

Liesche Gruppen und homogene Räume

Lutz Habermann

Einführung

Liesche Gruppen¹ treten typischerweise als Symmetriegruppen auf, d.h. als Gruppen von Abbildungen, unter denen ein Objekt oder eine Eigenschaft erhalten bleibt.

Beispiel 0.1 Wir betrachten das Rechteck $R := [-2, 2] \times [-1, 1]$ in $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Die Menge G_R aller längentreuen linearen Abbildungen, also orthogonalen Transformationen $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $A(R) = R$ besitzt genau 4 Elemente, nämlich:

- die Identität id ,
- $-\text{id}$, was geometrisch sowohl die Spiegelung am Nullpunkt als auch die Drehung um π ist,
- die Spiegelung S_x an der x -Achse und
- die Spiegelung S_y an der y -Achse.

Dabei gilt

$$\begin{aligned}S_x \circ S_x &= S_y \circ S_y = \text{id} , \\S_x \circ S_y &= S_y \circ S_x = -\text{id} , \\S_x \circ (-\text{id}) &= -\text{id} \circ S_x = S_y , \\S_y \circ (-\text{id}) &= -\text{id} \circ S_y = S_x .\end{aligned}$$

Demnach ist G_R eine endliche abelsche Gruppe und durch

$$\varphi(\text{id}) := (0, 0) , \quad \varphi(-\text{id}) := (1, 1) , \quad \varphi(S_x) := (1, 0) , \quad \varphi(S_y) := (0, 1)$$

ist ein Isomorphismus $\varphi : G_R \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ definiert.

Die Gestalt der Symmetriegruppe eines geometrischen Objektes hängt natürlich auch davon ab, was für Abbildungen man zulässt. Schränkt man sich z.B. auf die orientierungserhaltenden orthogonalen Transformationen ein, so bleiben als Symmetrien nur id und $-\text{id}$ übrig. Sucht man hingegen allgemeine lineare Abbildungen $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $A(R) = R$, so findet man auch die Abbildung

$$A(x, y) := (2y, x/2)$$

als eine solche Symmetrie. □

Beispiel 0.2 Sei Q das Quadrat $[-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Die Gruppe G_Q aller orthogonalen Transformationen $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $A(Q) = Q$ ist

$$\{\text{id}, -\text{id}, D_{\pi/2}, D_{3\pi/2}, S_x, S_y, S_+, S_-\} ,$$

wobei $D_{\pi/2}$ und $D_{3\pi/2}$ die Drehungen um $\pi/2$ bzw. $3\pi/2$ sind und S_+ und S_- die Spiegelungen an $x = y$ bzw. $x = -y$ bezeichnen. Damit gilt $G_R \subsetneq G_Q$. Außerdem ist, im Gegensatz zur Situation für das Rechteck R , jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $A(Q) = Q$ ein Element von G_Q . □

¹benannt nach dem norwegischen Mathematiker Sophus Lie (1842-1899)

Die Gruppen G_R und G_Q sind Beispiele für **diskrete**, d.h. nulldimensionale Liesche Gruppen. Wir interessieren uns hier aber vor allem für **kontinuierliche** Gruppen, also Gruppen, deren Elemente stetige Scharen bilden. Auch solche Gruppen können als Symmetriegruppen von geometrischen Objekten auftreten.

Beispiel 0.3 Wir betrachten die n -dimensionale Sphäre

$$S^n := \{ \xi \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\xi\| = 1 \} .$$

Die Menge aller linearen Abbildungen $A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit $A(S^n) = S^n$ ist die Gruppe aller orthogonalen Transformationen von \mathbb{R}^{n+1} . Diese Gruppe hat die Dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. \square

Im Folgenden sollen weitere Beispiele für Liesche Gruppen angegeben werden. Dazu verstehen wir die Menge der linearen Abbildungen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ als den Vektorraum $M(n, \mathbb{R})$ der reellen $n \times n$ -Matrizen. Die **allgemeine lineare** Gruppe ist dann

