie-Algebren $\mathfrak{u}(1)$ und $\mathfrak{su}(2)$ betrachten. Für diese haben wir

$$\mathfrak{u}(1) = \mathbb{R}i$$

und

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ti & z \\ -\bar{z} & -ti \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Außerdem ist die Lie-Algebra $\mathfrak{u}(1)$ **abelsch**, d.h.

$$[X_1, X_2] = 0 \quad \text{für alle } X_1, X_2 \in \mathfrak{u}(1).$$

Sei $GL(m, \mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren Matrizen $g \in M_m(\mathbb{C})$. Das Einselement von $GL(m, \mathbb{C})$ bezeichnen wir mit I_m .

Definition 2.4 Die **Exponentialabbildung** $\exp : \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}) \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ ist durch

$$\exp(X) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k = I_m + X + \frac{1}{2} X^2 + \dots \quad (2.1)$$

definiert.

Bemerkung 2.5 (i) Man betrachte auf $M_m(\mathbb{C})$ die durch

$$\|X\| := \left(\sum_{i,j=1}^m |X_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad \text{für } X = (X_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$$

definierte Norm. Dann ist

$$\|X_1 \cdot X_2\| \leq \|X_1\| \cdot \|X_2\| \quad \text{für } X_1, X_2 \in M_m(\mathbb{C}),$$

also insbesondere

$$\|X^k\| \leq \|X\|^k \quad \text{für } X \in M_m(\mathbb{C}).$$

Somit haben wir

$$\left\| \sum_{k=0}^l \frac{1}{k!} X^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|X\|^k}{k!} = \exp(\|X\|)$$

für alle $l \in \mathbb{N}$, woraus die Konvergenz von (2.1) folgt.

(ii) Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$\exp(t_1 X + t_2 X) = \exp(t_1 X) \exp(t_2 X)$$

für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ und alle $X \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$. Insbesondere ist

$$\exp(X) \exp(-X) = \exp(0) = I_m$$

und somit tatsächlich

$$\exp(X) \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}) .$$

□

Lemma 2.6 Sei $X \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$ und $g \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$. Dann gilt:

(i) Die Abbildung $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tX) \in M_m(\mathbb{C})$ ist differenzierbar und

$$\frac{d}{dt} \exp(tX) = \exp(tX) X .$$

(ii) $\exp(gXg^{-1}) = g \exp(X) g^{-1}$.

(iii) $\det(\exp(X)) = \exp(\mathrm{tr}(X))$.

Beweis. (i) und (ii) folgen unmittelbar aus Definition 2.4.

(iii) Sei $\tilde{X} \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$ eine obere Dreiecksmatrix, d.h. es gelte

$$\tilde{X}_{ij} = 0 \quad \text{für } i > j .$$

Dann ist

$$(\exp(\tilde{X}))_{ii} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tilde{X}^k)_{ii}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tilde{X}_{ii})^k}{k!} = \exp(\tilde{X}_{ii})$$

für $i = 1, \dots, m$ und

$$(\exp(\tilde{X}))_{ij} = 0$$

für $i > j$. Somit ist

$$\det(\exp(\tilde{X})) = \prod_{i=1}^m \exp(\tilde{X}_{ii}) = \exp\left(\sum_{i=1}^m \tilde{X}_{ii}\right) = \exp(\mathrm{tr}(\tilde{X})) . \quad (2.2)$$

Ist $X \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$ beliebig, so wählen wir $g \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ derart, dass $\tilde{X} := gXg^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, und schließen mit Hilfe von (ii) und (2.2), dass

$$\begin{aligned} \det(\exp(X)) &= \det(g \exp(X) g^{-1}) = \det(\exp(\tilde{X})) \\ &= \exp(\mathrm{tr}(\tilde{X})) = \exp(\mathrm{tr}(X)) . \end{aligned}$$

□

Wir setzen jetzt

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(m) &:= \{g \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}) : g\bar{g}^T = I_m\} , \\ \mathrm{SU}(m) &:= \{g \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}) : g\bar{g}^T = I_m \text{ und } \det(g) = 1\} , \\ \mathrm{SO}(m) &:= \mathrm{SU}(m) \cap M_m(\mathbb{R}) . \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\mathrm{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = S^1$$

und

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \\ -\bar{z}^2 & \bar{z}^1 \end{pmatrix} : z^1, z^2 \in \mathbb{C} \text{ und } |z^1|^2 + |z^2|^2 = 1 \right\} \cong S^3 .$$

Man sieht einfach ein, dass $\mathrm{U}(m)$, $\mathrm{SU}(m)$ und $\mathrm{SO}(m)$ Untergruppen von $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ sind.

Definition 2.7 Sei $G = U(m)$, $G = SU(m)$ oder $G = SO(m)$. Eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ heißt **differenzierbar** : \iff Die Verknüpfung $\iota_G \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow M_m(\mathbb{C})$ von γ mit der Inklusion $\iota_G : G \hookrightarrow M_m(\mathbb{C})$ ist differenzierbar.

Satz 2.8 Sei G wie in Definition 2.7 und sei entsprechend $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(m)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(m)$ bzw. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(m)$. Dann gilt:

- (i) Ist $X \in \mathfrak{g}$, so ist $\exp(X) \in G$.
- (ii) Für $X \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$ gilt $X \in \mathfrak{g}$ genau dann, wenn eine differenzierbare Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ mit

$$\gamma(0) = I_m \quad \text{und} \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = X \quad (2.3)$$

existiert.

Beweis. (i) Die Behauptung erhält man aus folgenden Überlegungen. Für $X \in \mathfrak{u}(m)$ ist (vgl. Bemerkung 2.5(ii))

$$\exp(X) \overline{\exp(X)}^T = \exp(X) \exp(\bar{X}^T) = \exp(X) \exp(-X) = I_m .$$

Ist $\text{tr}(X) = 0$, so gilt nach Lemma 2.6(iii)

$$\det(\exp(X)) = \exp(\text{tr}(X)) = 1 .$$

- (ii) Ist $X \in \mathfrak{g}$, so ist nach (i) und Lemma 2.6(i) durch

$$\gamma(t) := \exp(tX)$$

eine differenzierbare Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ mit (2.3) definiert. Damit ist eine Richtung der Behauptung gezeigt.

Die andere Richtung sieht man folgendermaßen. Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ eine differenzierbare Kurve mit (2.3). Für den Fall $G = U(m)$ haben wir

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\gamma(t) \overline{\gamma(t)}^T \right) \Big|_{t=0} = \left(\frac{d\gamma}{dt}(t) \overline{\gamma(t)}^T + \gamma(t) \overline{\frac{d\gamma}{dt}(t)}^T \right) \Big|_{t=0} = X + \bar{X}^T .$$

Ist $G = SU(m)$ und bezeichnen $\gamma_{(1)}(t), \dots, \gamma_{(m)}(t)$ und $X_{(1)}, \dots, X_{(m)}$ die Spalten von $\gamma(t)$ bzw. X , so gilt zusätzlich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \det(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \det(\gamma_{(1)}(t), \dots, \gamma_{(m)}(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^m \det \left(\gamma_{(1)}(t), \dots, \gamma_{(i-1)}(t), \frac{d\gamma_{(i)}}{dt}(t), \gamma_{(i+1)}(t), \dots, \gamma_{(m)}(t) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^m \det(\gamma_{(1)}(0), \dots, \gamma_{(i-1)}(0), X_{(i)}, \gamma_{(i+1)}(0), \dots, \gamma_{(m)}(0)) \\ &= \sum_{i=1}^m X_{ii} \\ &= \text{tr}(X) . \end{aligned}$$

Darüber hinaus gilt offensichtlich $X \in M(m, \mathbb{R})$, falls $G = SO(m)$. □

Bemerkung 2.9 (i) $U(m)$, $SU(m)$ und $SO(m)$ sind Beispiele für kompakte **Lie-Gruppen**.

- (ii) Sind G und \mathfrak{g} wie in Satz 2.8, so heißt \mathfrak{g} die Lie-Algebra der Lie-Gruppe G . □

3 Die Yang-Mills-Gleichung über \mathbb{R}^n

Sei G die kompakte Lie-Gruppe $U(m)$, $SU(m)$ oder $SO(m)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und sei \mathfrak{g} die Lie-Algebra von G .

Definition 3.1 Ein G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^n ist eine glatte \mathfrak{g} -wertige 1-Form A auf \mathbb{R}^n , also ein Ausdruck der Form

$$A = \sum_{i=1}^n A_i dx^i$$

mit glatten Abbildungen $A_1, \dots, A_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$.

Definition 3.2 Wir definieren die Abbildung

$$(\eta^1, \eta^2) \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g}) \times \Omega^l(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g}) \mapsto [\eta^1, \eta^2] \in \Omega^{k+l}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$$

durch die folgenden zwei Bedingungen.

(i) Für $\eta^1, \tilde{\eta}^1 \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ und $\eta^2, \tilde{\eta}^2 \in \Omega^l(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ ist

$$[\eta^1 + \tilde{\eta}^1, \eta^2 + \tilde{\eta}^2] = [\eta^1, \eta^2] + [\eta^1, \tilde{\eta}^2] + [\tilde{\eta}^1, \eta^2] + [\tilde{\eta}^1, \tilde{\eta}^2] .$$

(ii) Ist $\eta^1 = f_1 \omega^1$ und $\eta^2 = f_2 \omega^2$ mit $\omega^1 \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, $\omega^2 \in \Omega^l(\mathbb{R}^n)$ und $f_1, f_2 \in \Omega^0(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$, so ist

$$[\eta^1, \eta^2] = [f_1, f_2] \omega^1 \wedge \omega^2 .$$

Lemma 3.3 Sei $\eta^1 \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ und $\eta^2 \in \Omega^l(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$. Dann gilt:

(i) $[\eta^1, \eta^2] = (-1)^{kl+1} [\eta^2, \eta^1]$.

(ii) $d[\eta^1, \eta^2] = [d\eta^1, \eta^2] + (-1)^k [\eta^1, d\eta^2]$.

(iii) Für $k = l = 1$ und $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$[\eta^1, \eta^2](X, Y) = [\eta^1(X), \eta^2(Y)] - [\eta^1(Y), \eta^2(X)] .$$

Beweis. Wir können uns auf den Fall einschränken, dass $\eta^1 = f_1 \omega^1$ und $\eta^2 = f_2 \omega^2$ wie in Definition 3.2(ii). Dann ist

$$[\eta^1, \eta^2] = [f_1, f_2] \omega^1 \wedge \omega^2 = (-1)^{kl} [f_1, f_2] \omega^2 \wedge \omega^1 = (-1)^{kl+1} [f_2, f_1] \omega^2 \wedge \omega^1 = (-1)^{kl+1} [\eta^2, \eta^1] .$$

Außerdem sieht man mittels

$$\begin{aligned} d[f_1, f_2] \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 &= \sum_{i=1}^n \partial_i [f_1, f_2] dx^i \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= \sum_{i=1}^n ([\partial_i f_1, f_2] + [f_1, \partial_i f_2]) dx^i \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= [df_1 \wedge \omega^1, \eta^2] + (-1)^k \sum_{i=1}^n [f_1, \partial_i f_2] \omega^1 \wedge dx^i \wedge \omega^2 \\ &= [df_1 \wedge \omega^1, \eta^2] + (-1)^k [\eta^1, df_2 \wedge \omega^2] \end{aligned}$$

und Satz 1.19(ii), dass

$$\begin{aligned}
d[\eta^1, \eta^2] &= d([f_1, f_2]\omega^1 \wedge \omega^2) \\
&= d[f_1, f_2] \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + [f_1, f_2] (d\omega^1 \wedge \omega^2 + (-1)^k \omega^1 \wedge d\omega^2) \\
&= [df_1 \wedge \omega^1, \eta^2] + (-1)^k [\eta^1, df_2 \wedge \omega^2] + [f_1 d\omega^1, \eta^2] + (-1)^k [\eta^1, f_2 d\omega^2] \\
&= [df_1 \wedge \omega^1 + f_1 d\omega^1, f_2 \omega^2] + (-1)^k [f_1 \omega^1, df_2 \wedge \omega^2 + f_2 d\omega^2] \\
&= [d\eta^1, \eta^2] + (-1)^k [\eta^1, d\eta^2] .
\end{aligned}$$

Schließlich gilt für $k = l = 1$ und $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, dass

$$\begin{aligned}
[\eta^1, \eta^2](X, Y) &= [f_1, f_2]\omega^1 \wedge \omega^2(X, Y) \\
&= [f_1, f_2] (\omega^1(X)\omega^2(Y) - \omega^1(Y)\omega^2(X)) \\
&= [f_1\omega^1(X), f_2\omega^2(Y)] - [f_1\omega^1(Y), f_2\omega^2(X)] \\
&= [\eta^1(X), \eta^2(Y)] - [\eta^1(Y), \eta^2(X)] .
\end{aligned}$$

□

Definition 3.4 Die Krümmungsform eines G -Zusammenhangs A auf \mathbb{R}^n ist

$$F^A := dA + \frac{1}{2}[A, A] \in \Omega^2(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g}) .$$

Sind $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, so gilt nach Lemma 3.3(iii)

$$\begin{aligned}
F^A(X, Y) &= dA(X, Y) + \frac{1}{2}[A, A](X, Y) \\
&= dA(X, Y) + \frac{1}{2}([A(X), A(Y)] - [A(Y), A(X)]) ,
\end{aligned}$$

also

$$F^A(X, Y) = dA(X, Y) + [A(X), A(Y)] . \quad (3.1)$$

Lemma 3.5 Für einen G -Zusammenhang

$$A = \sum_{i=1}^n A_i dx^i ,$$

ist

$$F^A = \sum_{i < j} F_{ij}^A dx^i \wedge dx^j$$

mit

$$F_{ij}^A = \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j] .$$

Beweis. Es ist

$$F_{ij}^A = F^A(\partial_i, \partial_j) .$$

Mit

$$\begin{aligned}
dA &= \sum_{i,j=1}^n \partial_i(A_j) dx^i \wedge dx^j \\
&= \sum_{i < j} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) dx^i \wedge dx^j
\end{aligned}$$

und (3.1) folgt die Behauptung. □

Definition 3.6 Für einen G -Zusammenhang A auf \mathbb{R}^n und $k = 0, 1, 2, \dots$ ist das **äußere kovariante Differential**

$$d^A : \Omega^k(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$$

durch

$$d^A \eta := d\eta + [A, \eta]$$

definiert.

Satz 3.7 Sei A ein G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^n . Dann gilt

- (i) die **Bianchi-Identität** $d^A F^A = 0$,
- (ii) $d^A d^A \eta = [F^A, \eta]$ für alle $\eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$.

Beweis. (i) Unter Benutzung von Satz 1.19(iv), Lemma 3.3 und der Jacobi-Identität schließen wir

$$\begin{aligned} d^A F^A &= d^A \left(dA + \frac{1}{2}[A, A] \right) \\ &= ddA + \frac{1}{2}[dA, A] - \frac{1}{2}[A, dA] + [A, dA] + \frac{1}{2}[A, [A, A]] \\ &= -\frac{1}{2}[A, dA] - \frac{1}{2}[A, dA] + [A, dA] + \frac{1}{2}[A, [A, A]] \\ &= \frac{1}{2}[A, [A, A]] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n [A_i, [A_j, A_k]] dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^n ([A_i, [A_j, A_k]] + [A_j, [A_k, A_i]] + [A_k, [A_i, A_j]]) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii) Sei $\eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$. Dann ist nach Satz 1.19(iv) und Lemma 3.3

$$\begin{aligned} d^A d^A \eta &= d^A (d\eta + [A, \eta]) \\ &= dd\eta + [dA, \eta] - [A, d\eta] + [A, d\eta] + [A, [A, \eta]] \\ &= [dA, \eta] + [A, [A, \eta]]. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$[A, [A, \eta]] = \frac{1}{2}[[A, A], \eta]. \quad (3.2)$$

Zur Verifikation dieser Gleichung können wir annehmen, dass $\eta = f\omega$ für ein $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ und ein $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\begin{aligned} [A, [A, \eta]] &= \sum_{i,j=1}^n [A_i, [A_j, f]] dx^i \wedge dx^j \wedge \omega \\ &= - \sum_{i,j=1}^n [A_i, [f, A_j]] dx^i \wedge dx^j \wedge \omega \\ &= \sum_{i,j=1}^n [A_j, [f, A_i]] dx^i \wedge dx^j \wedge \omega \end{aligned}$$

und

$$[[A, A], \eta] = \sum_{i,j=1}^n [[A_i, A_j], f] dx^i \wedge dx^j \wedge \omega = - \sum_{i,j=1}^n [f, [A_i, A_j]] dx^i \wedge dx^j \wedge \omega ,$$

woraus mit Hilfe der Jacobi-Identität

$$2[A, [A, \eta]] - [[A, A], \eta] = \sum_{i,j=1}^n ([A_i, [A_j, f]] + [A_j, [f, A_i]] + [f, [A_i, A_j]]) dx^i \wedge dx^j \wedge \omega = 0$$

und somit (3.2) folgt. \square

Definition 3.8 Ein G -Zusammenhang A auf \mathbb{R}^n heißt **Yang-Mills-Zusammenhang** $:\Leftrightarrow A$ ist eine Lösung der **Yang-Mills-Gleichung**

$$d^A * F^A = 0 .$$

Bemerkung 3.9 Die Yang-Mills-Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung, welche i.Allg. nichtlinear ist. \square

Beispiel 3.10 Sei A ein $U(1)$ -Zusammenhang auf \mathbb{R}^n . Dann ist

$$F^A = dA$$

und

$$d^A \eta = d\eta \quad \text{für } \eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, \mathfrak{u}(1)) .$$

Folglich hat die Yang-Mills-Gleichung für $G = U(1)$ die Gestalt

$$d * dA = 0 .$$

Insbesondere ist diese Gleichung linear in A . \square

Beispiel 3.11 Sei

$$A = \sum_{i=1}^3 A_i dx^i$$

ein G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^3 mit konstanten Abbildungen $A_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{g}$, $i = 1, 2, 3$. Dann ist (vgl. Lemma 3.5)

$$F^A = [A_1, A_2] dx^1 \wedge dx^2 + [A_1, A_3] dx^1 \wedge dx^3 + [A_2, A_3] dx^2 \wedge dx^3 .$$

Folglich ist

$$*F^A = [A_1, A_2] dx^3 - [A_1, A_3] dx^2 + [A_2, A_3] dx^1$$

und somit

$$\begin{aligned} d^A * F^A = [A, *F^A] &= (-[A_1, [A_1, A_3]] - [A_2, [A_2, A_3]]) dx^1 \wedge dx^2 \\ &\quad + ([A_1, [A_1, A_2]] - [A_3, [A_2, A_3]]) dx^1 \wedge dx^3 \\ &\quad + ([A_2, [A_1, A_2]] + [A_3, [A_1, A_3]]) dx^2 \wedge dx^3 . \end{aligned}$$

Also ist A genau dann ein Yang-Mills-Zusammenhang, wenn

$$\sum_{i=1}^3 [A_i, [A_i, A_j]] = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, 3 .$$

Analoges gilt über \mathbb{R}^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. \square

4 Eichtransformationen

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass der Lösungsraum der Yang-Mills-Gleichung invariant unter der Wirkung von so genannten Eichtransformationen ist. Dabei sei G wie bisher eine der oben angeführten kompakten Lie-Gruppen und \mathfrak{g} ihre Lie-Algebra.

Definition 4.1 Eine Abbildung $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow G$ heißt **glatt** : \iff Die Verknüpfung $\iota_G \circ \sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow M_m(\mathbb{C})$ von σ mit der Inklusion $\iota_G : G \hookrightarrow M_m(\mathbb{C})$ ist glatt, also unendlich oft differenzierbar. Die Gruppe $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n, G)$ der glatten Abbildungen $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow G$ bezeichnen wir mit $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n, G)$. Die Gruppenmultiplikation ist dabei durch

$$(\sigma_1 \sigma_2)(x) := \sigma_1(x) \sigma_2(x)$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n, G)$ definiert.

Satz 4.2 Sei

$$A = \sum_{i=1}^n A_i dx^i$$

ein G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^n und sei $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n, G)$. Dann ist auch

$$A \cdot \sigma := \sigma^{-1} A \sigma + \sigma^{-1} d\sigma = \sum_{i=1}^n (\sigma^{-1} A_i \sigma + \sigma^{-1} \partial_i \sigma) dx^i \quad (4.1)$$

ein G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^n . Außerdem gilt

$$(A \cdot \sigma_1) \cdot \sigma_2 = A \cdot (\sigma_1 \sigma_2)$$

für alle $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n, G)$. (Das heißt, durch (4.1) ist eine Rechtswirkung von $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n, G)$ auf den Raum der G -Zusammenhänge auf \mathbb{R}^n definiert.)

Bemerkung 4.3 Die Elemente σ von $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n, G)$ bzw. die durch (4.1) definierten Zuordnungen $A \mapsto A \cdot \sigma$ heißen **Eichtransformationen**. \square

Zum Beweis von Satz 4.2 benutzen wir

Lemma 4.4 Sei $g \in G$ und $X \in \mathfrak{g}$. Dann ist auch $gXg^{-1} \in \mathfrak{g}$.

Beweis. Wir setzen

$$\gamma(t) := \exp(tgXg^{-1}) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$\gamma(t) = g \exp(tX) g^{-1} \in G.$$

Außerdem ist

$$\gamma(0) = I_m \quad \text{und} \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = gXg^{-1}.$$

Mittels Satz 2.8(ii) folgt

$$gXg^{-1} \in \mathfrak{g}.$$

\square

Beweis von Satz 4.2. Wir müssen zunächst zeigen, dass

$$\sigma^{-1}(x) A_i(x) \sigma(x) + \sigma^{-1}(x) \partial_i(\sigma)(x) \in \mathfrak{g}$$

für alle $i = 1, \dots, n$ und jedes $x \in \mathbb{R}^n$. Lemma 4.4 impliziert, dass

$$\sigma^{-1}(x)A_i(x)\sigma(x) \in \mathfrak{g}.$$

Setzen wir

$$\gamma(t) := \sigma^{-1}(x)\sigma(x + t\mathbf{e}_i),$$

so ist

$$\gamma(0) = I_m \quad \text{und} \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = \sigma^{-1}(x)\partial_i(\sigma)(x).$$

Also ist nach Satz 2.8(ii) auch

$$\sigma^{-1}(x)\partial_i(\sigma)(x) \in \mathfrak{g}.$$

Seien jetzt $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n, G)$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} (A \cdot \sigma_1) \cdot \sigma_2 &= (\sigma_1^{-1}A\sigma_1 + \sigma_1^{-1}d\sigma_1) \cdot \sigma_2 \\ &= \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}A\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}(d\sigma_1)\sigma_2 + \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1 d\sigma_2 \\ &= (\sigma_1\sigma_2)^{-1}A\sigma_1\sigma_2 + (\sigma_1\sigma_2)^{-1}d(\sigma_1\sigma_2) \\ &= A \cdot (\sigma_1\sigma_2). \end{aligned}$$

□

Satz 4.5 Sei A ein G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^n und $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n, G)$. Dann gilt:

(i) $F^{A \cdot \sigma} = \sigma^{-1}F^A\sigma$, d.h. $F_{ij}^{A \cdot \sigma} = \sigma^{-1}F_{ij}^A\sigma$ für $1 \leq i < j \leq n$.

(ii) Ist $\eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$, so ist auch $\sigma^{-1}\eta\sigma \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ und

$$d^{A \cdot \sigma}(\sigma^{-1}\eta\sigma) = \sigma^{-1}(d^A\eta)\sigma.$$

Beweis. (i) Aus

$$0 = \partial_i(\sigma^{-1}\sigma) = \partial_i(\sigma^{-1})\sigma + \sigma^{-1}\partial_i\sigma$$

folgt

$$\partial_i(\sigma^{-1}) = -\sigma^{-1}\partial_i(\sigma)\sigma^{-1}.$$

Außerdem gilt

$$[gX_1g^{-1}, gX_2g^{-1}] = g[X_1, X_2]g^{-1}$$

für $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ und $g \in G$. Damit schließen wir, dass

$$\begin{aligned} F_{ij}^{A \cdot \sigma} &= \partial_i(\sigma^{-1}A_j\sigma + \sigma^{-1}\partial_j\sigma) - \partial_j(\sigma^{-1}A_i\sigma + \sigma^{-1}\partial_i\sigma) \\ &\quad + [\sigma^{-1}A_i\sigma + \sigma^{-1}\partial_i\sigma, \sigma^{-1}A_j\sigma + \sigma^{-1}\partial_j\sigma] \\ &= -\sigma^{-1}\partial_i(\sigma)\sigma^{-1}A_j\sigma + \sigma^{-1}\partial_i(A_j)\sigma + \sigma^{-1}A_j\partial_i\sigma - \sigma^{-1}\partial_i(\sigma)\sigma^{-1}\partial_j\sigma + \sigma^{-1}\partial_i\partial_j\sigma \\ &\quad + \sigma^{-1}\partial_j(\sigma)\sigma^{-1}A_i\sigma - \sigma^{-1}\partial_j(A_i)\sigma - \sigma^{-1}A_i\partial_j\sigma + \sigma^{-1}\partial_j(\sigma)\sigma^{-1}\partial_i\sigma - \sigma^{-1}\partial_j\partial_i\sigma \\ &\quad + [\sigma^{-1}A_i\sigma, \sigma^{-1}A_j\sigma] + [\sigma^{-1}A_i\sigma, \sigma^{-1}\partial_j\sigma] + [\sigma^{-1}\partial_i\sigma, \sigma^{-1}A_j\sigma] + [\sigma^{-1}\partial_i\sigma, \sigma^{-1}\partial_j\sigma] \\ &= \sigma^{-1}\partial_i(A_j)\sigma - \sigma^{-1}\partial_j(A_i)\sigma + \sigma^{-1}[A_i, A_j]\sigma \\ &\quad - \sigma^{-1}\partial_i(\sigma)\sigma^{-1}A_j\sigma + \sigma^{-1}A_j\partial_i\sigma - \sigma^{-1}\partial_i(\sigma)\sigma^{-1}\partial_j\sigma \\ &\quad + \sigma^{-1}\partial_j(\sigma)\sigma^{-1}A_i\sigma - \sigma^{-1}A_i\partial_j\sigma + \sigma^{-1}\partial_j(\sigma)\sigma^{-1}\partial_i\sigma \\ &\quad + \sigma^{-1}A_i\partial_j\sigma - \sigma^{-1}\partial_j(\sigma)\sigma^{-1}A_i\sigma + \sigma^{-1}\partial_i(\sigma)\sigma^{-1}A_j\sigma \\ &\quad - \sigma^{-1}A_j\partial_i\sigma + \sigma^{-1}\partial_i(\sigma)\sigma^{-1}\partial_j\sigma - \sigma^{-1}\partial_j(\sigma)\sigma^{-1}\partial_i\sigma \\ &= \sigma^{-1}(\partial_iA_j - \partial_jA_i + [A_i, A_j])\sigma \\ &= \sigma^{-1}F_{ij}^A\sigma. \end{aligned}$$

(ii) Wir können uns wieder auf den Fall einschränken, dass $\eta = f\omega$ für ein $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ und ein $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$. Die Beziehung

$$\sigma^{-1}\eta\sigma = \sigma^{-1}f\sigma\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$$

folgt dann aus Lemma 4.4. Des Weiteren haben wir

$$\begin{aligned} d^{A \cdot \sigma}(\sigma^{-1}\eta\sigma) &= d(\sigma^{-1}\eta\sigma) + [\sigma^{-1}A\sigma + \sigma^{-1}d\sigma, \sigma^{-1}\eta\sigma] \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_i(\sigma^{-1}f\sigma) dx^i \wedge \omega + \sigma^{-1}f\sigma d\omega + \sum_{i=1}^n [\sigma^{-1}A_i\sigma + \sigma^{-1}\partial_i\sigma, \sigma^{-1}f\sigma] dx^i \wedge \omega \\ &= \sum_{i=1}^n (-\sigma^{-1}\partial_i(\sigma)\sigma^{-1}f\sigma + \sigma^{-1}\partial_i(f)\sigma + \sigma^{-1}f\partial_i\sigma) dx^i \wedge \omega + \sigma^{-1}f\sigma d\omega \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (\sigma^{-1}[A_i, f]\sigma + \sigma^{-1}\partial_i(\sigma)\sigma^{-1}f\sigma - \sigma^{-1}f\partial_i\sigma) dx^i \wedge \omega \\ &= \sigma^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \partial_i(f) dx^i \wedge \omega + f d\omega + \sum_{i=1}^n [A_i, f] dx^i \wedge \omega \right) \sigma \\ &= \sigma^{-1}(d(f\omega) + [A, f\omega])\sigma \\ &= \sigma^{-1}(d^A\eta)\sigma. \end{aligned}$$

□

Folgerung 4.6 Sei A ein G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^n und sei $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n, G)$. Ist A ein Yang-Mills-Zusammenhang, so ist auch $A \cdot \sigma$ ein Yang-Mills-Zusammenhang.

Beweis. Mit Hilfe von Satz 4.5 schließen wir

$$d^{A \cdot \sigma} * F^{A \cdot \sigma} = d^{A \cdot \sigma} * (\sigma^{-1} F^A \sigma) = d^{A \cdot \sigma} (\sigma^{-1} * F^A \sigma) = \sigma^{-1} (d^A * F^A) \sigma,$$

was sofort die Behauptung liefert. □

5 Die Yang-Mills-Gleichung unter konformen Transformationen

Im Folgenden sei \mathcal{O} wieder eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n .

Definition 5.1 Sei $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^n) : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Die **Tangentialabbildung** von Φ an der Stelle $x \in \mathcal{O}$ ist die durch

$$T_x\Phi(\partial_i(x)) = \sum_{j=1}^n \partial_i(\Phi^j)(x) \partial_j(\Phi(x)) \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

gegebene lineare Abbildung $T_x\Phi : T_x\mathbb{R}^n \rightarrow T_{\Phi(x)}\mathbb{R}^n$.

Definition 5.2 Ist $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar und η eine E -wertige k -Form auf \mathbb{R}^n , so ist die E -wertige k -Form $\Phi^*\eta$ auf \mathcal{O} durch

$$(\Phi^*\eta)_x(v_1, \dots, v_k) = \eta_{\Phi(x)}(T_x\Phi(v_1), \dots, T_x\Phi(v_k))$$

für $v_1, \dots, v_k \in T_x\mathbb{R}^n$ und $x \in \mathcal{O}$ definiert.

Bemerkung 5.3 Die Zuordnung $\eta \mapsto \Phi^*\eta$ nennt man **Zurückziehen** von Formen. □

Offensichtlich gilt

Lemma 5.4 (i) Für $\eta^1, \eta^2 \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, E)$ ist $\Phi^*(\eta^1 + \eta^2) = \Phi^*\eta^1 + \Phi^*\eta^2$.

(ii) Für $\eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, E)$ und $\omega \in \Omega^l(\mathbb{R}^n)$ ist $\Phi^*(\eta \wedge \omega) = (\Phi^*\eta) \wedge (\Phi^*\omega)$.

(iii) Für $\eta^1 \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ und $\eta^2 \in \Omega^l(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ ist $\Phi^*[\eta^1, \eta^2] = [\Phi^*\eta^1, \Phi^*\eta^2]$. □

Lemma 5.5 Sei $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^n) : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt und sei

$$\eta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \eta_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, E).$$

Dann ist

$$\Phi^*\eta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (\eta_{i_1 \dots i_k} \circ \Phi) d\Phi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi^{i_k}.$$

Insbesondere ist $\Phi^*\eta$ glatt.

Beweis. Ist $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n, E)$, so ist

$$\begin{aligned} (\Phi^*(f\omega))_x(v_1, \dots, v_k) &= (f\omega)_{\Phi(x)}(T_x\Phi(v_1), \dots, T_x\Phi(v_k)) \\ &= f(\Phi(x))\omega_{\Phi(x)}(T_x\Phi(v_1), \dots, T_x\Phi(v_k)) \\ &= (f \circ \Phi)(x)(\Phi^*\omega)_x(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

für $x \in \mathcal{O}$ und $v_1, \dots, v_k \in T_x\mathbb{R}^n$. Also gilt

$$\Phi^*(f\omega) = (f \circ \Phi)\Phi^*\omega.$$

Mit Lemma 5.4 folgt

$$\Phi^*\eta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (\eta_{i_1 \dots i_k} \circ \Phi) (\Phi^* dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge (\Phi^* dx^{i_k}).$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\Phi^* dx^i = d\Phi^i \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Diese Beziehung folgt aus

$$\begin{aligned} (\Phi^* dx^i)(\partial_j(x)) &= dx^i(T_x\Phi(\partial_j(x))) = dx^i\left(\sum_{l=1}^n \partial_j(\Phi^l)(x) \partial_l(\Phi(x))\right) \\ &= \sum_{l=1}^n \partial_j(\Phi^l)(x) dx^i(\partial_l(\Phi(x))) = \sum_{l=1}^n \partial_j(\Phi^l)(x) \delta_{il} = \partial_j(\Phi^i)(x) \end{aligned}$$

und

$$d\Phi^i(\partial_j(x)) = \left(\sum_{l=1}^n \partial_l(\Phi^i) dx^l\right)(\partial_j(x)) = \sum_{l=1}^n \partial_l(\Phi^i)(x) \delta_{lj} = \partial_j(\Phi^i)(x).$$

□

Satz 5.6 Für jede glatte Abbildung $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und jede Form $\eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, E)$ gilt

$$d(\Phi^*\eta) = \Phi^*d\eta.$$

Beweis. Wir können uns auf den Fall einschränken, dass

$$\eta = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

für ein $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n, E)$. Mit Hilfe von Lemma 5.5 und Satz 1.19 sehen wir dann, dass

$$\begin{aligned} d(\Phi^* \eta) &= d((f \circ \Phi) d\Phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi^{i_k}) \\ &= d(f \circ \Phi) \wedge d\Phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi^{i_k} \\ &= \sum_{j=1}^n \partial_j (f \circ \Phi) dx^j \wedge d\Phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi^{i_k} \\ &= \sum_{j,l=1}^n (\partial_l (f) \circ \Phi) \partial_j (\Phi^l) dx^j \wedge d\Phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi^{i_k} \\ &= \sum_{l=1}^n (\partial_l (f) \circ \Phi) d\Phi^l \wedge d\Phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi^{i_k} \\ &= \Phi^* \left(\sum_{l=1}^n \partial_l (f) dx^l \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \right) \\ &= \Phi^* d\eta . \end{aligned}$$

□

Satz 5.7 Sei $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\Phi^i(x^1, \dots, x^n) = \lambda \sum_{j=1}^n q_{ij} x^j + \mathfrak{b}^i$$

für $i = 1, \dots, n$ gegeben, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > 0$, $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}^1, \dots, \mathfrak{b}^n) \in \mathbb{R}^n$ und $q = (q_{ij}) \in \text{SO}(n)$. Dann gilt

$$*(\Phi^* \eta) = \lambda^{2k-n} \Phi^* (*\eta)$$

für $\eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, E)$.

Bevor wir diesen Satz beweisen, ziehen wir eine Folgerung.

Folgerung 5.8 Sei A ein G -Zusammenhang über \mathbb{R}^n . Ist A ein Yang-Mills-Zusammenhang und ist $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie in Satz 5.7 (d.h., Φ ist eine konforme Transformation des \mathbb{R}^n), so ist auch $\Phi^* A$ ein Yang-Mills-Zusammenhang.

Beweis. Mit Hilfe von Satz 5.6 und Lemma 5.4 sehen wir, dass

$$F^{\Phi^* A} = d(\Phi^* A) + \frac{1}{2} [\Phi^* A, \Phi^* A] = \Phi^* dA + \frac{1}{2} \Phi^* [A, A] = \Phi^* F^A$$

und

$$d^{\Phi^* A}(\Phi^* \eta) = d(\Phi^* \eta) + [\Phi^* A, \Phi^* \eta] = \Phi^* d\eta + \Phi^* [A, \eta] = \Phi^* (d^A \eta)$$

für $\eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$. Nutzen wir außerdem noch Satz 5.7, so erhalten wir

$$\begin{aligned} d^{\Phi^* A} * F^{\Phi^* A} &= d^{\Phi^* A} * (\Phi^* F^A) \\ &= d^{\Phi^* A} (\lambda^{4-n} \Phi^* (*F^A)) \\ &= \lambda^{4-n} d^{\Phi^* A} (\Phi^* (*F^A)) \\ &= \lambda^{4-n} \Phi^* (d^A * F^A) . \end{aligned}$$

Gilt also $d^A * F^A = 0$, so gilt auch $d^{\Phi^* A} * F^{\Phi^* A} = 0$. □

Wir kommen jetzt zum Beweis von Satz 5.7. Dazu werden wir zunächst den Hodge-Operator $*$: $\Omega^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^{n-k}(\mathbb{R}^n)$ genauer betrachten.

Definition 5.9 Wir versehen $T_x\mathbb{R}^n$ mit dem durch

$$\langle (x, \mathbf{a}), (x, \mathbf{b}) \rangle := \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^i \mathbf{b}^i$$

gegebenen Skalarprodukt und definieren $\langle \omega^1, \omega^2 \rangle \in \Omega^0(\mathcal{O})$ für $\omega^1, \omega^2 \in \Omega^k(\mathcal{O})$ durch

$$\begin{aligned} \langle \omega^1, \omega^2 \rangle (x) &:= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega^1(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \omega^2(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \omega^1(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \omega^2(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}), \end{aligned}$$

wobei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von $T_x\mathbb{R}^n$ ist.

Bemerkung 5.10 (i) Man überprüft leicht, dass

$$\langle \nu^1 \wedge \dots \wedge \nu^k, \hat{\nu}^1 \wedge \dots \wedge \hat{\nu}^k \rangle = \begin{vmatrix} \langle \nu^1, \hat{\nu}^1 \rangle & \dots & \langle \nu^1, \hat{\nu}^k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \nu^k, \hat{\nu}^1 \rangle & \dots & \langle \nu^k, \hat{\nu}^k \rangle \end{vmatrix}$$

für $\nu^1, \dots, \nu^k, \hat{\nu}^1, \dots, \hat{\nu}^k \in \Omega^1(\mathcal{O})$.

(ii) Der Ausdruck $\langle \omega^1, \omega^2 \rangle (x)$ hängt nicht von der Wahl der Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von $T_x\mathbb{R}^n$ ab. Sei nämlich $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ eine andere Orthonormalbasis von $T_x\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

mit reellen Zahlen a_{ji} , für die

$$\sum_{l=1}^n a_{il} a_{jl} = \delta_{ij}.$$

Für $\nu^1, \nu^2 \in \Omega^1(\mathcal{O})$ gilt folglich

$$\sum_{l=1}^n \nu^1(\tilde{e}_l) \nu^2(\tilde{e}_l) = \sum_{i,j,l=1}^n a_{il} a_{jl} \nu^1(e_i) \nu^2(e_j) = \sum_{i=1}^n \nu^1(e_i) \nu^2(e_i),$$

was zusammen mit (i) die gewünschte Aussage liefert. □

Offensichtlich gilt

$$\langle dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \rangle = \delta_{i_1 j_1} \dots \delta_{i_k j_k} \quad (5.1)$$

für $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ und $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$. Dies benutzen wir, um folgende Aussage zu beweisen.

Lemma 5.11 Sei $\omega^1 \in \Omega^k(\mathcal{O})$ und $\omega^2 \in \Omega^{n-k}(\mathcal{O})$. Dann gilt $\omega^2 = *\omega^1$ genau dann, wenn

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = \langle \omega^1, \omega^2 \rangle dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (5.2)$$

für alle $\omega^2 \in \Omega^{n-k}(\mathcal{O})$.

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass

$$\omega^1 = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

mit $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, und schreiben

$$\omega^2 = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-k} \leq n} \omega_{j_1 \dots j_{n-k}}^2 dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-k}} .$$

Aus (5.1) und (5.2) mit $\omega^3 = dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-k}}$ für $1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-k} \leq n$ erhalten wir, dass $\omega_{j_1 \dots j_{n-k}}^2 = \varepsilon_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{n-k}}$, falls $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\}$, und dass alle anderen Koeffizienten von ω^2 identisch verschwinden. Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Lemma 5.12 *Seien $\nu^1, \dots, \nu^n \in \Omega^1(\mathcal{O})$ derart, dass*

$$\langle \nu^i, \nu^j \rangle = \delta_{ij} \tag{5.3}$$

für $1 \leq i, j \leq n$ und

$$\nu^1 \wedge \cdots \wedge \nu^n = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n . \tag{5.4}$$

Dann gilt:

(i) Für $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ und $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ ist

$$\langle \nu^{i_1} \wedge \cdots \wedge \nu^{i_k}, \nu^{j_1} \wedge \cdots \wedge \nu^{j_k} \rangle = \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_k j_k} .$$

(ii) Es ist

$$* (\nu^{i_1} \wedge \cdots \wedge \nu^{i_k}) = \varepsilon_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{n-k}} \nu^{j_1} \wedge \cdots \wedge \nu^{j_{n-k}} ,$$

wobei $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\}$.

Beweis. Aussage (i) folgt aus Bemerkung 5.10(i). Aussage (ii) ist eine Konsequenz aus (i) und Lemma 5.11. \square

Beweis von Satz 5.7. Nach Definition des Hodge-Operators können wir o.B.d.A. annehmen, dass $E = \mathbb{R}$ und

$$\eta = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

mit $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Wir setzen $\nu^i := (1/\lambda)d\Phi^i$ für $i = 1, \dots, n$. Da

$$d\Phi^i = \lambda \sum_{j=1}^n q_{ij} dx^j ,$$

ist

$$\nu^i = \sum_{j=1}^n q_{ij} dx^j .$$

Da außerdem $q = (q_{ij}) \in \text{SO}(n)$, gilt

$$\langle \nu^i, \nu^j \rangle = \left\langle \sum_{l=1}^n q_{il} dx^l, \sum_{m=1}^n q_{jm} dx^m \right\rangle = \sum_{l=1}^n q_{il} q_{jl} = \delta_{ij}$$

und

$$\nu^1 \wedge \cdots \wedge \nu^n = \det(q) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n .$$

Also erfüllen $\nu^1, \dots, \nu^n \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ die Voraussetzungen von Lemma 5.12. Folglich haben wir

$$\begin{aligned}
(\Phi^\eta) &= *(d\Phi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi^{i_k}) \\
&= \lambda^k *(\nu^{i_1} \wedge \dots \wedge \nu^{i_k}) \\
&= \lambda^k \varepsilon_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{n-k}} \nu^{j_1} \wedge \dots \wedge \nu^{j_{n-k}} \\
&= \lambda^k \lambda^{k-n} \varepsilon_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{n-k}} d\Phi^{j_1} \wedge \dots \wedge d\Phi^{j_{n-k}} \\
&= \lambda^{2k-n} \Phi^* (\varepsilon_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{n-k}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-k}}) \\
&= \lambda^{2k-n} \Phi^* (*\eta) ,
\end{aligned}$$

wobei $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\}$. □

6 Das Yang-Mills-Funktional

In diesem Abschnitt wollen wir die Yang-Mills-Gleichung aus einem Variationsprinzip ableiten. Dazu betrachten wir zunächst eine etwas allgemeinere Situation.

Sei E ein reeller Vektorraum und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf E . Die folgende Definition verallgemeinert Definition 5.9.

Definition 6.1 Seien $\eta^1, \eta^2 \in \Omega^k(\mathcal{O}, E)$. Wir definieren $\langle \eta^1, \eta^2 \rangle \in \Omega^0(\mathcal{O})$ durch

$$\langle \eta^1, \eta^2 \rangle (x) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \langle \eta^1(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}), \eta^2(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \rangle$$

für eine Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von $T_x \mathbb{R}^n$.

Bemerkung 6.2 Seien $\eta^1, \eta^2 \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, E)$ und sei $\{v_1, \dots, v_N\}$ eine Orthonormalbasis von E . Sind $\eta^{ij} \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ für $i = 1, 2$ und $j = 1, \dots, N$ durch

$$\eta^i = \sum_{j=1}^N v_j \eta^{ij}$$

bestimmt, so ist

$$\langle \eta^1, \eta^2 \rangle = \sum_{j=1}^N \langle \eta^{j1}, \eta^{j2} \rangle .$$

□

Sei $d^* : \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n, E) \rightarrow \Omega^k(\mathbb{R}^n, E)$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$ der durch

$$d^* \eta = (-1)^{kn+1} *d*\eta$$

definierte Operator. Der nächste Satz besagt, dass $d^* : \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n, E) \rightarrow \Omega^k(\mathbb{R}^n, E)$ der formal adjungierte Operator zu $d : \Omega^k(\mathbb{R}^n, E) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n, E)$ ist. Zur Formulierung dieses Resultats benötigen wir noch

Definition 6.3 Der **Träger** $\text{supp}(\eta)$ einer Form $\eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, E)$ ist der Abschluss der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : \eta_x \neq 0\}$. Den Raum der Formen $\eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, E)$, für die $\text{supp}(\eta)$ beschränkt ist, bezeichnen wir mit $\Omega_0^k(\mathbb{R}^n, E)$.

Satz 6.4 Für $\eta^1 \in \Omega_0^k(\mathbb{R}^n, E)$, $\eta^2 \in \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n, E)$ und $k = 0, 1, \dots, n-1$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle d\eta^1, \eta^2 \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \eta^1, d^*\eta^2 \rangle dx . \tag{6.1}$$

Für den Beweis von Satz 6.4 werden wir die folgenden Überlegungen benutzen.

Definition 6.5 Für $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx ,$$

wobei $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

bestimmt ist.

Satz 6.6 Sei $\omega \in \Omega_0^{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0 .$$

Beweis. Wir schreiben ω in der Form

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n .$$

Dann ist

$$d\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \partial_i(f_i) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n .$$

Da $\text{supp}(\omega)$ beschränkt ist, können wir ein $a > 0$ so wählen, dass

$$\text{supp}(\omega) \subset [-a, a]^n .$$

Insbesondere ist dann

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a \partial_i(f_i)(x^1, \dots, x^n) dx^i \\ &= f_i(x^1, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^n) - f_i(x^1, \dots, x^{i-1}, -a, x^{i+1}, \dots, x^n) = 0 . \end{aligned}$$

Da außerdem $\text{supp}(d\omega) \subset \text{supp}(\omega)$, erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} d\omega &= \int_{[-a, a]^n} d\omega \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{[-a, a]^n} \partial_i(f_i)(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{[-a, a]^{n-1}} \int_{-a}^a \partial_i(f_i)(x^1, \dots, x^n) dx^i d(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

□

Lemma 6.7 Für alle $\omega^1, \omega^2 \in \Omega^k(\mathcal{O})$ gilt

- (i) $\langle *\omega^1, *\omega^2 \rangle = \langle \omega^1, \omega^2 \rangle$,
- (ii) $\langle \omega^1, \omega^2 \rangle dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \omega^1 \wedge *\omega^2$,
- (iii) $**\omega^1 = (-1)^{k(n-k)} \omega^1$.

Beweis. (i) Ist

$$\omega^1 = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad \text{und} \quad \omega^2 = dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}$$

mit $i_1 < \cdots < i_k$ und $j_1 < \cdots < j_k$, so ist die Gleichung offenbar richtig. Damit gilt die Gleichung auch allgemein.

(ii) Nach Lemma 5.11 gilt

$$\langle *\omega^1, \omega^3 \rangle dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \omega^1 \wedge \omega^3$$

für alle $\omega^3 \in \Omega^{n-k}(\mathbb{R}^n)$. Hieraus und aus (i) folgt

$$\begin{aligned} \langle \omega^1, \omega^2 \rangle dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n &= \langle *\omega^1, *\omega^2 \rangle dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \omega^1 \wedge *\omega^2. \end{aligned}$$

(iii) Mittels (ii) und Lemma 5.11 schließen wir

$$\begin{aligned} \langle \omega^1, \omega^2 \rangle dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n &= \langle \omega^2, \omega^1 \rangle dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \omega^2 \wedge *\omega^1 \\ &= (-1)^{k(n-k)} *\omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= (-1)^{k(n-k)} \langle **\omega^1, \omega^2 \rangle dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Somit haben wir

$$\langle **\omega^1, \omega^2 \rangle = (-1)^{k(n-k)} \langle \omega^1, \omega^2 \rangle$$

für alle $\omega^1, \omega^2 \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, woraus sich die Behauptung ergibt. \square

Beweis von Satz 6.4. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $E = \mathbb{R}$ (vgl. Bemerkung 6.2). Sei also $\eta^1 \in \Omega_0^k(\mathbb{R}^n)$ und $\eta^2 \in \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$. Da $\eta^1 \wedge *\eta^2 \in \Omega_0^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, implizieren Satz 6.6 und Satz 1.19(ii), dass

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} d(\eta^1 \wedge *\eta^2) = \int_{\mathbb{R}^n} d\eta^1 \wedge *\eta^2 + (-1)^k \int_{\mathbb{R}^n} \eta^1 \wedge d*\eta^2,$$

d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\eta^1 \wedge *\eta^2 = (-1)^{k+1} \int_{\mathbb{R}^n} \eta^1 \wedge d*\eta^2.$$

Daraus und aus Lemma 6.7 leiten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \langle d\eta^1, \eta^2 \rangle dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle d\eta^1, \eta^2 \rangle dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d\eta^1 \wedge *\eta^2 \\ &= (-1)^{k+1} \int_{\mathbb{R}^n} \eta^1 \wedge d*\eta^2 \\ &= (-1)^{k+1} (-1)^{k(n-k)} \int_{\mathbb{R}^n} \eta^1 \wedge **d*\eta^2 \\ &= (-1)^{kn+1} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \eta^1, *d*\eta^2 \rangle dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \eta^1, d*\eta^2 \rangle dx \end{aligned}$$

ab. \square

Bemerkung 6.8 Aus dem Beweis von Satz 6.4 folgt, dass die Beziehung (6.1) auch für $\eta^1 \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, E)$ und $\eta^2 \in \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n, E)$ gilt. \square

Wie bisher sei G die Lie-Gruppe $U(m)$, $SU(m)$ oder $SO(m)$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Die Lie-Algebra \mathfrak{g} von G verstehen wir jetzt mit dem durch

$$\langle X_1, X_2 \rangle := \operatorname{Re} \left(\operatorname{tr} \left(X_1 \bar{X}_2^T \right) \right) = -\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(X_1 X_2))$$

für $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ gegebenen Skalarprodukt.

Lemma 6.9 Für $g \in G$ und $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\langle gX_1g^{-1}, gX_2g^{-1} \rangle = \langle X_1, X_2 \rangle \quad \text{und} \quad \langle [X_1, X_2], X_3 \rangle + \langle X_2, [X_1, X_3] \rangle = 0.$$

Beweis. Da

$$\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$$

für $X, Y \in M_m(\mathbb{C})$, ist

$$\operatorname{tr} \left(gX_1g^{-1}gX_2g^{-1} \right) = \operatorname{tr} \left(gX_1X_2g^{-1} \right) = \operatorname{tr}(X_1X_2)$$

und

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr}([X_1, X_2]X_3) + \operatorname{tr}(X_2[X_1, X_3]) \\ &= \operatorname{tr}(X_1X_2X_3 - X_2X_1X_3) + \operatorname{tr}(X_2X_1X_3 - X_2X_3X_1) \\ &= \operatorname{tr}(X_1X_2X_3) - \operatorname{tr}(X_2X_1X_3) + \operatorname{tr}(X_2X_1X_3) - \operatorname{tr}(X_2X_3X_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das impliziert die Behauptung. \square

Lemma 6.10 Sei A ein G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^n . Für alle $\eta^1 \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ und $\eta^2 \in \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ gilt dann

$$\langle [A, \eta^1], \eta^2 \rangle = (-1)^{kn+1} \langle \eta^1, * [A, *\eta^2] \rangle.$$

Beweis. Wir beweisen das Lemma nur für $k=1$. Dabei können wir auf Grund von Lemma 5.12 o.B.d.A. annehmen, dass $\eta^1 = f_1 dx^1$ und dass entweder $\eta^2 = f_2 dx^1 \wedge dx^2$ oder $\eta^2 = f_2 dx^2 \wedge dx^3$, wobei $f_1, f_2 \in \Omega^0(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$. Im ersten Fall ist

$$\begin{aligned} * [A, *\eta^2] &= * \left[\sum_{i=1}^n A_i dx^i, f_2 dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^n \right] \\ &= * ([A_1, f_2] dx^1 \wedge dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^n + [A_2, f_2] dx^2 \wedge dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^n) \\ &= (-1)^{n+1} ([A_2, f_2] dx^1 - [A_1, f_2] dx^2) \end{aligned}$$

und somit

$$\langle \eta^1, * [A, *\eta^2] \rangle = (-1)^{n+1} \langle f_1, [A_2, f_2] \rangle.$$

Andererseits sehen wir mit Hilfe von Lemma 6.9, dass

$$\langle [A, \eta^1], \eta^2 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n [A_i, f_1] dx^i \wedge dx^1, f_2 dx^1 \wedge dx^2 \right\rangle = -\langle [A_2, f_1], f_2 \rangle = \langle f_1, [A_2, f_2] \rangle.$$

Im zweiten Fall haben wir

$$\begin{aligned} * [A, *\eta^2] &= -* ([A_2, f_2] dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4 \wedge \cdots \wedge dx^n + [A_3, f_2] dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \wedge \cdots \wedge dx^n) \\ &= (-1)^{n+1} ([A_3, f_2] dx^2 - [A_2, f_2] dx^3). \end{aligned}$$

Demnach ist $\langle \eta^1, * [A, *\eta^2] \rangle = 0$. Da offensichtlich auch $\langle [A, \eta^1], \eta^2 \rangle = 0$, folgt die Behauptung. \square

Für einen G -Zusammenhang A auf \mathbb{R}^n und $k = 0, 1, \dots, n-1$ sei $(d^A)^* : \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^k(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ durch

$$(d^A)^* \eta = (-1)^{kn+1} * d^A * \eta.$$

definiert. Aus Satz 6.4 und Lemma 6.10 erhalten wir

Folgerung 6.11 Sei A ein G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^n . Für $\eta^1 \in \Omega_0^k(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$, $\eta^2 \in \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ und $k = 0, 1, \dots, n-1$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle d^A \eta^1, \eta^2 \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \eta^1, (d^A)^* \eta^2 \rangle dx .$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \langle d^A \eta^1, \eta^2 \rangle dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle d\eta^1, \eta^2 \rangle dx + \int_{\mathbb{R}^n} \langle [A, \eta^1], \eta^2 \rangle dx \\ &= (-1)^{kn+1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle \eta^1, *d*\eta^2 \rangle dx + \int_{\mathbb{R}^n} \langle \eta^1, *[A, *\eta^2] \rangle dx \right) \\ &= (-1)^{kn+1} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \eta^1, *d^A*\eta^2 \rangle dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \eta^1, (d^A)^* \eta^2 \rangle dx . \end{aligned}$$

□

Lemma 6.12 Sei A ein G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^n und sei $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$. Dann ist

$$F^{A+\eta} = F^A + d^A \eta + \frac{1}{2}[\eta, \eta] .$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} F^{A+\eta} &= d(A + \eta) + \frac{1}{2}[A + \eta, A + \eta] \\ &= dA + \frac{1}{2}[A, A] + d\eta + [A, \eta] + \frac{1}{2}[\eta, \eta] \\ &= F^A + d^A \eta + \frac{1}{2}[\eta, \eta] . \end{aligned}$$

□

Definition 6.13 Für einen G -Zusammenhang A auf \mathbb{R}^n sei

$$L(A) := \int_{\mathbb{R}^n} \langle F^A, F^A \rangle dx .$$

Außerdem sei \mathcal{D} die Menge aller G -Zusammenhänge A auf \mathbb{R}^n mit $L(A) < \infty$. Die so beschriebene Abbildung $L : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Yang-Mills-Funktional**.

Satz 6.14 Das Yang-Mills-Funktional ist invariant unter der Wirkung der Gruppe der Eichtransformationen. Das heißt, für alle $A \in \mathcal{D}$ und alle $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n, G)$ gilt

$$L(A \cdot \sigma) = L(A) .$$

Beweis. Nach Satz 4.5(i) und Lemma 6.9 ist

$$\begin{aligned} \langle F^{A \cdot \sigma}, F^{A \cdot \sigma} \rangle &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle F_{ij}^{A \cdot \sigma}, F_{ij}^{A \cdot \sigma} \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle \sigma^{-1} F_{ij}^A \sigma, \sigma^{-1} F_{ij}^A \sigma \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle F_{ij}^A, F_{ij}^A \rangle \\ &= \langle F^A, F^A \rangle , \end{aligned}$$

woraus $L(A \cdot \sigma) = L(A)$ unmittelbar folgt.

□

Definition 6.15 Ein G -Zusammenhang $A \in \mathcal{D}$ heißt **kritischer Punkt** des Yang-Mills-Funktionals $L : \iff$ Für alle $\eta \in \Omega_0^1(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ gilt

$$\left. \frac{d}{dt} L(A + t\eta) \right|_{t=0} = 0 .$$

Satz 6.16 Ein G -Zusammenhang $A \in \mathcal{D}$ ist genau dann ein kritischer Punkt des Yang-Mills-Funktionals L , wenn er ein Yang-Mills-Zusammenhang ist.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{D}$ und $\eta \in \Omega_0^1(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$. Nach Lemma 6.12 ist

$$\begin{aligned} \langle F^{A+t\eta}, F^{A+t\eta} \rangle &= \langle F^A, F^A \rangle + 2t \langle d^A \eta, F^A \rangle + t^2 \langle [\eta, \eta], F^A \rangle \\ &\quad + t^2 \langle d^A \eta, d^A \eta \rangle + t^3 \langle [\eta, \eta], d^A \eta \rangle + \frac{t^4}{2} \langle [\eta, \eta], [\eta, \eta] \rangle . \end{aligned}$$

Hieraus und aus Folgerung 6.11 leiten wir

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} L(A + t\eta) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \langle F^{A+t\eta}, F^{A+t\eta} \rangle dx \right|_{t=0} \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} \langle d^A \eta, F^A \rangle dx \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} \langle \eta, (d^A)^* F^A \rangle dx \end{aligned}$$

ab. Folglich ist A genau dann ein kritischer Punkt von L , wenn

$$(d^A)^* F^A = 0 .$$

Da die letzte Gleichung zur Yang-Mills-Gleichung $d^A * F^A = 0$ äquivalent ist, folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 6.17 Die Sätze 6.14 und 6.16 liefern einen Beweis von Folgerung 4.6 für den Fall, dass $A \in \mathcal{D}$. \square

7 Selbstduale Zusammenhänge

In diesem Abschnitt wollen wir eine spezielle Klasse von Yang-Mills-Zusammenhängen auf \mathbb{R}^4 betrachten.

Definition 7.1 Ein G -Zusammenhang A auf \mathbb{R}^4 heißt **selbstdual** bzw. **antiselbstdual** : \iff Es gilt

$$*F^A = F^A \quad \text{bzw.} \quad *F^A = -F^A .$$

Selbstduale bzw. antiselbstduale Zusammenhänge werden auch **Instantonen** bzw. **Anti-Instantonen** genannt.

Lemma 7.2 Sei A ein G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^4 . Ist A selbstdual oder antiselbstdual, so ist A ein Yang-Mills-Zusammenhang.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Bianchi-Identität $d^A F^A = 0$ (siehe Satz 3.7(i)). \square

Im Folgenden sollen Beispiele (anti)selbstdualer $SU(2)$ -Zusammenhänge A mit $L(A) < \infty$ angegeben werden. Dafür hat es sich als geeignet erwiesen, mit so genannten Quaternionen zu arbeiten.

Definition 7.3 Sei \mathbb{H} die Algebra über \mathbb{R} mit der Basis $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ und den Relationen

$$(R1) \quad \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_i \text{ für } i = 0, 1, 2, 3,$$

$$(R2) \quad \mathbf{a}_1^2 = \mathbf{a}_2^2 = \mathbf{a}_3^2 = -\mathbf{a}_0 \text{ und}$$

$$(R3) \quad \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 \text{ und } \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2.$$

Die Elemente von \mathbb{H} werden **Quaternionen** genannt. Die **Konjugation** in \mathbb{H} ist die \mathbb{R} -lineare Abbildung $q \in \mathbb{H} \mapsto \bar{q} \in \mathbb{H}$, die durch

$$\bar{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{a}_0 \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{a}}_i = -\mathbf{a}_i \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

bestimmt ist.

Jedes $q \in \mathbb{H}$ kann in eindeutiger Weise in der Form

$$q = q^0 \mathbf{a}_0 + q^1 \mathbf{a}_1 + q^2 \mathbf{a}_2 + q^3 \mathbf{a}_3$$

mit reellen Zahlen q^0, q^1, q^2, q^3 geschrieben werden. Es ist dann

$$\bar{q} = q^0 \mathbf{a}_0 - q^1 \mathbf{a}_1 - q^2 \mathbf{a}_2 - q^3 \mathbf{a}_3.$$

Für zwei Quaternionen

$$p = \sum_{i=0}^3 p^i \mathbf{a}_i \quad \text{und} \quad q = \sum_{i=0}^3 q^i \mathbf{a}_i$$

und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} p + q &= \sum_{i=0}^3 (p^i + q^i) \mathbf{a}_i, \\ \lambda q &= \sum_{i=0}^3 (\lambda q^i) \mathbf{a}_i, \\ pq &= (p^0 q^0 - p^1 q^1 - p^2 q^2 - p^3 q^3) \mathbf{a}_0 + (p^0 q^1 + p^1 q^0 + p^2 q^3 - p^3 q^2) \mathbf{a}_1 \\ &\quad + (p^0 q^2 + p^2 q^0 + p^3 q^1 - p^1 q^3) \mathbf{a}_2 + (p^0 q^3 + p^3 q^0 + p^1 q^2 - p^2 q^1) \mathbf{a}_3. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Definition 7.4 Für $q = q^0 \mathbf{a}_0 + q^1 \mathbf{a}_1 + q^2 \mathbf{a}_2 + q^3 \mathbf{a}_3 \in \mathbb{H}$ sei

$$|q| := \sqrt{\sum_{i=0}^3 (q^i)^2}.$$

Lemma 7.5 Für $q, q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ gilt:

$$(i) \quad q \bar{q} = \bar{q} q = |q|^2 \mathbf{a}_0,$$

$$(ii) \quad \overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1,$$

$$(iii) \quad |q_1 q_2| = |q_1| |q_2|.$$

Beweis. Die Eigenschaft (i) schlussfolgert man aus (7.1). Die Beziehung (ii) ist eine unmittelbare Konsequenz der Relationen (R1), (R2) und (R3). Aus (i) und (ii) folgt

$$|q_1 q_2|^2 \mathbf{a}_0 = q_1 q_2 \overline{q_1 q_2} = q_1 q_2 \bar{q}_2 \bar{q}_1 = |q_1|^2 |q_2|^2 \mathbf{a}_0.$$

Dies impliziert (iii). □

Satz 7.6 \mathbb{H} ist ein Schiefkörper. Das heißt, \mathbb{H} besitzt bis auf die Kommutativität der Multiplikation alle Eigenschaften eines Körpers. Das Einselement von \mathbb{H} ist \mathbf{a}_0 . Das inverse Element zu $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ ist

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2} \bar{q}. \quad (7.2)$$

Beweis. Dass \mathbf{a}_0 das Einselement von \mathbb{H} ist, folgt aus den Relationen (R1). Die Beziehung (7.2) erhält man aus Lemma 7.5(i). Die Assoziativität der Multiplikation in \mathbb{H} rechnet man direkt nach. Alle anderen Eigenschaften eines Schiefkörpers sind trivialerweise erfüllt. \square

Bemerkung 7.7 Setzt man voraus, dass die Multiplikation in \mathbb{H} assoziativ ist, so können die Relationen (R3) in Definition 7.3 durch die einzige Relation

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \quad (7.3)$$

ersetzt werden. Aus (7.3) und den Relationen (R1) und (R2) erhält man dann nämlich

$$\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1^2 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2) \mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3^2 = \mathbf{a}_1 \quad (7.4)$$

und

$$\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2^2 = -\mathbf{a}_3 (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2) \mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_3^2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2. \quad (7.5)$$

Aus (7.3) und (7.5) sowie (R1) und (R2) kann man

$$\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_1^2 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_1 (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2) \mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$$

folgern. Analog leitet man $\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$ und $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1$ ab. \square

Definition 7.8 Für $q = q^0 \mathbf{a}_0 + q^1 \mathbf{a}_1 + q^2 \mathbf{a}_2 + q^3 \mathbf{a}_3 \in \mathbb{H}$ setzen wir

$$\operatorname{Re}(q) := q^0 \mathbf{a}_0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(q) := q^1 \mathbf{a}_1 + q^2 \mathbf{a}_2 + q^3 \mathbf{a}_3.$$

Offensichtlich ist

$$\operatorname{Re}(q) = \frac{1}{2}(q + \bar{q}), \quad \operatorname{Im}(q) = \frac{1}{2}(q - \bar{q}) \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}(q) + \operatorname{Im}(q) = q.$$

Lemma 7.9 Für alle $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ gilt

$$\operatorname{Im}(q_1 q_2 - q_2 q_1) = q_1 q_2 - q_2 q_1 = 2 \operatorname{Im}(\operatorname{Im}(q_1) \operatorname{Im}(q_2)).$$

Beweis. Es genügt, die zweite Gleichung zu zeigen. Seien $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$. Da

$$\mathbf{a}_0 q = q \mathbf{a}_0$$

und folglich

$$\operatorname{Re}(q_1) q = q \operatorname{Re}(q_1) \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}(q_2) q = q \operatorname{Re}(q_2)$$

für alle $q \in \mathbb{H}$, ist

$$\begin{aligned} q_1 q_2 - q_2 q_1 &= (\operatorname{Re}(q_1) + \operatorname{Im}(q_1))(\operatorname{Re}(q_2) + \operatorname{Im}(q_2)) - (\operatorname{Re}(q_2) + \operatorname{Im}(q_2))(\operatorname{Re}(q_1) + \operatorname{Im}(q_1)) \\ &= \operatorname{Re}(q_1) \operatorname{Re}(q_2) + \operatorname{Re}(q_1) \operatorname{Im}(q_2) + \operatorname{Im}(q_1) \operatorname{Re}(q_2) + \operatorname{Im}(q_1) \operatorname{Im}(q_2) \\ &\quad - \operatorname{Re}(q_2) \operatorname{Re}(q_1) - \operatorname{Re}(q_2) \operatorname{Im}(q_1) - \operatorname{Im}(q_2) \operatorname{Re}(q_1) - \operatorname{Im}(q_2) \operatorname{Im}(q_1) \\ &= \operatorname{Im}(q_1) \operatorname{Im}(q_2) - \operatorname{Im}(q_2) \operatorname{Im}(q_1). \end{aligned}$$

Da

$$\operatorname{Im}(q_1) = -\overline{\operatorname{Im}(q_1)} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(q_2) = -\overline{\operatorname{Im}(q_2)},$$

folgt

$$\begin{aligned}
q_1 q_2 - q_2 q_1 &= \operatorname{Im}(q_1) \operatorname{Im}(q_2) - \operatorname{Im}(q_2) \operatorname{Im}(q_1) \\
&= \operatorname{Im}(q_1) \operatorname{Im}(q_2) - \overline{\operatorname{Im}(q_1)} \overline{\operatorname{Im}(q_2)} \\
&= \operatorname{Im}(q_1) \operatorname{Im}(q_2) - \operatorname{Im}(q_1) \operatorname{Im}(q_2) \\
&= 2 \operatorname{Im}(\operatorname{Im}(q_1) \operatorname{Im}(q_2)) .
\end{aligned}$$

□

Sei

$$\mathfrak{sp}(1) := \{q \in \mathbb{H} : \operatorname{Re}(q) = 0\} .$$

Offensichtlich ist $\mathfrak{sp}(1)$ ein dreidimensionaler reeller Vektorraum und $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ ist eine Basis von $\mathfrak{sp}(1)$. Außerdem haben wir

Satz 7.10 *Der reelle Vektorraum $\mathfrak{sp}(1)$ ist zusammen mit der durch*

$$[q_1, q_2] := q_1 q_2 - q_2 q_1 \tag{7.6}$$

definierten Operation $[\cdot, \cdot]$ eine Lie-Algebra.

Beweis. Nach Lemma 7.9 ist

$$q_1 q_2 - q_2 q_1 \in \mathfrak{sp}(1)$$

für $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, also insbesondere für $q_1, q_2 \in \mathfrak{sp}(1)$. Folglich definiert (7.6) tatsächlich eine Operation $[\cdot, \cdot]$ auf $\mathfrak{sp}(1)$. Dass diese Operation bilinear und antikommutativ ist, ist offensichtlich. Die Jacobi-Identität rechnet man wie im Beweis von Lemma 2.2 nach. □

Bemerkung 7.11 Aus Lemma 7.9 folgt, dass

$$[q_1, q_2] = 2 \operatorname{Im}(q_1 q_2)$$

für $q_1, q_2 \in \mathfrak{sp}(1)$. □

Auf $\mathfrak{sp}(1)$ fixieren wir das durch

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle := 2\delta_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3 \tag{7.7}$$

bestimmte Skalarprodukt.

Satz 7.12 *Sei $\{X_1, X_2, X_3\}$ die durch*

$$X_1 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad X_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis von $\mathfrak{su}(2)$ und $\kappa : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{sp}(1)$ der durch

$$\kappa(X_i) := \mathbf{a}_i \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

definierte lineare Isomorphismus. Für alle $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$ gilt dann:

- (i) $[\kappa(X), \kappa(Y)] = \kappa([X, Y])$,
- (ii) $\langle \kappa(X), \kappa(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$.

Beweis. Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$[X_1, X_2] = 2X_3, \quad [X_2, X_3] = 2X_1, \quad [X_3, X_1] = 2X_2 \quad (7.8)$$

sowie

$$\langle X_i, X_j \rangle = 2\delta_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3. \quad (7.9)$$

Andererseits implizieren die Relationen (R3), dass

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = 2\mathbf{a}_3, \quad [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = 2\mathbf{a}_1, \quad [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1] = 2\mathbf{a}_2. \quad (7.10)$$

Aus (7.8) und (7.10) folgt (i) und aus (7.7) und (7.9) folgt (ii). \square

Im Weiteren identifizieren wir $\mathfrak{su}(2)$ mit $\mathfrak{sp}(1)$ längs κ und \mathbb{R}^4 mit \mathbb{H} längs

$$(q^0, q^1, q^2, q^3) \in \mathbb{R}^4 \mapsto q = \sum_{i=0}^3 q^i \mathbf{a}_i \in \mathbb{H}.$$

Die Formen $dq, d\bar{q} \in \Omega^1(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ haben dann die Gestalt

$$\begin{aligned} dq &= \mathbf{a}_0 dq^0 + \mathbf{a}_1 dq^1 + \mathbf{a}_2 dq^2 + \mathbf{a}_3 dq^3, \\ d\bar{q} &= \mathbf{a}_0 dq^0 - \mathbf{a}_1 dq^1 - \mathbf{a}_2 dq^2 - \mathbf{a}_3 dq^3. \end{aligned}$$

Definition 7.13 (i) Für $\eta^1 \in \Omega^k(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ und $\eta^2 \in \Omega^l(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ sei $\eta^1 \wedge \eta^2 \in \Omega^{k+l}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ unter Benutzung der Multiplikation in \mathbb{H} wie in Definition 1.11 definiert.

(ii) Ist $\eta \in \Omega^k(\mathbb{H}, \mathbb{H})$, so sei $\text{Im}(\eta) \in \Omega^k(\mathbb{H}, \mathfrak{sp}(1))$ durch

$$\text{Im}(\eta)(v_1, \dots, v_k) := \text{Im}(\eta(v_1, \dots, v_k))$$

für $v_1, \dots, v_k \in T_q \mathbb{H}$ gegeben.

Satz 7.14 Die 1-Form

$$A^+ := \frac{1}{1 + |q|^2} \text{Im}(qd\bar{q})$$

ist ein selbstdualer $\text{SU}(2)$ -Zusammenhang auf \mathbb{R}^4 mit $L(A^+) < \infty$.

Beweis. Die Form A^+ ist eine glatte $\mathfrak{sp}(1)$ -wertige 1-Form auf \mathbb{H} und somit, gemäß unserer Identifikationen, ein $\text{SU}(2)$ -Zusammenhang auf \mathbb{R}^4 . Wir berechnen die Krümmungsform F^{A^+} von A^+ . Es ist

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{1 + |q|^2} qd\bar{q}\right) &= \frac{1}{1 + |q|^2} dq \wedge d\bar{q} + d\left(\frac{1}{1 + |q|^2}\right) \wedge qd\bar{q} \\ &= \frac{1}{1 + |q|^2} dq \wedge d\bar{q} - \frac{1}{(1 + |q|^2)^2} d(\mathbf{a}_0 + q\bar{q}) \wedge qd\bar{q} \\ &= \frac{1}{1 + |q|^2} dq \wedge d\bar{q} - \frac{|q|^2}{(1 + |q|^2)^2} dq \wedge d\bar{q} - \frac{1}{(1 + |q|^2)^2} qd\bar{q} \wedge qd\bar{q} \\ &= \frac{1}{(1 + |q|^2)^2} dq \wedge d\bar{q} - \frac{1}{(1 + |q|^2)^2} qd\bar{q} \wedge qd\bar{q} \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} dA^+ &= d\left(\text{Im}\left(\frac{1}{1 + |q|^2} qd\bar{q}\right)\right) = \text{Im}\left(d\left(\frac{1}{1 + |q|^2} qd\bar{q}\right)\right) \\ &= \frac{1}{(1 + |q|^2)^2} \text{Im}(dq \wedge d\bar{q}) - \frac{1}{(1 + |q|^2)^2} \text{Im}(qd\bar{q} \wedge qd\bar{q}). \end{aligned}$$

Mit Lemma 7.9 und Bemerkung 7.11 schließen wir für $v_1, v_2 \in T_q\mathbb{H}$, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [A^+, A^+] (v_1, v_2) &= [A^+(v_1), A^+(v_2)] \\ &= 2 \operatorname{Im} (A^+(v_1)A^+(v_2)) \\ &= \frac{1}{(1 + |q|^2)^2} \operatorname{Im}(qd\bar{q}(v_1)qd\bar{q}(v_2) - qd\bar{q}(v_2)qd\bar{q}(v_1)) . \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$(dq \wedge d\bar{q})(v_1, v_2) = dq(v_1)d\bar{q}(v_2) - dq(v_2)d\bar{q}(v_1) = 2 \operatorname{Im}(dq(v_1)d\bar{q}(v_2)) .$$

Also ist

$$\frac{1}{2} [A^+, A^+] = \frac{1}{(1 + |q|^2)^2} \operatorname{Im}(qd\bar{q} \wedge qd\bar{q})$$

und

$$\operatorname{Im}(dq \wedge d\bar{q}) = dq \wedge d\bar{q} .$$

Wir erhalten, dass

$$F^{A^+} = dA^+ + \frac{1}{2} [A^+, A^+] = \frac{1}{(1 + |q|^2)^2} \operatorname{Im}(dq \wedge d\bar{q}) = \frac{1}{(1 + |q|^2)^2} dq \wedge d\bar{q} .$$

Da

$$\begin{aligned} dq \wedge d\bar{q} &= -2\mathbf{a}_1 (dq^0 \wedge dq^1 + dq^2 \wedge dq^3) - 2\mathbf{a}_2 (dq^0 \wedge dq^2 - dq^1 \wedge dq^3) \\ &\quad - 2\mathbf{a}_3 (dq^0 \wedge dq^3 + dq^1 \wedge dq^2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} * (dq^0 \wedge dq^1 + dq^2 \wedge dq^3) &= dq^0 \wedge dq^1 + dq^2 \wedge dq^3 , \\ * (dq^0 \wedge dq^2 - dq^1 \wedge dq^3) &= dq^0 \wedge dq^2 - dq^1 \wedge dq^3 , \\ * (dq^0 \wedge dq^3 + dq^1 \wedge dq^2) &= dq^0 \wedge dq^3 + dq^1 \wedge dq^2 , \end{aligned}$$

folgt

$$*F^{A^+} = F^{A^+} ,$$

d.h. A^+ ist selbstdual.

Weiter sehen wir mit (5.1) und (7.7), dass

$$\begin{aligned} \langle F^{A^+}, F^{A^+} \rangle (q) &= \frac{1}{(1 + |q|^2)^4} \langle dq \wedge d\bar{q}, dq \wedge d\bar{q} \rangle (q) \\ &= \frac{8}{(1 + |q|^2)^4} (\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle + \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 \rangle + \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 \rangle) \\ &= \frac{48}{(1 + |q|^2)^4} . \end{aligned}$$

Dies liefert mittels Transformation in Polarkoordinaten, dass

$$\begin{aligned} L(A^+) &= \int_{\mathbb{R}^4} \langle F^{A^+}, F^{A^+} \rangle dx = 48 \int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{(1 + |x|^2)^4} dx \\ &= 96\pi^2 \int_0^\infty \frac{r^3}{(1 + r^2)^4} dr \\ &= 48\pi^2 \int_0^\infty \frac{s}{(1 + s)^4} ds \\ &= 48\pi^2 \int_0^\infty ((1 + s)^{-3} - (1 + s)^{-4}) ds \\ &= 8\pi^2 . \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Als Analogon zu Satz 7.14 hat man

Satz 7.15 *Die 1-Form*

$$A^- := \frac{1}{1 + |q|^2} \operatorname{Im}(\bar{q} dq)$$

ist ein antiselbstdualer $SU(2)$ -Zusammenhang auf \mathbb{R}^4 mit $L(A^-) < \infty$.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 7.14 berechnet man, dass

$$F^{A^-} = \frac{1}{(1 + |q|^2)^2} d\bar{q} \wedge dq,$$

und folgert daraus, dass

$$*F^{A^+} = -F^{A^+} \quad \text{und} \quad L(A^-) = 8\pi^2.$$

□

Folgerung 7.16 *Sei $\mu > 0$ und $b \in \mathbb{H}$. Dann ist*

$$A_{\mu,b}^+ := \frac{\mu^2}{1 + \mu^2|q - b|^2} \operatorname{Im}((q - b)d\bar{q})$$

ein selbstdualer und

$$A_{\mu,b}^- := \frac{\mu^2}{1 + \mu^2|q - b|^2} \operatorname{Im}((\bar{q} - \bar{b})dq)$$

ein antiselbstdualer $SU(2)$ -Zusammenhang auf \mathbb{R}^4 und es gilt

$$L(A_{\mu,b}^+) = L(A_{\mu,b}^-) = 8\pi^2.$$

Beweis. Sei $\Phi_{\mu,b} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ durch

$$\Phi_{\mu,b}(q) := \mu(q - b)$$

definiert. Dann ist

$$A_{\mu,b}^+ = \Phi_{\mu,b}^* A^+ \quad \text{und} \quad A_{\mu,b}^- = \Phi_{\mu,b}^* A^-.$$

Dies impliziert (vgl. den Beweis von Folgerung 5.8)

$$F^{A_{\mu,b}^+} = \Phi_{\mu,b}^* F^{A^+} = \frac{\mu^2}{(1 + \mu^2|q - b|^2)^2} dq \wedge d\bar{q}$$

und

$$F^{A_{\mu,b}^-} = \Phi_{\mu,b}^* F^{A^-} = \frac{\mu^2}{(1 + \mu^2|q - b|^2)^2} d\bar{q} \wedge dq.$$

Da $*(dq \wedge d\bar{q}) = dq \wedge d\bar{q}$ und $*(d\bar{q} \wedge dq) = -d\bar{q} \wedge dq$, folgt

$$*F^{A_{\mu,b}^+} = F^{A_{\mu,b}^+} \quad \text{und} \quad *F^{A_{\mu,b}^-} = -F^{A_{\mu,b}^-}.$$

Schließlich sieht man mit Hilfe der Substitutionen $y = x - b$ und $s = \mu^2 r^2$ (vgl. auch den Beweis von Satz 7.14), dass

$$\begin{aligned}
L(A_{\mu,b}^+) &= L(A_{\mu,b}^-) = 48 \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\mu^4}{(1 + \mu^2|x - b|^2)^4} dx \\
&= 48 \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\mu^4}{(1 + \mu^2 y^2)^4} dy \\
&= 96\pi^2 \int_0^\infty \frac{\mu^4 r^3}{(1 + \mu^2 r^2)^4} dr \\
&= 48\pi^2 \int_0^\infty \frac{s}{(1 + s)^4} ds \\
&= 8\pi^2 .
\end{aligned}$$

□

Satz 7.17 Seien $\mu_1, \mu_2 > 0$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{H}$. Sind die Zusammenhänge A_{μ_1, b_1}^+ und A_{μ_2, b_2}^+ eichäquivalent, d.h. existiert ein $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^4, \text{SU}(2))$ mit

$$A_{\mu_2, b_2}^+ = A_{\mu_1, b_1}^+ \cdot \sigma ,$$

so ist $\mu_1 = \mu_2$ und $b_1 = b_2$. Das Gleiche gilt für die Zusammenhänge A_{μ_1, b_1}^- und A_{μ_2, b_2}^- .

Beweis. Sind die Zusammenhänge A_{μ_1, b_1}^+ und A_{μ_2, b_2}^+ eichäquivalent, so gilt (vgl. den Beweis von Satz 6.14)

$$\langle F^{A_{\mu_1, b_1}^+}, F^{A_{\mu_1, b_1}^+} \rangle = \langle F^{A_{\mu_2, b_2}^+}, F^{A_{\mu_2, b_2}^+} \rangle$$

und damit

$$\frac{\mu_1}{1 + \mu_1^2|x - b_1|^2} = \frac{\mu_2}{1 + \mu_2^2|x - b_2|^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^4 .$$

Da die erste Funktion nur in $x = b_1$ und die zweite Funktion nur in $x = b_2$ ein globales Maximum hat, folgt $b_1 = b_2$, was dann weiter durch Einsetzen von $x = b_1 = b_2$ auch $\mu_1 = \mu_2$ impliziert.

Genauso verfährt man für A_{μ_1, b_1}^- und A_{μ_2, b_2}^- . □

Bemerkung 7.18 (i) Ist A ein selbstdualer (bzw. antiselbstdualer) G -Zusammenhang, so ist offensichtlich auch jeder Zusammenhang $A \cdot \sigma$, $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^4, G)$, selbstdual (bzw. antiselbstdual). Außerdem ist ein Zusammenhang A , der sowohl selbstdual als auch antiselbstdual ist, **flach**, d.h. die Krümmungsform F^A verschwindet identisch, was wiederum zu $L(A) = 0$ äquivalent ist. Insbesondere sieht man, dass ein Zusammenhang A_{μ_1, b_1}^+ zu keinem Zusammenhang A_{μ_2, b_2}^- eichäquivalent ist.

(ii) Die Zusammenhänge $A_{\mu,b}^+$ und $A_{\mu,b}^-$ wurden erstmals von Belavin, Polyakov, Schwartz und Tyupkin (siehe [3]) angegeben und werden deshalb auch BPST-Instantonen genannt. □

Wir wollen jetzt eine andere Charakterisierung von (anti)selbstdualen Zusammenhängen angeben. Dazu beweisen wir zuerst

Lemma 7.19 Sei A ein G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^4 mit $L(A) < \infty$. Dann ist auch

$$\left| \int_{\mathbb{R}^4} \langle F^A, *F^A \rangle dx \right| < \infty .$$

Beweis. Wir setzen

$$F_+^A := \frac{1}{2}(F^A + *F^A) \quad \text{und} \quad F_-^A := \frac{1}{2}(F^A - *F^A) .$$

Dann ist $F^A = F_+^A + F_-^A$. Außerdem gilt nach Lemma 6.7(iii), dass

$$*F_+^A = F_+^A \quad \text{und} \quad *F_-^A = -F_-^A .$$

Dies liefert mit Lemma 6.7(i), dass

$$\langle F_+^A, F_-^A \rangle = \langle *F_+^A, *F_-^A \rangle = -\langle F_+^A, F_-^A \rangle ,$$

also

$$\langle F_+^A, F_-^A \rangle = 0 .$$

Folglich ist

$$\langle F^A, F^A \rangle = \langle F_+^A + F_-^A, F_+^A + F_-^A \rangle = \langle F_+^A, F_+^A \rangle + \langle F_-^A, F_-^A \rangle \quad (7.11)$$

und

$$\langle F^A, *F^A \rangle = \langle F_+^A + F_-^A, F_+^A - F_-^A \rangle = \langle F_+^A, F_+^A \rangle - \langle F_-^A, F_-^A \rangle . \quad (7.12)$$

Die Beziehung (7.11) und $L(A) < \infty$ implizieren, dass die Funktionen $\langle F_+^A, F_+^A \rangle$ und $\langle F_-^A, F_-^A \rangle$ auf \mathbb{R}^4 integrierbar sind. Wegen (7.12) ist dann auch $\langle F^A, *F^A \rangle$ eine integrierbare Funktion auf \mathbb{R}^4 . Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Lemma 7.19 erlaubt folgende Definition.

Definition 7.20 Die **Instantonenzahl** eines $SU(2)$ -Zusammenhangs A auf \mathbb{R}^4 mit $L(A) < \infty$ ist

$$k(A) := \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \langle F^A, *F^A \rangle dx .$$

Beispiel 7.21 Da $A_{\mu,b}^+$ selbstdual und $A_{\mu,b}^-$ antiselbstdual ist, gilt

$$k(A_{\mu,b}^+) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \langle F_{\mu,b}^{A^+}, *F_{\mu,b}^{A^+} \rangle dx = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \langle F_{\mu,b}^{A^+}, F_{\mu,b}^{A^+} \rangle dx = \frac{1}{8\pi^2} L(A_{\mu,b}^+)$$

und

$$k(A_{\mu,b}^-) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \langle F_{\mu,b}^{A^-}, *F_{\mu,b}^{A^-} \rangle dx = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \langle F_{\mu,b}^{A^-}, F_{\mu,b}^{A^-} \rangle dx = -\frac{1}{8\pi^2} L(A_{\mu,b}^-) .$$

Hieraus ergibt sich mit Folgerung 7.16, dass

$$k(A_{\mu,b}^+) = 1 \quad \text{und} \quad k(A_{\mu,b}^-) = -1 .$$

\square

Den folgenden Satz führen wir ohne Beweis an.

Satz 7.22 Für jeden $SU(2)$ -Zusammenhang A auf \mathbb{R}^4 mit $L(A) < \infty$ ist

$$k(A) \in \mathbb{Z} .$$

\square

Für $k \in \mathbb{Z}$ sei \mathcal{D}_k die Menge der $SU(2)$ -Zusammenhänge A auf \mathbb{R}^4 , für die $L(A) < \infty$ und $k(A) = k$, und $L_k : \mathcal{D}_k \rightarrow \mathbb{R}$ die Einschränkung des Yang-Mills-Funktional auf \mathcal{D}_k .

Lemma 7.23 Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist \mathcal{D}_k invariant unter der Wirkung der Gruppe der Eichtransformationen. Das heißt, ist $A \in \mathcal{D}_k$ und $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^4, \text{SU}(2))$, so ist auch $A \cdot \sigma \in \mathcal{D}_k$.

Beweis. Genau wie Satz 6.14 ist das eine Konsequenz von Satz 4.5(i) und Lemma 6.9. \square

Die angestrebte Charakterisierung (anti)selbstdualer Zusammenhänge ist Inhalt des nächsten Satzes.

Satz 7.24 Ein Zusammenhang $A \in \mathcal{D}_k$ ist genau dann selbstdual (bzw. antiselbstdual), wenn $k \geq 0$ (bzw. $k \leq 0$) und L_k bei A ein absolutes Minimum hat.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{D}_k$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \langle F^A - *F^A, F^A - *F^A \rangle dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \langle F^A, F^A \rangle dx - \int_{\mathbb{R}^4} \langle F^A, *F^A \rangle dx \\ &= L_k(A) - 8\pi^2 k \end{aligned} \quad (7.13)$$

und

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \langle F^A + *F^A, F^A + *F^A \rangle dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \langle F^A, F^A \rangle dx + \int_{\mathbb{R}^4} \langle F^A, *F^A \rangle dx \\ &= L_k(A) + 8\pi^2 k . \end{aligned} \quad (7.14)$$

Also ist

$$L_k(A) \geq 8\pi^2 |k| .$$

Ist A selbstdual, so gilt $F^A - *F^A = 0$ und somit ist $L_k(A) = 8\pi^2 k$. Folglich ist $k \geq 0$ und das Funktional L_k nimmt in A sein absolutes Minimum an. Gilt umgekehrt $L_k(A) = 8\pi^2 |k|$ und ist $k \geq 0$, so impliziert (7.13), dass $F^A - *F^A = 0$, d.h. A selbstdual ist. Unter Benutzung von (7.14) erhält man analog die entsprechende Aussage für antiselbstduale Zusammenhänge.

Da \mathcal{D}_k für alle $k \in \mathbb{Z}$ mindestens einen selbstdualen oder antiselbstdualen Zusammenhang enthält (vgl. Bemerkung 7.25(i) unten), ist damit der Satz bewiesen. \square

Bemerkung 7.25 (i) Die (anti)selbstdualen $\text{SU}(2)$ -Zusammenhänge A auf \mathbb{R}^4 mit $L(A) < \infty$ sind vollständig klassifiziert (vgl. [1], [2]). Bezeichne \mathcal{M}_k die Menge aller Eichäquivalenzklassen $[A] := A \cdot \mathcal{G}(\mathbb{R}^4, \text{SU}(2))$ (anti)selbstdualer Zusammenhänge $A \in \mathcal{D}_k$. Dann ist $\mathcal{M}_0 = \{[0]\}$ und \mathcal{M}_k für $k \neq 0$ eine $(8|k| - 3)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Insbesondere ist

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ [A_{\mu,b}^+] : \mu > 0, b \in \mathbb{H} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_{-1} = \left\{ [A_{\mu,b}^-] : \mu > 0, b \in \mathbb{H} \right\} .$$

(ii) Erst 1989 konnte gezeigt werden, dass es $\text{SU}(2)$ -Yang-Mills-Zusammenhänge auf \mathbb{R}^4 mit $L(A) < \infty$ gibt, welche weder selbstdual noch antiselbstdual sind (vgl. [5] und auch [4]). \square

8 Die Maxwell-Gleichungen als Yang-Mills-Gleichung über dem Minkowski-Raum

Der folgende Satz ist eine Version des Lemmas von Poincaré.

Satz 8.1 Sei $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ mit $k \geq 1$. Dann gilt $d\omega = 0$ genau dann, wenn eine Form $\omega' \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ mit $\omega = d\omega'$ existiert.

Beweis. Die eine Richtung der Behauptung ist eine Konsequenz aus Satz 1.19(iv).

Die andere Richtung kann folgendermaßen gezeigt werden. Sei

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(\mathbb{R}^n).$$

Wir definieren

$$\omega' = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{k-1} \leq n} \omega'_{j_1 \dots j_{k-1}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}} \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$$

durch

$$\omega'_{j_1 \dots j_{k-1}}(x) := \int_0^1 \sum_{l=1}^n x^l \omega_{l j_1 \dots j_{k-1}}(tx) t^{k-1} dt.$$

Gilt dann $d\omega = 0$, so ist $\omega = d\omega'$. Wir leiten diese Aussage hier nur für $k = 1$ her. Für $k \geq 2$ geht man analog vor. Sei also

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$$

und gelte $d\omega = 0$. Dann haben wir

$$0 = \sum_{i,l=1}^n \partial_l(\omega_i) dx^l \wedge dx^i = \sum_{1 \leq l < i \leq n} (\partial_l \omega_i - \partial_i \omega_l) dx^l \wedge dx^i.$$

d.h.

$$\partial_l \omega_i = \partial_i \omega_l \quad \text{für } i, l = 1, \dots, n. \quad (8.1)$$

Bilden wir nun ω' wie oben beschrieben, so ist ω' die durch

$$\omega'(x) := \int_0^1 \sum_{l=1}^n x^l \omega_l(tx) dt$$

gegebene Funktion auf \mathbb{R}^n . Wir berechnen unter Benutzung von (8.1), dass

$$\begin{aligned} \partial_i(\omega')(x) &= \int_0^1 \left(\omega_i(tx) + t \sum_{l=1}^n x^l \partial_i(\omega_l)(tx) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\omega_i(tx) + t \sum_{l=1}^n x^l \partial_l(\omega_i)(tx) \right) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} (t\omega_i(tx)) dt = \omega_i(x) \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, n$ und somit $d\omega' = \omega$. □

Aus dem letzten Satz folgern wir

Satz 8.2 Seien A und \tilde{A} zwei $U(1)$ -Zusammenhänge auf \mathbb{R}^n . Dann gilt $F^A = F^{\tilde{A}}$ genau dann, wenn ein $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n, U(1))$ mit $\tilde{A} = A \cdot \sigma$ existiert.

Beweis. Gelte $\tilde{A} = A \cdot \sigma$ für ein $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n, U(1))$. Da $U(1)$ abelsch ist, ist dann

$$F^{\tilde{A}} = \sigma^{-1} F^A \sigma = F^A.$$

Zum Beweis der Umkehrung schreiben wir $A = i\nu$ und $\tilde{A} = i\tilde{\nu}$ mit Formen $\nu, \tilde{\nu} \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$. Damit ist

$$F^A = i d\nu \quad \text{und} \quad F^{\tilde{A}} = i d\tilde{\nu} .$$

Ist also $F^A = F^{\tilde{A}}$, so ist $d(\tilde{\nu} - \nu) = 0$ und nach Satz 8.1 existiert eine Funktion $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\tilde{\nu} - \nu = df$, d.h.

$$\tilde{A} = A + i df . \tag{8.2}$$

Setzen wir

$$\sigma := e^{if} \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n, \text{U}(1)) ,$$

so ist

$$A \cdot \sigma = \sigma^{-1} A \sigma + \sigma^{-1} d\sigma = A + e^{-if} d(e^{if}) = A + i df .$$

Also bedeutet (8.2), dass

$$\tilde{A} = A \cdot \sigma .$$

□

Um die Maxwell-Gleichungen als Yang-Mills-Gleichung interpretieren zu können, müssen wir die "metrische" Struktur des unterliegenden Raumes modifizieren. Genauer gesagt, werden wir von der bisher betrachteten euklidischen Metrik zur Lorentz-Metrik übergehen. Dies soll im Folgenden beschrieben werden.

Sei jetzt

$$\mathbb{R}^{n+1} = \{ (x^0, x^1, \dots, x^n) : x^i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0, \dots, n \}$$

und sei

$$\varepsilon^0 := -1 \quad \text{und} \quad \varepsilon^1 := \dots := \varepsilon^n := 1 .$$

Für $\omega^1, \omega^2 \in \Omega^k(\mathbb{R}^{n+1})$ definieren wir $\langle \omega^1, \omega^2 \rangle_L \in \Omega^0(\mathbb{R}^{n+1})$ durch

$$\langle \omega^1, \omega^2 \rangle_L := \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \varepsilon^{i_1} \dots \varepsilon^{i_k} \omega_{i_1 \dots i_k}^1 \omega_{i_1 \dots i_k}^2 ,$$

wobei wie bisher

$$\omega_{i_1 \dots i_k}^j := \omega^j(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}) .$$

Insbesondere ist

$$\langle dx^0, dx^0 \rangle_L = -1 \quad \text{und} \quad \langle dx^1, dx^1 \rangle_L = \dots = \langle dx^n, dx^n \rangle_L = 1 .$$

Der Operator $*_L : \Omega^k(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \Omega^{n+1-k}(\mathbb{R}^{n+1})$ für $k = 0, \dots, n$ sei durch

$$\langle *_L \omega, \omega' \rangle_L dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \omega \wedge \omega' \quad \text{für alle } \omega' \in \Omega^{n+1-k}(\mathbb{R}^{n+1})$$

definiert. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 5.11 überprüft man, dass

$$*_L(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \varepsilon^{j_1} \dots \varepsilon^{j_{n+1-k}} \varepsilon_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{n+1-k}}^L dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n+1-k}} ,$$

wobei

$$\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n+1-k}\} = \{0, 1, \dots, n\}$$

und $\varepsilon_{i_1 \dots i_{n+1}}^L$ für $\{i_1, \dots, i_{n+1}\} = \{0, 1, \dots, n\}$ das Signum der Permutation

$$j \in \{0, 1, \dots, n\} \mapsto i_j \in \{0, 1, \dots, n\}$$

bezeichnet. Insbesondere gilt für $n = 3$

$$\begin{aligned} *_L dx^0 \wedge dx^1 &= dx^2 \wedge dx^3 , \\ *_L dx^0 \wedge dx^2 &= -dx^1 \wedge dx^3 , \\ *_L dx^0 \wedge dx^3 &= dx^1 \wedge dx^2 , \\ *_L dx^1 \wedge dx^2 &= -dx^0 \wedge dx^3 , \\ *_L dx^1 \wedge dx^3 &= dx^0 \wedge dx^2 , \\ *_L dx^2 \wedge dx^3 &= -dx^0 \wedge dx^1 . \end{aligned}$$

Als Nächstes erinnern wir an die Maxwell-Gleichungen (im Vakuum, d.h. mit verschwindender Ladungsdichte). Es sei $E : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die elektrische und $B : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die magnetische Feldstärke. Wir schreiben

$$E = E(x) = (E_1(x), E_2(x), E_3(x))$$

und

$$B = B(x) = (B_1(x), B_2(x), B_3(x))$$

mit $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ und verstehen x^0 als Zeitkoordinate und x^1, x^2, x^3 als Raumkoordinaten. Die 1. Gruppe der Maxwell-Gleichungen lautet dann

$$\text{rot } E + \partial_0 B = 0 \quad \text{und} \quad \text{div } B = 0 .$$

Die 2. Gruppe ist

$$\text{rot } B - \partial_0 E = 0 \quad \text{und} \quad \text{div } E = 0 .$$

Dabei beziehen sich die Rotation rot und die Divergenz div auf die Raumkoordinaten. Es ist also

$$\text{rot } E := (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2, \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3, \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1)$$

und

$$\text{div } E := \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3$$

und genauso für B .

Wir setzen

$$\begin{aligned} F := & -E_1 dx^0 \wedge dx^1 - E_2 dx^0 \wedge dx^2 - E_3 dx^0 \wedge dx^3 \\ & + B_1 dx^2 \wedge dx^3 - B_2 dx^1 \wedge dx^3 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4) . \end{aligned}$$

und beweisen

Satz 8.3 (i) Die 1. Gruppe der Maxwell-Gleichungen ist zu $dF = 0$ äquivalent.

(ii) Die 2. Gruppe der Maxwell-Gleichungen ist zu $d*_L F = 0$ äquivalent.

Beweis. (i) Es ist

$$\begin{aligned} dF = & -\partial_2 E_1 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \partial_3 E_1 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ & + \partial_1 E_2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \partial_3 E_2 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ & + \partial_1 E_3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \partial_2 E_3 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ & + \partial_0 B_1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \partial_1 B_1 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ & - \partial_0 B_2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \partial_2 B_2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ & + \partial_0 B_3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \partial_3 B_3 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ = & (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 + \partial_0 B_3) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ & - (\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3 + \partial_0 B_2) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ & + (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 + \partial_0 B_1) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ & + (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 , \end{aligned}$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

(ii) Wir sehen, dass

$$\begin{aligned}
d *_L F &= -\partial_0 E_1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \partial_1 E_1 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad + \partial_0 E_2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - \partial_2 E_2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad - \partial_0 E_3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \partial_3 E_3 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad - \partial_2 B_1 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \partial_3 B_1 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\
&\quad + \partial_1 B_2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \partial_3 B_2 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad + \partial_1 B_3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \partial_2 B_3 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&= (-\partial_0 E_1 + \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad - (-\partial_0 E_2 + \partial_3 B_1 - \partial_1 B_3) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\
&\quad + (-\partial_0 E_3 + \partial_1 B_2 - \partial_2 B_1) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\
&\quad - (\partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 .
\end{aligned}$$

Offensichtlich liefert dies die Behauptung. \square

Bemerkung 8.4 Die Aussage (ii) von Satz 8.3 kann auch durch eine geeignete Ersetzung aus (i) abgeleitet werden. \square

Sei jetzt (E, B) eine Lösung der Maxwell-Gleichungen und sei F die korrespondierende 2-Form auf \mathbb{R}^4 . Nach Satz 8.3(i) ist dann $dF = 0$. Nach Satz 8.1 existiert demnach ein $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ mit $F = d\alpha$. Der $U(1)$ -Zusammenhang $A := i\alpha$ heißt dann ein **elektromagnetisches Potential** von F . Wegen $F^A = iF$ und Satz 8.3(ii) gilt außerdem $d *_L F^A = 0$, d.h. A ist eine Lösung der Yang-Mills-Gleichung über dem Minkowski-Raum.

Sei umgekehrt A ein $U(1)$ -Zusammenhang auf \mathbb{R}^4 und gelte $d *_L F^A = 0$. Nach Satz 3.7(i) gilt dann auch $dF^A = 0$ und mit Satz 8.3 folgt, dass die 2-Form $F := -iF^A$ eine Lösung (E, B) der Maxwell-Gleichungen repräsentiert.

Also korrespondieren die Lösungen (E, B) der Maxwell-Gleichungen zu den $U(1)$ -Zusammenhängen A auf \mathbb{R}^4 , welche Lösungen der Yang-Mills-Gleichung $d *_L F^A = 0$ sind. Dabei liefern nach Satz 8.2 zwei $U(1)$ -Zusammenhänge A und \tilde{A} auf \mathbb{R}^4 genau dann dasselbe **elektromagnetische Feld** iF , wenn sie durch eine Eichtransformation auseinander hervorgehen.

Bemerkung 8.5 Die Gleichung $d *_L F^A = 0$ beschreibt analog zum euklidischen Fall die kritischen Punkte des Funktionals

$$A \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \langle F^A, F^A \rangle_L dx .$$

\square

9 Das Modell der magnetischen Monopole

Wir leiten das von 't Hooft und Polyakov entwickelte Modell der magnetischen Monopole aus einem Variationsprinzip über \mathbb{R}^3 ab. Dazu sei G wieder eine der kompakten Lie-Gruppen $U(m)$, $SU(m)$ oder $SO(m)$ und \mathfrak{g} die Lie-Algebra von G . Für einen G -Zusammenhang A auf \mathbb{R}^3 und ein $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R}^3, \mathfrak{g})$ setzen wir

$$L_M(A, \varphi) := \int_{\mathbb{R}^3} (\langle F^A, F^A \rangle + \langle d^A \varphi, d^A \varphi \rangle) dx .$$

Bezeichne \mathcal{D}_M die Menge aller Paare (A, φ) , für die $L_M(A, \varphi) < \infty$. Analog zum Beweis von Satz 6.14 verifiziert man, dass das Funktional $L_M : \mathcal{D}_M \rightarrow \mathbb{R}$ invariant unter der Wirkung von $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3, G)$ ist. Das heißt, für alle $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_M$ und alle $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^3, G)$ gilt

$$L_M(A \cdot \sigma, \varphi \cdot \sigma) = L_M(A, \varphi) .$$

Dabei ist $\varphi \cdot \sigma \in \Omega^0(\mathbb{R}^3, \mathfrak{g})$ durch

$$(\varphi \cdot \sigma)(x) := \sigma^{-1}(x)\varphi(x)\sigma(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3$$

definiert.

Definition 9.1 Ein Paar $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_M$ heißt **kritischer Punkt** des Funktionals $L_M : \iff$ Für alle $\eta \in \Omega_0^1(\mathbb{R}^3, \mathfrak{g})$ und alle $\psi \in \Omega_0^0(\mathbb{R}^3, \mathfrak{g})$ gilt

$$\left. \frac{d}{dt} L_M(A + t\eta, \varphi + t\psi) \right|_{t=0} = 0 .$$

Satz 9.2 Ein Paar $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_M$ ist genau dann ein kritischer Punkt von L_M , wenn

$$d^A * F^A = - * [\varphi, d^A \varphi] \tag{9.1}$$

und

$$d^A * d^A \varphi = 0 . \tag{9.2}$$

Beweis. Sei $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_M$, $\eta \in \Omega_0^1(\mathbb{R}^3, \mathfrak{g})$ und $\psi \in \Omega_0^0(\mathbb{R}^3, \mathfrak{g})$. Dann ist

$$F^{A+t\eta} = F^A + td^A \eta + \frac{t^2}{2} [\eta, \eta]$$

und

$$\begin{aligned} d^{A+t\eta}(\varphi + t\psi) &= d(\varphi + t\psi) + [A + t\eta, \varphi + t\psi] \\ &= d^A \varphi + td^A \psi + t[\eta, \varphi] + t^2[\eta, \psi] . \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} L_M(A + t\eta, \varphi + t\psi) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \langle F^{A+t\eta}, F^{A+t\eta} \rangle dx \right|_{t=0} \\ &\quad + \left. \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \langle d^{A+t\eta}(\varphi + t\psi), d^{A+t\eta}(\varphi + t\psi) \rangle dx \right|_{t=0} \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^3} \langle d^A \eta, F^A \rangle dx + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \langle d^A \psi + [\eta, \varphi], d^A \varphi \rangle dx . \end{aligned}$$

Nach Lemma 6.9 gilt

$$\langle [\eta, \varphi], d^A \varphi \rangle = \langle \eta, [\varphi, d^A \varphi] \rangle .$$

Nutzen wir nun noch Folgerung 6.11, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} L_M(A + t\eta, \varphi + t\psi) \right|_{t=0} &= 2 \int_{\mathbb{R}^3} \langle \eta, (d^A)^* F^A \rangle dx + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \langle \psi, (d^A)^* d^A \psi \rangle dx \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \langle \eta, [\varphi, d^A \varphi] \rangle dx \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^3} \langle \eta, *d^A * F^A + [\varphi, d^A \varphi] \rangle dx - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \langle \psi, *d^A * d^A \varphi \rangle dx . \end{aligned}$$

Also ist (A, φ) genau dann ein kritischer Punkt von L_M , wenn

$$*d^A * F^A + [\varphi, d^A \varphi] = 0 \quad \text{und} \quad *d^A * d^A \varphi = 0 ,$$

was offensichtlich zu (9.1) und (9.2) äquivalent ist. \square

Bemerkung 9.3 (i) Die Gleichungen (9.1) und (9.2) werden **Bosonengleichungen** genannt.

(ii) Die Theorie der magnetischen Monopole ist ein Beispiel für eine **Yang-Mills-Higgs-Theorie**. Dabei wird $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R}^3, \mathfrak{g})$ als **Higgs-Feld** bezeichnet. □

Der nächste Satz beschreibt 1. Integrale der Bosonengleichungen.

Satz 9.4 Sei A ein G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^3 und sei $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R}^3, \mathfrak{g})$. Gilt

$$*F^A = d^A\varphi \tag{9.3}$$

oder

$$*F^A = -d^A\varphi, \tag{9.4}$$

so ist (A, φ) eine Lösung der Bosonengleichungen.

Beweis. Aus (9.3) schließt man mit Hilfe von Satz 3.7, dass

$$d^A *F^A = d^A d^A\varphi = [F^A, \varphi] = [*d^A\varphi, \varphi] = * [d^A\varphi, \varphi] = -* [\varphi, d^A\varphi]$$

und

$$d^A *d^A\varphi = d^A **F^A = d^A F^A = 0.$$

Analog leitet man auch aus (9.4) die Bosonengleichungen ab. □

Bemerkung 9.5 Die Gleichungen (9.3) und (9.4) heißen **Bogomolny-Gleichungen**. □

Wir erläutern jetzt, dass die Theorie der magnetischen Monopole der statischen Yang-Mills-Theorie über \mathbb{R}^4 entspricht.

Definition 9.6 Ein G -Zusammenhang

$$Z = \sum_{i=1}^4 Z_i dx^i$$

auf \mathbb{R}^4 heißt **statisch** : $\iff \partial_4 Z_i = 0$ für $i = 1, \dots, 4$.

Bei einem statischen G -Zusammenhang Z hängen die Koeffizienten Z_i also nur von den Koordinaten x^1, x^2, x^3 ab.

Satz 9.7 Sei A ein G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^3 und $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R}^3, \mathfrak{g})$. Dann ist (A, φ) genau dann eine Lösung der Bosonengleichungen, wenn der statische G -Zusammenhang

$$Z := A + \varphi dx^4 = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3 + \varphi dx^4$$

auf \mathbb{R}^4 eine Lösung der Yang-Mills-Gleichung ist.

Beweis. Zur besseren Unterscheidung schreiben wir im Folgenden $*_3$ für den Hodge-Operator auf \mathbb{R}^3 und $*_4$ für den Hodge-Operator auf \mathbb{R}^4 . Mit

$$F^A = F_{12}^A dx^1 \wedge dx^2 + F_{13}^A dx^1 \wedge dx^3 + F_{23}^A dx^2 \wedge dx^3$$

und

$$d^A\varphi = (d^A\varphi)_1 dx^1 + (d^A\varphi)_2 dx^2 + (d^A\varphi)_3 dx^3$$

ist

$$\begin{aligned}
F^Z &= dZ + \frac{1}{2}[Z, Z] \\
&= dA + d\varphi \wedge dx^4 + \frac{1}{2}[A + \varphi dx^4, A + \varphi dx^4] \\
&= dA + d\varphi \wedge dx^4 + \frac{1}{2}[A, A] + [A, \varphi dx^4] + \frac{1}{2}[\varphi dx^4, \varphi dx^4] \\
&= F^A + d\varphi \wedge dx^4 + [A, \varphi] \wedge dx^4 \\
&= F^A + d^A \varphi \wedge dx^4 \\
&= F_{12}^A dx^1 \wedge dx^2 + F_{13}^A dx^1 \wedge dx^3 + F_{23}^A dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad + (d^A \varphi)_1 dx^1 \wedge dx^4 + (d^A \varphi)_2 dx^2 \wedge dx^4 + (d^A \varphi)_3 dx^3 \wedge dx^4
\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
*_4 F^Z &= F_{12}^A dx^3 \wedge dx^4 - F_{13}^A dx^2 \wedge dx^4 + F_{23}^A dx^1 \wedge dx^4 \\
&\quad + (d^A \varphi)_1 dx^2 \wedge dx^3 - (d^A \varphi)_2 dx^1 \wedge dx^3 + (d^A \varphi)_3 dx^1 \wedge dx^2 \\
&= *_3 F^A \wedge dx^4 + *_3 d^A \varphi .
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}
d^Z *_4 F^Z &= d(*_3 F^A \wedge dx^4 + *_3 d^A \varphi) + [A + \varphi dx^4, *_3 F^A \wedge dx^4 + *_3 d^A \varphi] \\
&= (d*_3 F^A) \wedge dx^4 + d*_3 d^A \varphi \\
&\quad + [A, *_3 F^A] \wedge dx^4 + [A, *_3 d^A \varphi] + [\varphi dx^4, *_3 d^A \varphi] \\
&= (d^A *_3 F^A) \wedge dx^4 + d^A *_3 d^A \varphi + *_3 [\varphi, d^A \varphi] \wedge dx^4 .
\end{aligned}$$

Folglich gilt $d^Z *_4 F^Z = 0$ genau dann, wenn

$$d^A *_3 F^A + *_3 [\varphi, d^A \varphi] = 0 \quad \text{und} \quad d^A *_3 d^A \varphi = 0 ,$$

d.h. wenn (A, φ) eine Lösung der Bosonengleichungen ist. \square

Satz 9.8 Sei A ein G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^3 und $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R}^3, \mathfrak{g})$. Dann ist (A, φ) genau dann eine Lösung der Bogomolny-Gleichung (9.3), wenn der zugeordnete statische G -Zusammenhang $Z := A + \varphi dx^4$ auf \mathbb{R}^4 selbstdual ist. Analog ist (A, φ) dann und nur dann eine Lösung von (9.4), wenn Z antiselbstdual ist.

Beweis. Im Beweis von Satz 9.7 haben wir gesehen, dass

$$F^Z = F^A + d^A \varphi \wedge dx^4 \quad \text{und} \quad *_4 F^Z = *_3 F^A \wedge dx^4 + *_3 d^A \varphi .$$

Also gilt $*_4 F^Z = F^Z$ genau dann, wenn $*_3 F^A = d^A \varphi$, d.h. wenn (9.3) gilt. Genauso folgert man den zweiten Teil der Behauptung. \square

Bemerkung 9.9 Ist Z ein statischer G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^4 mit nichttrivialer Krümmungsform F^Z , so ist

$$L(Z) = \int_{\mathbb{R}^4} \langle F^Z, F^Z \rangle dx = \infty .$$

Andererseits hat man für $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_M$ und $Z := A + \varphi dx^4$, dass

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3 \times [0,1]} \langle F^Z, F^Z \rangle dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \langle F^A + d^A \varphi \wedge dx^4, F^A + d^A \varphi \wedge dx^4 \rangle dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} (\langle F^A, F^A \rangle + \langle d^A \varphi, d^A \varphi \rangle) dx \\
&= L_M(A, \varphi) .
\end{aligned}$$

\square

10 Monopole und Elektromagnetismus

Wir betrachten nochmals die Maxwell-Gleichungen (vgl. Abschnitt 8). Dabei nehmen wir an, dass die elektrische Feldstärke E und die magnetische Feldstärke B zeitunabhängig sind. Wir haben also $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und schreiben

$$E = E(x) = (E_1(x), E_2(x), E_3(x)) \quad \text{und} \quad B = B(x) = (B_1(x), B_2(x), B_3(x))$$

mit $x = (x^1, x^2, x^3)$. Die 1. Gruppe der Maxwell-Gleichungen lautet in diesem Fall

$$\text{rot } E = 0 \quad \text{und} \quad \text{div } B = 0 .$$

Die 2. Gruppe ist

$$\text{rot } B = 0 \quad \text{und} \quad \text{div } E = 0 .$$

Wir setzen jetzt

$$\omega_E := E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3 \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$$

und

$$\omega_B := B_1 dx^2 \wedge dx^3 - B_2 dx^1 \wedge dx^3 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3) .$$

Satz 10.1 (i) *Die 1. Gruppe der Maxwell-Gleichungen für statische, d.h. zeitunabhängige Felder ist zu*

$$d\omega_E = 0 \quad \text{und} \quad d\omega_B = 0$$

äquivalent.

(ii) *Die 2. Gruppe dieser Gleichungen ist zu*

$$d*\omega_B = 0 \quad \text{und} \quad d*\omega_E = 0$$

äquivalent.

Beweis. (i) Es ist

$$\begin{aligned} d\omega_E &= -\partial_2 E_1 dx^1 \wedge dx^2 - \partial_3 E_1 dx^1 \wedge dx^3 + \partial_1 E_2 dx^1 \wedge dx^2 - \partial_3 E_2 dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad + \partial_1 E_3 dx^1 \wedge dx^3 + \partial_2 E_3 dx^2 \wedge dx^3 \\ &= (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) dx^1 \wedge dx^2 - (\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3) dx^1 \wedge dx^3 + (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2) dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$

und

$$d\omega_B = (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 .$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

(ii) Es ist

$$*\omega_E = E_1 dx^2 \wedge dx^3 - E_2 dx^1 \wedge dx^3 + E_3 dx^1 \wedge dx^2$$

und

$$*\omega_B = B_1 dx^1 + B_2 dx^2 + B_3 dx^3 .$$

Also erhält man (ii) aus (i), indem man E und B vertauscht. \square

Sei jetzt (E, B) eine statische Lösung der Maxwell-Gleichungen und seien ω_E und ω_B die korrespondierenden Formen auf \mathbb{R}^3 . Nach Satz 10.1(i) und Satz 8.1 existieren dann ein $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ und ein $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\omega_E = df \quad \text{und} \quad \omega_B = d\alpha .$$

Wir setzen

$$\varphi := if \quad \text{und} \quad A := i\alpha .$$

Dann ist $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R}^3, \mathfrak{u}(1))$ und A ist ein $U(1)$ -Zusammenhang auf \mathbb{R}^3 . Außerdem ist

$$d^A \varphi = i\omega_E \quad \text{und} \quad F^A = i\omega_B .$$

Folglich kann nach Satz 10.1(ii) die 2. Gruppe der Maxwell-Gleichungen für statische Felder als

$$d^A *F^A = 0 \quad \text{und} \quad d^A *d^A \varphi = 0$$

geschrieben werden. Dies sind die Bosonengleichungen für $G = U(1)$.

Der nächste Satz, den wir ohne Beweis angeben, besagt, dass es für $G = U(1)$ keine physikalisch interessanten Lösungen der Bosonengleichungen gibt.

Satz 10.2 *Sei (A, φ) eine Lösung der Bosonengleichungen (9.1) und (9.2) für $G = U(1)$ mit $L_M(A, \varphi) < \infty$. Dann ist A flach, d.h. F^A verschwindet identisch, und φ ist konstant. \square*

Beispiel 10.3 Wir beschreiben das so genannte **Dirac-Monopol**. Sei $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$r(x) := \|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

definiert und sei

$$\omega_B := \frac{1}{2r^2} *dr \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) .$$

Dann ist

$$d*\omega_B = d\left(\frac{1}{2r^2} dr\right) = -\frac{1}{r^3} dr \wedge dr + \frac{1}{2r^2} ddr = 0 .$$

Da

$$2rdr = d(r^2) = 2(x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3) ,$$

ist

$$dr = \frac{1}{r} (x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3)$$

und folglich

$$*dr = \frac{1}{r} (x^1 dx^2 \wedge dx^3 - x^2 dx^1 \wedge dx^3 + x^3 dx^1 \wedge dx^2) .$$

Hieraus schließen wir, dass

$$\begin{aligned} 2d\omega_B &= d\left(\frac{1}{r^3} (x^1 dx^2 \wedge dx^3 - x^2 dx^1 \wedge dx^3 + x^3 dx^1 \wedge dx^2)\right) \\ &= -\frac{3}{r^4} dr \wedge (x^1 dx^2 \wedge dx^3 - x^2 dx^1 \wedge dx^3 + x^3 dx^1 \wedge dx^2) + \frac{3}{r^3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= -\frac{3}{r^5} (x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3) \wedge (x^1 dx^2 \wedge dx^3 - x^2 dx^1 \wedge dx^3 + x^3 dx^1 \wedge dx^2) \\ &\quad + \frac{3}{r^3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= -\frac{3}{r^5} \left((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{3}{r^3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Also liefern ω_B und $\omega_E := 0$ nach Satz 10.1 eine statische Lösung der Maxwell-Gleichungen über $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Diese Lösung wurde von Dirac als magnetisches Monopol interpretiert.

Allerdings ist auch für diese Lösung das Wirkungsfunktional unendlich, denn

$$\langle \omega_B, \omega_B \rangle = \langle *\omega_B, *\omega_B \rangle = \frac{1}{4r^6} \langle x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3, x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3 \rangle = \frac{1}{4r^4}$$

und somit

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} \langle \omega_B, \omega_B \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} \frac{1}{4r^4} dx = \pi \int_0^\infty \frac{1}{r^2} dr = \infty .$$

Außerdem existiert keine Form $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ mit $\omega_B = d\alpha$. Wir werden später den Zusammenhangsbegriff verallgemeinern und dann sehen, dass $i\omega_B$ die Krümmungsform eines (verallgemeinerten) $U(1)$ -Zusammenhangs auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist (vgl. Beispiel 13.8). \square

Um physikalisch relevante Lösungen der Bosonengleichungen zu erhalten, muss man also von $U(1)$ zu anderen Gruppen übergehen. Die physikalische Interpretation dabei ist, dass ein magnetisches Teilchen ein Elementarteilchen ist, welches nicht nur mit den elektromagnetischen Kräften wechselwirkt.

11 Spezielle Lösungen

In diesem Abschnitt wollen wir Lösungen der Bogomolny-Gleichungen für $G = SU(2)$ angeben. Dazu identifizieren wir die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$ wieder mit $\mathfrak{sp}(1)$. Sei $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ die Basis von \mathbb{H} wie in Abschnitt 7. Die Lie-Algebra $\mathfrak{sp}(1)$ wird dann von $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ aufgespannt und es gilt

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = 2\mathbf{a}_3, \quad [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = 2\mathbf{a}_1, \quad [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1] = 2\mathbf{a}_2 .$$

Lemma 11.1 *Durch*

$$h_1(t) := \frac{1}{t^2} - \frac{\coth(t)}{t} \quad \text{und} \quad h_2(t) := \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t \sinh(t)}$$

sind gerade analytische Funktionen h_1 und h_2 auf \mathbb{R} definiert.

Beweis. Aus $\sinh(-t) = -\sinh(t)$ und $\cosh(-t) = \cosh(t)$ folgt, dass die Funktionen h_1 und h_2 gerade sind. Zu zeigen bleibt, dass h_1 und h_2 auch in 0 analytisch sind. Für \sinh und \cosh haben wir die Potenzreihenentwicklungen

$$\sinh(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k+1} \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{(2k+1)!}$$

und

$$\cosh(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{2k} \quad \text{mit} \quad b_k = \frac{1}{(2k)!} .$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2} - \frac{\coth(t)}{t} &= \frac{\sinh(t) - t \cosh(t)}{t^2 \sinh(t)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k) t^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k+3}} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) t^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k+3}} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (a_{k+1} - b_{k+1}) t^{2k+3}}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k+3}} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (a_{k+1} - b_{k+1}) t^{2k}}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k}} \end{aligned}$$

und analog

$$\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t \sinh(t)} = \frac{\sinh(t) - t}{t^2 \sinh(t)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k+3}} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} t^{2k}}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k}} .$$

Da $a_0 \neq 0$, impliziert dies die Analytizität von h_1 und h_2 in 0. \square

Sei wieder

$$r(x) := \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} .$$

Nach Lemma 11.1 sind $h_1(r)$ und $h_2(r)$ analytische und somit insbesondere glatte Funktionen auf \mathbb{R}^3 . Wir definieren einen $SU(2)$ -Zusammenhang A auf \mathbb{R}^3 und ein $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R}^3, \mathfrak{su}(2))$ durch

$$A := \frac{1}{2}h_2(r)\hat{A} \quad \text{und} \quad \varphi := \frac{1}{2}h_1(r)\hat{\varphi}$$

mit

$$\hat{A} := (x^3 dx^2 - x^2 dx^3) \mathbf{a}_1 + (x^1 dx^3 - x^3 dx^1) \mathbf{a}_2 + (x^2 dx^1 - x^1 dx^2) \mathbf{a}_3$$

und

$$\hat{\varphi} := x^1 \mathbf{a}_1 + x^2 \mathbf{a}_2 + x^3 \mathbf{a}_3 .$$

Satz 11.2 *Das eben definierte Paar (A, φ) ist eine Lösung der Bogomolny-Gleichung (9.3).*

Beweis. Seien A, φ und $\hat{A}, \hat{\varphi}$ wie oben angegeben. Dann ist

$$d\varphi = \frac{1}{2}(h_1'(r)\hat{\varphi}dr + h_1(r)d\hat{\varphi})$$

und

$$d\hat{\varphi} = dx^1 \mathbf{a}_1 + dx^2 \mathbf{a}_2 + dx^3 \mathbf{a}_3 .$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{\varphi}] &= x^2 (x^3 dx^2 - x^2 dx^3) \mathbf{a}_3 - x^3 (x^3 dx^2 - x^2 dx^3) \mathbf{a}_2 \\ &\quad - x^1 (x^1 dx^3 - x^3 dx^1) \mathbf{a}_3 + x^3 (x^1 dx^3 - x^3 dx^1) \mathbf{a}_1 \\ &\quad + x^1 (x^2 dx^1 - x^1 dx^2) \mathbf{a}_2 - x^2 (x^2 dx^1 - x^1 dx^2) \mathbf{a}_1 \\ &= (x^1 (x^2 dx^2 + x^3 dx^3) - ((x^2)^2 + (x^3)^2) dx^1) \mathbf{a}_1 \\ &\quad + (x^2 (x^1 dx^1 + x^3 dx^3) - ((x^1)^2 + (x^3)^2) dx^2) \mathbf{a}_2 \\ &\quad + (x^3 (x^1 dx^1 + x^2 dx^2) - ((x^1)^2 + (x^2)^2) dx^3) \mathbf{a}_3 \\ &= (x^1 (x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3) - ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2) dx^1) \mathbf{a}_1 \\ &\quad + (x^2 (x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3) - ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2) dx^2) \mathbf{a}_2 \\ &\quad + (x^3 (x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3) - ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2) dx^3) \mathbf{a}_3 \\ &= r\hat{\varphi}dr - r^2 d\hat{\varphi} . \end{aligned}$$

Folglich ist

$$d^A \varphi = d\varphi + [A, \varphi] = \frac{1}{2} ((h_1'(r) + rh_1(r)h_2(r))\hat{\varphi}dr + h_1(r)(1 - r^2 h_2(r))d\hat{\varphi}) . \quad (11.1)$$

Des Weiteren haben wir

$$dA = \frac{1}{2} (h_2'(r)dr \wedge \hat{A} + h_2(r)d\hat{A}) .$$

Da

$$\begin{aligned} r dr \wedge \hat{A} &= (x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3) \wedge ((x^3 dx^2 - x^2 dx^3) \mathbf{a}_1 + (x^1 dx^3 - x^3 dx^1) \mathbf{a}_2 \\ &\quad + (x^2 dx^1 - x^1 dx^2) \mathbf{a}_3) \\ &= (x^1 x^3 dx^1 \wedge dx^2 - x^1 x^2 dx^1 \wedge dx^3 - (x^2)^2 dx^2 \wedge dx^3 - (x^3)^2 dx^2 \wedge dx^3) \mathbf{a}_1 \\ &\quad + ((x^1)^2 dx^1 \wedge dx^3 + x^1 x^2 dx^2 \wedge dx^3 + x^2 x^3 dx^1 \wedge dx^2 + (x^3)^2 dx^1 \wedge dx^3) \mathbf{a}_2 \\ &\quad + (-(x^1)^2 dx^1 \wedge dx^2 - (x^2)^2 dx^1 \wedge dx^2 - x^2 x^3 dx^1 \wedge dx^3 + x^1 x^3 dx^2 \wedge dx^3) \mathbf{a}_3 \\ &= \hat{\varphi} (x^3 dx^1 \wedge dx^2 - x^2 dx^1 \wedge dx^3 + x^1 dx^2 \wedge dx^3) \\ &\quad - r^2 (dx^2 \wedge dx^3 \mathbf{a}_1 - dx^1 \wedge dx^3 \mathbf{a}_2 + dx^1 \wedge dx^2 \mathbf{a}_3) , \end{aligned}$$

ist

$$*(rdr \wedge \hat{A}) = \hat{\varphi} (x^3 dx^3 + x^2 dx^2 + x^1 dx^1) - r^2 (dx^1 \mathbf{a}_1 + dx^2 \mathbf{a}_2 + dx^3 \mathbf{a}_3) = r\hat{\varphi}dr - r^2 d\hat{\varphi}$$

und somit

$$*(dr \wedge \hat{A}) = \hat{\varphi}dr - rd\hat{\varphi}.$$

Da

$$d\hat{A} = -2(dx^2 \wedge dx^3 \mathbf{a}_1 - dx^1 \wedge dx^3 \mathbf{a}_2 + dx^1 \wedge dx^2 \mathbf{a}_3),$$

ist

$$*d\hat{A} = -2(dx^1 \mathbf{a}_1 + dx^2 \mathbf{a}_2 + dx^3 \mathbf{a}_3) = -2d\hat{\varphi}.$$

Es folgt

$$*dA = \frac{1}{2}(h_2'(r)(\hat{\varphi}dr - rd\hat{\varphi}) - 2h_2(r)d\hat{\varphi}) = \frac{1}{2}(h_2'(r)\hat{\varphi}dr - (rh_2'(r) + 2h_2(r))d\hat{\varphi}).$$

Schließlich müssen wir $*[A, A]$ berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{A}] &= 2([(x^3 dx^2 - x^2 dx^3) \mathbf{a}_1, (x^1 dx^3 - x^3 dx^1) \mathbf{a}_2] \\ &\quad + [(x^3 dx^2 - x^2 dx^3) \mathbf{a}_1, (x^2 dx^1 - x^1 dx^2) \mathbf{a}_3] \\ &\quad + [(x^1 dx^3 - x^3 dx^1) \mathbf{a}_2, (x^2 dx^1 - x^1 dx^2) \mathbf{a}_3]) \\ &= 4\left((-x^1 x^2 dx^1 \wedge dx^3 + (x^1)^2 dx^2 \wedge dx^3 + x^1 x^3 dx^1 \wedge dx^2) \mathbf{a}_1 \right. \\ &\quad + (x^2 x^3 dx^1 \wedge dx^2 - (x^2)^2 dx^1 \wedge dx^3 - x^1 x^2 dx^2 \wedge dx^3) \mathbf{a}_2 \\ &\quad \left. + (x^1 x^3 dx^2 \wedge dx^3 + (x^3)^2 dx^1 \wedge dx^2 - x^2 x^3 dx^1 \wedge dx^3) \mathbf{a}_3 \right) \\ &= 4(x^1 \mathbf{a}_1 + x^2 \mathbf{a}_2 + x^3 \mathbf{a}_3) (x^3 dx^1 \wedge dx^2 - x^2 dx^1 \wedge dx^3 + x^1 dx^2 \wedge dx^3) \end{aligned}$$

und somit

$$*[\hat{A}, \hat{A}] = 4r\hat{\varphi}dr.$$

Also ist

$$*[A, A] = \frac{1}{4}h_2^2(r)*[\hat{A}, \hat{A}] = rh_2^2(r)\hat{\varphi}dr.$$

Damit erhalten wir

$$*F^A = * \left(dA + \frac{1}{2}[A, A] \right) = \frac{1}{2}((h_2'(r) + rh_2^2(r))\hat{\varphi}dr - (rh_2'(r) + 2h_2(r))d\hat{\varphi}). \quad (11.2)$$

Aus (11.1) und (11.2) folgt, dass (A, φ) eine Lösung der Bogomolny-Gleichung (9.3) ist, wenn

$$h_2'(r) + rh_2^2(r) = h_1'(r) + rh_1(r)h_2(r)$$

und

$$rh_2'(r) + 2h_2(r) = h_1(r)(r^2 h_2(r) - 1).$$

Die letzten beiden Gleichungen rechnet man unter Benutzung von

$$h_1'(r) = -\frac{2}{r^3} + \frac{\coth(r)}{r^2} + \frac{1}{r \sinh^2(r)} \quad \text{und} \quad h_2'(r) = -\frac{2}{r^3} + \frac{1}{r^2 \sinh(r)} + \frac{\coth(r)}{r \sinh(r)}$$

direkt nach. □

Auf $\mathfrak{sp}(1)$ betrachten wir wieder das durch

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = 2\delta_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3$$

bestimmte Skalarprodukt. Dann gilt

Satz 11.3 Für das Paar (A, φ) aus Satz 11.2 ist

$$L_M(A, \varphi) = 4\pi .$$

Beweis. Nach Satz 11.2 gilt

$$*F^A = d^A \varphi .$$

Also ist

$$\begin{aligned} L_M(A, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^3} (\langle F^A, F^A \rangle + \langle d^A \varphi, d^A \varphi \rangle) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (\langle F^A, F^A \rangle + \langle *F^A, *F^A \rangle) dx = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \langle *F^A, *F^A \rangle dx . \end{aligned}$$

Wir setzen jetzt

$$h_3(r) := h'_2(r) + rh'_2(r) = -\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^2 \sinh(r)} + \frac{1}{r \sinh^2(r)} + \frac{\cosh(r)}{r \sinh^2(r)}$$

und

$$h_4(r) := rh'_2(r) + 2h_2(r) = -\frac{1}{r \sinh(r)} + \frac{\cosh(r)}{\sinh^2(r)} .$$

Nach (11.2) ist dann

$$*F^A = \frac{1}{2}(h_3(r)\hat{\varphi}dr - h_4(r)d\hat{\varphi}) .$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \langle r\hat{\varphi}dr, r\hat{\varphi}dr \rangle &= \langle \hat{\varphi} (x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3), \hat{\varphi} (x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3) \rangle \\ &= \left((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \right) \langle \hat{\varphi}, \hat{\varphi} \rangle \\ &= r^2 \langle x^1 \mathbf{a}_1 + x^2 \mathbf{a}_2 + x^3 \mathbf{a}_3, x^1 \mathbf{a}_1 + x^2 \mathbf{a}_2 + x^3 \mathbf{a}_3 \rangle \\ &= 2r^2 \left((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \right) \\ &= 2r^4 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle r\hat{\varphi}dr, d\hat{\varphi} \rangle &= \langle \hat{\varphi} (x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3), dx^1 \mathbf{a}_1 + dx^2 \mathbf{a}_2 + dx^3 \mathbf{a}_3 \rangle \\ &= x^1 \langle \hat{\varphi}, \mathbf{a}_1 \rangle + x^2 \langle \hat{\varphi}, \mathbf{a}_2 \rangle + x^3 \langle \hat{\varphi}, \mathbf{a}_3 \rangle \\ &= 2 \left((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \right) \\ &= 2r^2 . \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\langle \hat{\varphi}dr, \hat{\varphi}dr \rangle = 2r^2 \quad \text{und} \quad \langle \hat{\varphi}dr, d\hat{\varphi} \rangle = 2r .$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \langle d\hat{\varphi}, d\hat{\varphi} \rangle &= \langle dx^1 \mathbf{a}_1 + dx^2 \mathbf{a}_2 + dx^3 \mathbf{a}_3, dx^1 \mathbf{a}_1 + dx^2 \mathbf{a}_2 + dx^3 \mathbf{a}_3 \rangle \\ &= \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle + \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 \rangle + \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 \rangle \\ &= 6 . \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\langle *F^A, *F^A \rangle &= \frac{1}{4} \langle h_3(r) \hat{\varphi} dr - h_4(r) d\hat{\varphi}, h_3(r) \hat{\varphi} dr - h_4(r) d\hat{\varphi} \rangle \\
&= \frac{1}{4} (h_3^2(r) \langle \hat{\varphi} dr, \hat{\varphi} dr \rangle - 2h_3(r)h_4(r) \langle \hat{\varphi} dr, d\hat{\varphi} \rangle + h_4^2(r) \langle d\hat{\varphi}, d\hat{\varphi} \rangle) \\
&= \frac{1}{4} (2r^2 h_3^2(r) - 4r h_3(r)h_4(r) + 6h_4^2(r)) \\
&= \frac{1}{2} ((rh_3(r) - h_4(r))^2 + 2h_4^2(r)) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\sinh^2(r)} \right)^2 + 2 \left(-\frac{1}{r \sinh(r)} + \frac{\cosh(r)}{\sinh^2(r)} \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^4} - \frac{2}{r^2 \sinh^2(r)} + \frac{1}{\sinh^4(r)} + \frac{2}{r^2 \sinh^2(r)} - \frac{4 \cosh(r)}{r \sinh^3(r)} + \frac{2 \cosh^2(r)}{\sinh^4(r)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^4} + h_5(r) \right)
\end{aligned}$$

mit

$$h_5(r) := \frac{r(1 + 2 \cosh^2(r)) - 4 \sinh(r) \cosh(r)}{r \sinh^4(r)}.$$

Es folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} \langle *F^A, *F^A \rangle dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{r^4} + h_5(r) \right) dx = 2\pi \int_0^\infty \left(\frac{1}{r^2} + r^2 h_5(r) \right) dr.$$

Mit

$$\int r^2 h_5(r) dr = -\frac{4r^2 (e^{4r} + e^{2r}) - 4r (e^{4r} - e^{2r}) - 2 (e^{2r} - 1)^2}{(e^{2r} - 1)^3}$$

und

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{e^{2r} - 1} &= \frac{1}{2}, \\
\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r (e^{4r} + e^{2r}) - (e^{4r} - e^{2r})}{(e^{2r} - 1)^2} &= 0, \\
\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{2}{e^{2r} - 1} - \frac{1}{r} \right) &= -1
\end{aligned}$$

verifiziert man, dass

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{r^2} + r^2 h_5(r) \right) dr = 1,$$

und erhält insgesamt, dass

$$L_M(A, \varphi) = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \langle *F^A, *F^A \rangle dx = 4\pi.$$

□

Die in den Sätzen 11.2 und 11.3 betrachtete Lösung (A, φ) der Bogomolny-Gleichung (9.3) heißt **Prasad-Sommerfield-Monopol**. Sie wurde von Prasad und Sommerfield (1975) sowie Bogomolny (1976) gefunden. Im Folgenden bezeichnen wir diese Lösung mit $(A^{\text{PS}}, \varphi^{\text{PS}})$. Aus den Sätzen 11.2 und 11.3 folgt unmittelbar, dass $(A^{\text{PS}}, -\varphi^{\text{PS}})$ eine Lösung der Bogomolny-Gleichung (9.4) und

$$L_M(A^{\text{PS}}, -\varphi^{\text{PS}}) = 4\pi$$

ist. Weitere Lösungen der Bogomolny-Gleichungen erhält man folgendermaßen.

Satz 11.4 Sei (A, φ) eine Lösung von (9.3) bzw. von (9.4) und sei $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine orientierungserhaltende euklidische Transformation, d.h. es ist $\Psi(x) = qx + \mathfrak{b}$ für ein $q \in \text{SO}(3)$ und ein $\mathfrak{b} \in \mathbb{R}^3$. Dann ist auch $(\Psi^*A, \Psi^*\varphi)$ eine Lösung von (9.3) bzw. von (9.4).

Beweis. Wir haben (vgl. den Beweis von Folgerung 5.8)

$$F^{\Psi^*A} = \Psi^*F^A \quad \text{und} \quad d^{\Psi^*A}(\Psi^*\varphi) = \Psi^*(d^A\varphi) .$$

Außerdem gilt nach Satz 5.7, dass

$$*(\Psi^*F^A) = \Psi^*(*F^A) .$$

Aus $*F^A = \pm d^A\psi$ folgt also

$$*F^{\Psi^*A} = *(\Psi^*F^A) = \Psi^*(*F^A) = \pm\Psi^*(d^A\varphi) = \pm d^{\Psi^*A}(\Psi^*\varphi) .$$

□

Den nächsten Satz geben wir ohne Beweis an.

Satz 11.5 Sei A ein $\text{SU}(2)$ -Zusammenhang auf \mathbb{R}^3 und sei $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R}^3, \mathfrak{su}(2))$. Dann ist (A, φ) genau dann eine Lösung von (9.3) bzw. von (9.4) mit $L_M(A, \varphi) = 4\pi$, wenn eine orientierungserhaltende euklidische Transformation $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und eine Eichtransformation $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^3, \text{SU}(2))$ mit

$$(A, \varphi) = ((\Psi^*A^{\text{PS}}) \cdot \sigma, (\Psi^*\varphi^{\text{PS}}) \cdot \sigma) \quad \text{bzw.} \quad (A, \varphi) = ((\Psi^*A^{\text{PS}}) \cdot \sigma, -(\Psi^*\varphi^{\text{PS}}) \cdot \sigma)$$

existieren.

□

Bemerkung 11.6 Für einen $\text{SU}(2)$ -Zusammenhang A auf \mathbb{R}^3 und ein $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R}^3, \mathfrak{su}(2))$ ist die **Monopolladung** $k_M(A, \varphi)$ durch

$$k_M(A, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \langle *F^A, d^A\varphi \rangle dx$$

definiert. Diese Größe spielt eine ähnliche Rolle wie die Instantonenzahl in der Yang-Mills-Theorie über \mathbb{R}^4 . Ist (A, φ) eine Lösung von (9.3), so ist

$$k_M(A, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (\langle *F^A, *F^A \rangle + \langle d^A\varphi, d^A\varphi \rangle) dx = \frac{1}{4\pi} L_M(A, \varphi) .$$

Analog gilt für eine Lösung (A, φ) von (9.4), dass

$$k_M(A, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} L_M(A, \varphi) .$$

Insbesondere ist nach Satz 11.3

$$k_M(A^{\text{PS}}, \varphi^{\text{PS}}) = 1 \quad \text{und} \quad k_M(A^{\text{PS}}, -\varphi^{\text{PS}}) = -1 .$$

□

12 Das Landau-Ginzburg-Modell

Wir betrachten auf \mathbb{C} das durch

$$\langle z_1, z_2 \rangle := z_1 \bar{z}_2$$

bestimmte hermitesche Produkt. Die Einschränkung dieses Produktes auf $\mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}$ ist das in Abschnitt 6 angegebene Skalarprodukt auf $\mathfrak{u}(1)$. Für $\omega^1, \omega^2 \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ definieren wir $\langle \omega^1, \omega^2 \rangle \in \Omega^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ analog zu Definition 6.1 durch

$$\langle \omega^1, \omega^2 \rangle(x) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \langle \omega^1(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}), \omega^2(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \rangle ,$$

wobei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von $T_x \mathbb{R}^n$ ist. Ist A ein $U(1)$ -Zusammenhang auf \mathbb{R}^n und $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, so setzen wir

$$d^A \omega := d\omega + A \wedge \omega \in \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) .$$

Das Landau-Ginzburg-Modell ist wieder durch ein Wirkungsfunktional, in diesem Fall über \mathbb{R}^2 , beschrieben. Für einen $U(1)$ -Zusammenhang A auf \mathbb{R}^2 und ein $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ setzen wir

$$L_{LG}(A, \varphi) := \int_{\mathbb{R}^2} \left(\langle F^A, F^A \rangle + \langle d^A \varphi, d^A \varphi \rangle + \frac{1}{4} (\langle \varphi, \varphi \rangle - 1)^2 \right) dx .$$

Dieses von Landau und Ginzburg entwickelte Modell dient zur Beschreibung des Phänomens der Supraleitfähigkeit. Dabei wird angenommen, dass die Felder in einer Richtung konstant sind. Dies ermöglicht die Reduktion von \mathbb{R}^3 auf \mathbb{R}^2 . Der Zusammenhang A ist wieder das elektromagnetische Potential, während φ die Verteilung der so genannten **Cooper-Paare** von Elektronen angibt.

Sei \mathcal{D}_{LG} die Menge derjenigen Paare (A, φ) , für die $L_{LG}(A, \varphi) < \infty$.

Satz 12.1 *Das Funktional $L_{LG} : \mathcal{D}_{LG} \rightarrow \mathbb{R}$ ist invariant unter der Wirkung von $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2, U(1))$, d.h.*

$$L_{LG}(A \cdot \sigma, \varphi \cdot \sigma) = L_{LG}(A, \varphi) .$$

für alle $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_{LG}$ und alle $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^2, U(1))$. Dabei ist $\varphi \cdot \sigma \in \Omega^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ durch

$$(\varphi \cdot \sigma)(x) := \sigma^{-1}(x) \varphi(x)$$

definiert.

Beweis. Die Behauptung folgt zum einen aus

$$F^{A \cdot \sigma} = \sigma^{-1} F^A \sigma = F^A ,$$

zum anderen aus

$$\begin{aligned} d^{A \cdot \sigma}(\varphi \cdot \sigma) &= d(\sigma^{-1} \varphi) + (\sigma^{-1} A \sigma + \sigma^{-1} d\sigma)(\sigma^{-1} \varphi) \\ &= d(\sigma^{-1}) \varphi + \sigma^{-1} d\varphi + \sigma^{-1} A \varphi + \sigma^{-1} (d\sigma) \sigma^{-1} \varphi \\ &= -\sigma^{-1} (d\sigma) \sigma^{-1} \varphi + \sigma^{-1} d\varphi + \sigma^{-1} A \varphi + \sigma^{-1} (d\sigma) \sigma^{-1} \varphi \\ &= \sigma^{-1} d^A \varphi \end{aligned}$$

und

$$\langle qz_1, qz_2 \rangle = \langle z_1, z_2 \rangle$$

für $q \in U(1)$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. □

Für die Berechnung der Variationsgleichungen von L_{LG} werden wir folgendes Lemma benutzen.

Lemma 12.2 *Sei A ein $U(1)$ -Zusammenhang auf \mathbb{R}^2 , $\psi \in \Omega_0^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ und $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \langle d^A \psi, \omega \rangle dx = - \int_{\mathbb{R}^2} \langle \psi, *d^A * \omega \rangle dx .$$

Beweis. Sei

$$A = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 \quad \text{und} \quad \omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} *(A \wedge *\omega) &= *((A_1 dx^1 + A_2 dx^2) \wedge (\omega_1 dx^2 - \omega_2 dx^1)) \\ &= *(A_1 \omega_1 + A_2 \omega_2) dx^1 \wedge dx^2 \\ &= A_1 \omega_1 + A_2 \omega_2 \end{aligned}$$

und folglich

$$\langle \psi, *(A \wedge *\omega) \rangle = \psi (\bar{A}_1 \bar{\omega}_1 + \bar{A}_2 \bar{\omega}_2) = -\psi (A_1 \bar{\omega}_1 + A_2 \bar{\omega}_2) = -\langle A\psi, \omega \rangle .$$

Außerdem folgt aus Satz 6.4, dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} \langle d\psi, \omega \rangle dx = - \int_{\mathbb{R}^2} \langle \psi, *d*\omega \rangle dx .$$

Also haben wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \langle d^A \psi, \omega \rangle dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \langle d\psi, \omega \rangle dx + \int_{\mathbb{R}^2} \langle A\psi, \omega \rangle dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} \langle \psi, *d*\omega \rangle dx - \int_{\mathbb{R}^2} \langle \psi, *(A \wedge *\omega) \rangle dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} \langle \psi, *d^A *\omega \rangle dx . \end{aligned}$$

□

Wir führen jetzt noch folgende Bezeichnung ein. Ist $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, so seien $\langle \varphi, \omega \rangle \in \Omega^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und $\langle \omega, \varphi \rangle \in \Omega^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ durch

$$\langle \varphi, \omega \rangle(v) := \langle \varphi(x), \omega(v) \rangle \quad \text{und} \quad \langle \omega, \varphi \rangle(v) := \langle \omega(v), \varphi(x) \rangle$$

für $v \in T_x \mathbb{R}^n$ gegeben. Es ist also

$$\langle \varphi, \omega \rangle = \varphi \bar{\omega} \quad \text{und} \quad \langle \omega, \varphi \rangle = \omega \bar{\varphi} .$$

Mit dieser Bezeichnung können die **Wirbelgleichungen** genannten Variationsgleichungen von L_{LG} wie folgt formuliert werden.

Satz 12.3 Ein Paar $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_{LG}$ ist genau dann ein kritischer Punkt von L_{LG} , d.h. es gilt

$$\left. \frac{d}{dt} L_{LG}(A + t\eta, \varphi + t\psi) \right|_{t=0} = 0$$

für alle $\eta \in \Omega_0^1(\mathbb{R}^2, \mathfrak{u}(1))$ und alle $\psi \in \Omega_0^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, wenn

$$d*F^A = \frac{1}{2} * (\langle \varphi, d^A \varphi \rangle - \langle d^A \varphi, \varphi \rangle) \tag{12.1}$$

und

$$d^A *d^A \varphi = \frac{1}{2} * (\langle \varphi, \varphi \rangle - 1) \varphi . \tag{12.2}$$

Beweis. Sei $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_{LG}$. Da

$$F^{A+t\eta} = d(A + t\eta) = dA + td\eta = F^A + td\eta$$

und

$$d^{A+t\eta}(\varphi + t\psi) = d(\varphi + t\psi) + (A + t\eta)(\varphi + t\psi) = d^A\varphi + td^A\psi + t\eta\varphi + t^2\eta\psi ,$$

ist

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt} L_{LG}(A + t\eta, \varphi + t\psi) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \langle F^{A+t\eta}, F^{A+t\eta} \rangle dx \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \langle d^{A+t\eta}(\varphi + t\psi), d^{A+t\eta}(\varphi + t\psi) \rangle dx \right|_{t=0} \\ & \quad + \left. \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} (\langle \varphi + t\psi, \varphi + t\psi \rangle - 1)^2 dx \right|_{t=0} \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^2} \langle d\eta, F^A \rangle dx + \int_{\mathbb{R}^2} (\langle d^A\psi + \eta\varphi, d^A\varphi \rangle + \langle d^A\varphi, d^A\psi + \eta\varphi \rangle) dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\langle \varphi, \varphi \rangle - 1)(\langle \psi, \varphi \rangle + \langle \varphi, \psi \rangle) dx . \end{aligned}$$

Nach Satz 6.4 ist

$$\int_{\mathbb{R}^2} \langle d\eta, F^A \rangle dx = - \int_{\mathbb{R}^2} \langle \eta, *d^*F^A \rangle dx$$

und nach Lemma 12.2 gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\langle d^A\psi, d^A\varphi \rangle + \langle d^A\varphi, d^A\psi \rangle) dx = -2 \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{Re}(\langle \psi, *d^A*d^A\varphi \rangle) dx .$$

Mit

$$\eta = \eta_1 dx^1 + \eta_2 dx^2 \quad \text{und} \quad d^A\varphi = (d^A\varphi)_1 dx^1 + (d^A\varphi)_2 dx^2$$

haben wir außerdem

$$\begin{aligned} \langle \eta\varphi, d^A\varphi \rangle + \langle d^A\varphi, \eta\varphi \rangle &= \sum_{j=1}^2 \eta_j \left(\overline{\varphi(d^A\varphi)_j} - (d^A\varphi)_j \bar{\varphi} \right) \\ &= \sum_{j=1}^2 \eta_j \overline{\left((d^A\varphi)_j \bar{\varphi} - \varphi \overline{(d^A\varphi)_j} \right)} \\ &= \langle \eta, \langle d^A\varphi, \varphi \rangle - \langle \varphi, d^A\varphi \rangle \rangle . \end{aligned}$$

Ingesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt} L_{LG}(A + t\eta, \varphi + t\psi) \right|_{t=0} \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}^2} \langle \eta, *d^*F^A \rangle dx + \int_{\mathbb{R}^2} \langle \eta, \langle d^A\varphi, \varphi \rangle - \langle \varphi, d^A\varphi \rangle \rangle dx \\ & \quad - 2 \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{Re}(\langle \psi, *d^A*d^A\varphi \rangle) dx + \int_{\mathbb{R}^2} (\langle \varphi, \varphi \rangle - 1) \operatorname{Re}(\langle \psi, \varphi \rangle) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} \langle \eta, 2*d^*F^A - \langle d^A\varphi, \varphi \rangle + \langle \varphi, d^A\varphi \rangle \rangle dx \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{Re}(\langle \psi, 2*d^A*d^A\varphi - (\langle \varphi, \varphi \rangle - 1)\varphi \rangle) dx . \end{aligned}$$

Folglich ist (A, φ) genau dann ein kritischer Punkt von L_{LG} , wenn

$$2*d^*F^A - \langle d^A\varphi, \varphi \rangle + \langle \varphi, d^A\varphi \rangle = 0$$

und

$$2*d^A*d^A\varphi - (\langle \varphi, \varphi \rangle - 1)\varphi = 0 ,$$

d.h. wenn (12.1) und (12.2) gelten. □

Der nächste Satz beschreibt 1. Integrale der Wirbelgleichungen (12.1) und (12.2).

Satz 12.4 Sei A ein $U(1)$ -Zusammenhang auf \mathbb{R}^2 und $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. Gilt

$$*F^A = \frac{i}{2}(\langle \varphi, \varphi \rangle - 1) \quad \text{und} \quad d^A \varphi = i*d^A \varphi \quad (12.3)$$

oder

$$*F^A = -\frac{i}{2}(\langle \varphi, \varphi \rangle - 1) \quad \text{und} \quad d^A \varphi = -i*d^A \varphi, \quad (12.4)$$

so ist (A, φ) auch eine Lösung von (12.1) und (12.2).

Beweis. Seien A und φ wie oben angegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle d^A \varphi, \varphi \rangle + \langle \varphi, d^A \varphi \rangle &= (d\varphi + A\varphi)\bar{\varphi} + \varphi \overline{(d\varphi + A\varphi)} \\ &= (d\varphi + A\varphi)\bar{\varphi} + \varphi(d\bar{\varphi} - A\bar{\varphi}) \\ &= (d\varphi)\bar{\varphi} + A\varphi\bar{\varphi} + \varphi d\bar{\varphi} - \varphi A\bar{\varphi} \\ &= d(\varphi\bar{\varphi}), \end{aligned}$$

d.h.

$$\langle d^A \varphi, \varphi \rangle + \langle \varphi, d^A \varphi \rangle = d\langle \varphi, \varphi \rangle, \quad (12.5)$$

und

$$\begin{aligned} d^A d^A \varphi &= d^A(d\varphi + A\varphi) \\ &= d(d\varphi + A\varphi) + A \wedge (d\varphi + A\varphi) \\ &= dd\varphi + (dA)\varphi - A \wedge d\varphi + A \wedge d\varphi + A \wedge A\varphi \\ &= (dA)\varphi, \end{aligned}$$

also

$$d^A d^A \varphi = F^A \varphi. \quad (12.6)$$

Sei jetzt (A, φ) eine Lösung von (12.3). Mittels (12.5) und (12.6) können wir schließen, dass

$$\begin{aligned} d*F^A &= \frac{i}{2}d(\langle \varphi, \varphi \rangle - 1) \\ &= \frac{i}{2}(\langle d^A \varphi, \varphi \rangle + \langle \varphi, d^A \varphi \rangle) \\ &= \frac{i}{2}(\langle i*d^A \varphi, \varphi \rangle + \langle \varphi, i*d^A \varphi \rangle) \\ &= \frac{1}{2}* (\langle \varphi, d^A \varphi \rangle - \langle d^A \varphi, \varphi \rangle) \end{aligned}$$

und

$$d^A *d^A \varphi = -i d^A d^A \varphi = -i F^A \varphi = \frac{1}{2}*(\langle \varphi, \varphi \rangle - 1)\varphi.$$

Das heißt, (A, φ) erfüllt die Wirbelgleichungen (12.1) und (12.2). Analog sieht man, dass auch jede Lösung von (12.4) eine Lösung von (12.1) und (12.2) ist. \square

Die restlichen Sätze in diesem Abschnitt geben wir ohne Beweis an.

Satz 12.5 Sei $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_{LG}$ eine Lösung der Wirbelgleichungen (12.1) und (12.2). Dann gilt:

- (i) Für alle $x \in \mathbb{R}^2$ ist $\langle \varphi, \varphi \rangle(x) < 1$.
- (ii) Die Menge der Nullstellen von φ ist endlich.

(iii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein solches $M > 0$, dass

$$|*F^A|(x) \leq M \exp((\varepsilon - 1)|x|) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2.$$

Insbesondere ist

$$\int_{\mathbb{R}^2} |*F^A| \, dx < \infty.$$

□

Satz 12.5(iii) erlaubt die folgende Definition.

Definition 12.6 Die **Wirbelzahl** einer Lösung $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_{\text{LG}}$ von (12.1) und (12.2) ist

$$k_{\text{W}}(A, \varphi) := \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} *F^A \, dx.$$

Folgerung 12.7 Sei $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_{\text{LG}}$ eine Lösung von (12.3) bzw. von (12.4). Dann ist $k_{\text{W}}(A, \varphi) \geq 0$ bzw. $k_{\text{W}}(A, \varphi) \leq 0$ und es gilt $k_{\text{W}}(A, \varphi) = 0$ genau dann, wenn $\langle \varphi, \varphi \rangle \equiv 1$.

Beweis. Sei $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_{\text{LG}}$ eine Lösung von (12.3). Dann ist

$$k_{\text{W}}(A, \varphi) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} *F^A \, dx = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \langle \varphi, \varphi \rangle) \, dx.$$

Da nach Satz 12.5(i) außerdem $1 - \langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0$, folgt die Behauptung.

Für eine Lösung $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_{\text{LG}}$ von (12.4) schließt man analog. □

Satz 12.8 Für jede Lösung $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_{\text{LG}}$ von (12.1) und (12.2) ist $k_{\text{W}}(A, \varphi) \in \mathbb{Z}$. □

Wir identifizieren im Folgenden \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} . Berücksichtigt man Satz 12.5(ii), so gibt der nächste Satz eine vollständige Klassifikation aller Lösungen $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_{\text{LG}}$ von (12.3).

Satz 12.9 (i) Sei $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_{\text{LG}}$ eine Lösung von (12.3). Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von φ , so existieren eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von z_0 , eine nirgends verschwindende glatte Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ und eine Zahl $\text{ord}(\varphi, z_0) \in \mathbb{N}$ mit

$$\varphi(z) = f(z)(z - z_0)^{\text{ord}(\varphi, z_0)} \quad \text{für alle } z \in U.$$

(ii) Zu jedem $2m$ -Tupel $(z_1, \dots, z_m, n_1, \dots, n_m)$ mit $m = 0, 1, \dots$ bestehend aus paarweise verschiedenen Punkten $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$ und Zahlen $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ existiert eine solche Lösung $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_{\text{LG}}$ von (12.3), dass $\{z_1, \dots, z_m\}$ die Menge der Nullstellen von φ ist und

$$\text{ord}(\varphi, z_j) = n_j$$

für $j = 1, \dots, m$. Ist $(A', \varphi') \in \mathcal{D}_{\text{LG}}$ eine weitere Lösung von (12.3) mit diesen Eigenschaften, so existiert ein $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{C}, \text{U}(1))$ mit

$$(A', \varphi') = (A \cdot \sigma, \varphi \cdot \sigma).$$

Außerdem ist

$$k_{\text{W}}(A, \varphi) = \sum_{j=1}^m n_j.$$

□

Aus dem letzten Satz erhält man unmittelbar

Folgerung 12.10 Sei $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_{\text{LG}}$ eine Lösung von (12.3) mit $k_{\text{W}}(A, \varphi) = 0$. Dann existiert ein $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^2, \text{U}(1))$ mit $A \cdot \sigma \equiv 0$ und $\varphi \cdot \sigma \equiv 1$. Das heißt, jede Lösung $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_{\text{LG}}$ von (12.3) mit $k_{\text{W}}(A, \varphi) = 0$ hat die Gestalt $A = i df$ und $\varphi = e^{-if}$ für ein $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^2)$. \square

Bemerkung 12.11 (i) Für den Beweis von Satz 12.9 wird folgende Umformulierung der zweiten Gleichung von (12.3) entscheidend benutzt. Wir identifizieren \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} längs

$$(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto z = x^1 + ix^2 \in \mathbb{C}.$$

Dann ist

$$dz = dx^1 + i dx^2 \quad \text{und} \quad d\bar{z} = dx^1 - i dx^2.$$

Sei

$$A = A_1 dx^1 + A_2 dx^2$$

ein $\text{U}(1)$ -Zusammenhang auf \mathbb{R}^2 und $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. Wir setzen

$$\alpha := \frac{i}{2}(A_1 - iA_2).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha dz + \bar{\alpha} d\bar{z} &= \frac{i}{2}(A_1 - iA_2)(dx^1 + i dx^2) + \frac{i}{2}(A_1 + iA_2)(dx^1 - i dx^2) \\ &= iA_1 dx^1 + iA_2 dx^2 \\ &= iA \end{aligned}$$

und damit

$$A = -i(\alpha dz + \bar{\alpha} d\bar{z}).$$

Da

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} d\bar{z},$$

folgt

$$\begin{aligned} d^A \varphi &= d\varphi + A\varphi \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} - i(\alpha dz + \bar{\alpha} d\bar{z})\varphi \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - i\alpha\varphi \right) dz + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} - i\bar{\alpha}\varphi \right) d\bar{z}. \end{aligned}$$

Wegen

$$*dz = *(dx^1 + i dx^2) = dx^2 - i dx^1 = -i(dx^1 + i dx^2) = -i dz$$

und

$$*d\bar{z} = *(dx^1 - i dx^2) = dx^2 + i dx^1 = i(dx^1 - i dx^2) = i d\bar{z}$$

ist dann

$$\begin{aligned} d^A \varphi - i*d^A \varphi &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - i\alpha\varphi \right) dz + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} - i\bar{\alpha}\varphi \right) d\bar{z} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - i\alpha\varphi \right) dz + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} - i\bar{\alpha}\varphi \right) d\bar{z} \\ &= 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} - i\bar{\alpha}\varphi \right) d\bar{z}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$d^A \varphi = i*d^A \varphi$$

genau dann, wenn

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = i\bar{\alpha}\varphi.$$

(ii) Aus Satz 12.9 und der folgenden Überlegung erhält man eine vollständige Klassifikation aller Lösungen $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_{\text{LG}}$ von (12.4). Sei wieder

$$A = A_1 dx^1 + A_2 dx^2$$

ein $U(1)$ -Zusammenhang auf \mathbb{R}^2 und $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. Wir schreiben

$$F^A = F_{12}^A dx^1 \wedge dx^2 \quad \text{und} \quad d^A \varphi = (d^A \varphi)_1 dx^1 + (d^A \varphi)_2 dx^2 .$$

Insbesondere ist

$$(d^A \varphi)_j = \partial_j \varphi + A_j \varphi$$

für $j = 1, 2$. Dann bedeutet (12.3), dass

$$F_{12}^A = \frac{i}{2}(\langle \varphi, \varphi \rangle - 1) \quad \text{und} \quad (d^A \varphi)_1 = -i (d^A \varphi)_2 .$$

Genauso ist (12.4) zu

$$F_{12}^A = -\frac{i}{2}(\langle \varphi, \varphi \rangle - 1) \quad \text{und} \quad (d^A \varphi)_1 = i (d^A \varphi)_2$$

äquivalent. Sei $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $\Psi(x^1, x^2) := (-x^1, x^2)$ definiert. Wir setzen

$$\hat{A} := \Psi^* A \quad \text{und} \quad \hat{\varphi} := \Psi^* \varphi = \varphi \circ \Psi .$$

Dann ist

$$\hat{A} = \Psi^* (A_1 dx^1 + A_2 dx^2) = -(A_1 \circ \Psi) dx^1 + (A_2 \circ \Psi) dx^2$$

und

$$F^{\hat{A}} = \Psi^* F^A = -(F_{12}^A \circ \Psi) dx^1 \wedge dx^2 .$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} d^{\hat{A}} \hat{\varphi} &= d\hat{\varphi} + \hat{A} \hat{\varphi} \\ &= \partial_1 \hat{\varphi} dx^1 + \partial_2 \hat{\varphi} dx^2 - (A_1 \circ \Psi) \hat{\varphi} dx^1 + (A_2 \circ \Psi) \hat{\varphi} dx^2 \\ &= -((\partial_1 \varphi) \circ \Psi + (A_1 \circ \Psi)(\varphi \circ \Psi)) dx^1 + ((\partial_2 \varphi) \circ \Psi + (A_2 \circ \Psi)(\varphi \circ \Psi)) dx^2 \\ &= -((d^A \varphi)_1 \circ \Psi) dx^1 + ((d^A \varphi)_2 \circ \Psi) dx^2 . \end{aligned}$$

Folglich ist (A, φ) genau dann eine Lösung von (12.3), wenn $(\hat{A}, \hat{\varphi})$ eine Lösung von (12.4) ist. \square

Im Unterschied zu entsprechenden Aussagen für die Yang-Mills-Theorie über \mathbb{R}^4 (vgl. Bemerkung 7.25(ii)) und die Theorie der magnetischen Monopole sind die Wirbelgleichungen und deren 1. Integrale (12.3) und (12.4) äquivalent.

Satz 12.12 Sei $(A, \varphi) \in \mathcal{D}_{\text{LG}}$ eine Lösung der Wirbelgleichungen (12.1) und (12.2) mit $k_{\text{W}}(A, \varphi) \geq 0$ bzw. mit $k_{\text{W}}(A, \varphi) \leq 0$. Dann ist (A, φ) eine Lösung von (12.3) bzw. von (12.4). \square

13 Zusammenhänge auf Gebieten in \mathbb{R}^n und der Sphäre S^n

Sei G wieder eine der Lie-Gruppen $U(m)$, $SU(m)$ oder $SO(m)$ und sei \mathcal{O} eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n .

Definition 13.1 Ein G -Zusammenhang A auf \mathcal{O} besteht aus einer abzählbaren Familie $(A^i)_{i \in I}$ von Formen $A^i \in \Omega^1(U_i, \mathfrak{g})$, wobei U_i offene Teilmengen von \mathbb{R}^n mit $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathcal{O}$ sind, und glatten Abbildungen $\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ für $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ mit den folgenden Eigenschaften.

- (1) Für alle $x \in U_i$ ist $\varphi_{ii}(x) = 1$.
- (2) Für alle $x \in U_i \cap U_j$ ist $\varphi_{ij}(x) = (\varphi_{ji}(x))^{-1}$.
- (3) Für alle $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ ist $\varphi_{ij}(x) = \varphi_{ik}(x)\varphi_{kj}(x)$.
- (4) Für alle $x \in U_i \cap U_j$ und $v \in T_x\mathbb{R}^n$ gilt

$$A^i(v) = (\varphi_{ji}(x))^{-1}A^j(v)\varphi_{ji}(x) + (\varphi_{ji}(x))^{-1}d\varphi_{ji}(v).$$

Beispiel 13.2 Jeder G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^n im Sinne von Definition 3.1 ist ein G -Zusammenhang nach obiger Definition mit einelementiger Indexmenge I . Genauso ist jedes $A \in \Omega^1(\mathcal{O}, \mathfrak{g})$ ein G -Zusammenhang auf \mathcal{O} . \square

Beispiel 13.3 Sei

$$U_1 := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, x^3) : x^3 \geq 0\} \quad \text{und} \quad U_2 := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, x^3) : x^3 \leq 0\}.$$

Dann ist

$$U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

und

$$U_1 \cap U_2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : (x^1, x^2) \neq (0, 0)\}.$$

Wir definieren $\varphi_{12} : U_1 \cap U_2 \rightarrow U(1)$ durch

$$\varphi_{12}(x) := \frac{x^1 + ix^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}$$

und setzen

$$A^1 := -\frac{i}{2r(r-x^3)}(x^1 dx^2 - x^2 dx^1) \in \Omega^1(U_1, \mathfrak{u}(1)),$$

$$A^2 := \frac{i}{2r(r+x^3)}(x^1 dx^2 - x^2 dx^1) \in \Omega^1(U_2, \mathfrak{u}(1)),$$

wobei wieder

$$r := \|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}.$$

Dann ist dadurch ein $U(1)$ -Zusammenhang $A = (A^i)_{i=1,2}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} = U_1 \cup U_2$ gegeben. Um dies einzusehen, müssen wir verifizieren, dass

$$A^2 = \varphi_{12}^{-1}A^1\varphi_{12} + \varphi_{12}^{-1}d\varphi_{12}$$

auf $U_1 \cap U_2$. Es ist

$$\partial_1(\varphi_{12})(x) = \frac{-ix^2(x^1 + ix^2)}{\left((x^1)^2 + (x^2)^2\right)^{3/2}},$$

$$\partial_2(\varphi_{12})(x) = \frac{ix^1(x^1 + ix^2)}{\left((x^1)^2 + (x^2)^2\right)^{3/2}}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
\varphi_{12}^{-1}d\varphi_{12} &= \frac{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}{x^1 + ix^2} (\partial_1(\varphi_{12})dx^1 + \partial_2(\varphi_{12})dx^2) \\
&= \frac{i}{(x^1)^2 + (x^2)^2} (x^1 dx^2 - x^2 dx^1) \\
&= \frac{i}{r^2 - (x^3)^2} (x^1 dx^2 - x^2 dx^1) .
\end{aligned}$$

Hiermit schließen wir, dass

$$\begin{aligned}
\varphi_{12}^{-1}A^1\varphi_{12} + \varphi_{12}^{-1}d\varphi_{12} &= A^1 + \varphi_{12}^{-1}d\varphi_{12} \\
&= \left(\frac{i}{r^2 - (x^3)^2} - \frac{i}{2r(r - x^3)} \right) (x^1 dx^2 - x^2 dx^1) \\
&= \frac{i}{r - x^3} \left(\frac{1}{r + x^3} - \frac{1}{2r} \right) (x^1 dx^2 - x^2 dx^1) \\
&= \frac{i}{r - x^3} \frac{r - x^3}{2r(r + x^3)} (x^1 dx^2 - x^2 dx^1) \\
&= A^2 .
\end{aligned}$$

□

Den nächsten Satz geben wir ohne Beweis an. Er besagt, dass die Definitionen 3.1 und 13.1 für $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$ gleichbedeutend sind.

Satz 13.4 *Ist $A = (A^i)_{i \in I}$ ein G -Zusammenhang auf \mathbb{R}^n , so existieren eine Form $\tilde{A} \in \Omega^1(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ und zu jedem $i \in I$ eine glatte Abbildungen $\sigma_i : U_i \rightarrow G$ derart, dass*

$$A^i = \sigma_i^{-1}\tilde{A}\sigma_i + \sigma_i^{-1}d\sigma_i$$

auf U_i .

□

Definition 13.5 *Sei $A = (A^i)_{i \in I}$ ein G -Zusammenhang auf \mathcal{O} . Die **Krümmung** von A ist die Familie $F^A = (F^{A,i})_{i \in I}$ gegeben durch*

$$F^{A,i} := dA^i + \frac{1}{2} [A^i, A^i] \in \Omega^2(U_i, \mathfrak{g}) .$$

Satz 13.6 *Sei $A = (A^i)_{i \in I}$ ein G -Zusammenhang auf \mathcal{O} . Dann gilt*

$$F^{A,i}(v_1, v_2) = (\varphi_{ji}(x))^{-1}F^{A,j}(v_1, v_2)\varphi_{ji}(x)$$

für alle $x \in U_i \cap U_j$ und $v_1, v_2 \in T_x\mathbb{R}^n$.

Beweis. Man gehe wie im Beweis von Satz 4.5(i) vor.

□

Eine unmittelbare Konsequenz des letzten Satzes ist

Folgerung 13.7 *Ist $A = (A^i)_{i \in I}$ ein $U(1)$ -Zusammenhang auf \mathcal{O} , so existiert eine eindeutig bestimmte Form $F_A \in \Omega^2(\mathcal{O}, \mathfrak{u}(1))$ derart, dass*

$$F^{A,i} = F_A$$

auf U_i für alle $i \in I$.

□

Beispiel 13.8 Wir wollen jetzt die Krümmung des $U(1)$ -Zusammenhangs $A = (A^i)_{i=1,2}$ aus Beispiel 13.3 berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} F^{A,1} &= dA^1 \\ &= -\frac{i}{2} \left(\left(d \frac{1}{r(r-x^3)} \right) \wedge (x^1 dx^2 - x^2 dx^1) + \frac{2}{r(r-x^3)} dx^1 \wedge dx^2 \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d \frac{1}{r(r-x^3)} &= -\frac{1}{r^2(r-x^3)^2} d(r(r-x^3)) \\ &= -\frac{1}{r^2(r-x^3)^2} ((r-x^3) dr + r(dr-dx^3)) \\ &= \frac{x^3-2r}{r^2(r-x^3)^2} dr + \frac{1}{r(r-x^3)^2} dx^3. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} dr \wedge (x^1 dx^2 - x^2 dx^1) &= \frac{1}{r} (x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3) \wedge (x^1 dx^2 - x^2 dx^1) \\ &= \frac{1}{r} \left((r^2 - (x^3)^2) dx^1 \wedge dx^2 + x^2 x^3 dx^1 \wedge dx^3 - x^1 x^3 dx^2 \wedge dx^3 \right) \end{aligned}$$

und

$$dx^3 \wedge (x^1 dx^2 - x^2 dx^1) = x^2 dx^1 \wedge dx^3 - x^1 dx^2 \wedge dx^3.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} F^{A,1} &= -\frac{i}{2} \left(\frac{x^3-2r}{r^2(r-x^3)^2} \left((r^2 - (x^3)^2) dx^1 \wedge dx^2 + x^2 x^3 dx^1 \wedge dx^3 - x^1 x^3 dx^2 \wedge dx^3 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r(r-x^3)^2} (x^2 dx^1 \wedge dx^3 - x^1 dx^2 \wedge dx^3) + \frac{2}{r(r-x^3)} dx^1 \wedge dx^2 \right) \\ &= -\frac{i}{2} \left(\left(\frac{(x^3-2r)(r^2 - (x^3)^2)}{r^3(r-x^3)^2} + \frac{2}{r(r-x^3)} \right) dx^1 \wedge dx^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{(x^3-2r)x^3}{r^3(r-x^3)^2} + \frac{1}{r(r-x^3)^2} \right) (x^2 dx^1 \wedge dx^3 - x^1 dx^2 \wedge dx^3) \right) \\ &= \frac{i}{2r^3} (x^3 dx^1 \wedge dx^2 - x^2 dx^1 \wedge dx^3 + x^1 dx^2 \wedge dx^3). \end{aligned}$$

Die Form $F_A \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \mathfrak{u}(1))$ laut Folgerung 13.7 ist in diesem Fall also

$$F_A = \frac{i}{2r^2} * dr$$

und dies ist gerade die Form, durch die das Dirac-Monopol (vgl. Beispiel 10.3) beschrieben wird. \square

Wir wollen jetzt noch definieren, was ein G -Zusammenhang auf der Sphäre

$$S^n := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| = 1\}$$

ist. Dazu verstehen wir S^n als diejenige glatte Mannigfaltigkeit, die aus der disjunkten Vereinigung von $U_1 := \mathbb{R}^n$ und $U_2 := \mathbb{R}^n$ durch Identifikation von $U_1 \setminus \{0\}$ mit $U_2 \setminus \{0\}$ längs

$$x \in U_1 \setminus \{0\} \mapsto \Phi(x) := \frac{x}{|x|^2} \in U_2 \setminus \{0\}$$

entsteht.

Definition 13.9 Ein G -Zusammenhang auf S^n besteht aus einem Paar (A^1, A^2) von Formen $A^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ und einer glatten Abbildung $\varphi_{12} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow G$ derart, dass

$$\Phi^* A^2 = \varphi_{12}^{-1} A^1 \varphi_{12} + \varphi_{12}^{-1} d\varphi_{12}$$

auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Beispiel 13.10 Wir identifizieren wieder \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} vermöge

$$(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto z = x^1 + ix^2 \in \mathbb{C}$$

und setzen

$$A^1 := -A^2 := \frac{1}{2(1+|z|^2)} (zd\bar{z} - \bar{z}dz) \in \Omega^1(\mathbb{C}, \mathfrak{u}(1)).$$

Außerdem definieren wir $\varphi_{12} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow U(1)$ durch

$$\varphi_{12}(z) := \frac{|z|}{z}.$$

Dann ist (A^1, A^2) zusammen mit φ_{12} ein $U(1)$ -Zusammenhang auf S^2 . Dazu müssen wir zeigen, dass

$$\Phi^* A^2 = \varphi_{12}^{-1} A^1 \varphi_{12} + \varphi_{12}^{-1} d\varphi_{12}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir berechnen, dass

$$\begin{aligned} \Phi^* A^2 &= -\frac{1}{2(1+|z|^2)} \left(\frac{z}{|z|^2} d\frac{\bar{z}}{|z|^2} - \frac{\bar{z}}{|z|^2} d\frac{z}{|z|^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2(1+|z|^2)} \left(zd\frac{1}{z} - \bar{z}d\frac{1}{\bar{z}} \right) \\ &= -\frac{1}{2(1+|z|^2)} \left(-\frac{1}{z} dz + \frac{1}{\bar{z}} d\bar{z} \right) \\ &= -\frac{1}{2|z|^2(1+|z|^2)} (zd\bar{z} - \bar{z}dz) \end{aligned}$$

und

$$\varphi_{12}^{-1} d\varphi_{12} = \frac{1}{2\varphi_{12}^2} d(\varphi_{12}^2) = \frac{\bar{z}}{2z} d\frac{z}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{2z} \left(\frac{1}{\bar{z}} dz - \frac{z}{\bar{z}^2} d\bar{z} \right) = -\frac{1}{2|z|^2} (zd\bar{z} - \bar{z}dz).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \varphi_{12}^{-1} A^1 \varphi_{12} + \varphi_{12}^{-1} d\varphi_{12} &= A^1 + \varphi_{12}^{-1} d\varphi_{12} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+|z|^2} - \frac{1}{|z|^2} \right) (zd\bar{z} - \bar{z}dz) \\ &= -\frac{1}{2|z|^2(1+|z|^2)} (zd\bar{z} - \bar{z}dz) \\ &= \Phi^* A^2. \end{aligned}$$

□

Definition 13.11 Sei $A = (A^1, A^2)$ ein G -Zusammenhang auf S^n . Die **Krümmung** von A ist das Paar $F^A = (F^{A,1}, F^{A,2})$ mit

$$F^{A,i} := dA^i + \frac{1}{2} [A^i, A^i] \in \Omega^2(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g}).$$

Satz 13.12 Sei $A = (A^1, A^2)$ ein G -Zusammenhang auf S^n . Dann gilt

$$\Phi^* F^{A,2} = \varphi_{12}^{-1} F^{A,1} \varphi_{12}$$

auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Beweis. Man verfähre wiederum analog zum Beweis von Satz 4.5(i). □

Beispiel 13.13 Für die Krümmung des $U(1)$ -Zusammenhangs $A = (A^1, A^2)$ auf S^2 aus Beispiel 13.10 haben wir

$$\begin{aligned} F^{A,1} &= dA^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(d \frac{1}{1+|z|^2} \right) \wedge (zd\bar{z} - \bar{z}dz) + \frac{2}{1+|z|^2} dz \wedge d\bar{z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{(1+|z|^2)^2} (zd\bar{z} + \bar{z}dz) \wedge (zd\bar{z} - \bar{z}dz) + \frac{2}{1+|z|^2} dz \wedge d\bar{z} \right) \\ &= -\frac{|z|^2}{(1+|z|^2)^2} dz \wedge d\bar{z} + \frac{1}{1+|z|^2} dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{1}{(1+|z|^2)^2} dz \wedge d\bar{z} \\ &= -\frac{2i}{(1+|x|^2)^2} dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

und folglich

$$F^{A,2} = \frac{2i}{(1+|x|^2)^2} dx^1 \wedge dx^2 .$$

□

Literatur

- [1] M.F. Atiyah: Geometry of Yang-Mills fields. *Lezioni Fermiane. Pisa: Accademia Nazionale dei Lincei. Scuola Normale Superiore (1979)*
- [2] M.F. Atiyah, V.G. Drinfeld, N.J. Hitchin, Y.I. Manin: Construction of instantons. *Phys. Lett. 65A, 185–187 (1978)*
- [3] A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz, Y. Tyupkin: Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations. *Phys. Lett. 59B, 85–87 (1975)*
- [4] L. Sadun, J. Segert: Non-self-dual Yang-Mills connections with quadrupole symmetry. *Commun. Math. Phys. 145, 363–391 (1992)*
- [5] L.M. Sibner, R.J. Sibner, K. Uhlenbeck: Solutions to Yang-Mills equations that are not self-dual, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA 86, 8610–8613 (1989)*