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) := \{ A \in M(n, \mathbb{R}) : \det(A) \neq 0 \} .$$

Deren Untergruppe

$$\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R}) := \{ A \in M(n, \mathbb{R}) : \det(A) > 0 \}$$

ist die Gruppe der orientierungserhaltenden linearen Transformation von \mathbb{R}^n . Die **spezielle lineare** Gruppe ist

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) := \{ A \in M(n, \mathbb{R}) : \det(A) = 1 \} .$$

Die letzte Gruppe kann auch folgendermaßen beschrieben werden. Ist $\{ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \}$ eine Basis von \mathbb{R}^n , so sei $P(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \subset \mathbb{R}^n$ das von $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ aufgespannte Parallelepipid. Dann ist $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ die Gruppe aller orientierungserhaltenden linearen Transformationen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\mathrm{vol}(P(A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_n)) = \mathrm{vol}(P(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n))$$

für alle Basen $\{ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \}$ von \mathbb{R}^n . Die **orthogonale** Gruppe ist

$$\mathrm{O}(n) := \{ A \in M(n, \mathbb{R}) : A^T A = \mathbf{1}_n \} .$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{1}_n$ die $n \times n$ -Einheitsmatrix. Bekanntlich ist $\mathrm{O}(n)$ die Gruppe der orthogonalen Transformationen von \mathbb{R}^n , d.h. die Gruppe aller linearen Abbildungen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das übliche Skalarprodukt in \mathbb{R}^n ist. Die Gruppe der orientierungserhaltenden orthogonalen Transformationen ist die **spezielle orthogonale** Gruppe

$$\mathrm{SO}(n) := \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) .$$

Alle oben angegebenen Gruppen sind Beispiele für Liesche Gruppen. Dabei ist

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) &= \dim \mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R}) = n^2 , \\ \dim \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) &= n^2 - 1 , \\ \dim \mathrm{O}(n) &= \dim \mathrm{SO}(n) = \frac{n(n-1)}{2} . \end{aligned}$$

Neben Lieschen Gruppen endlicher Dimension betrachtet man auch unendlichdimensionale Liesche Gruppen. Wichtige Beispiele dafür sind die Gruppe aller Diffeomorphismen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit oder Gruppen von Eichtransformationen, wie sie in der Physik auftreten. Solche Gruppen sollen hier aber keine Rolle spielen.

Wenden wir uns nun der Frage zu, was man sich unter einem homogenen Raum vorstellen kann. Die Bezeichnung legt nahe, dass es sich dabei um ein Gebilde (genauer eine differenzierbare Mannigfaltigkeit) handelt, dass in jedem Punkt gleichartig aussieht. Offensichtlich ist die Sphäre S^n ein solcher Raum. Die Homogenität von S^n kann man wie folgt sehen. Sind ξ_1, ξ_2 zwei Punkte auf S^n , so gibt es ein $A \in O(n+1)$ (d.h. eine lineare Transformation von \mathbb{R}^{n+1} mit $A(S^n) = S^n$) derart, dass $\xi_2 = A\xi_1$.

Um den Begriff der Homogenität allgemein zu fassen, benötigen wir die folgende Definition.

Definition 0.4 Sei M eine nichtleere Menge, sei G eine Gruppe und bezeichne e das neutrale Element von G . Eine **G -Wirkung** auf M ist eine Abbildung

$$(g, p) \in G \times M \mapsto gp \in M$$

derart, dass

- (a) $ep = p$ für alle $p \in M$ und
- (b) $(gh)p = g(hp)$ für alle $g, h \in G$ und $p \in M$.

Man sagt dann auch, dass die Gruppe G auf M **wirkt** bzw. **operiert**. Eine G -Wirkung auf M heißt **transitiv** : \iff Für alle $p, q \in M$ existiert ein $g \in G$ mit $q = gp$.

Ist G eine Liesche Gruppe und M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und operiert G transitiv und glatt auf M , so nennt man das Paar (M, G) , zusammen mit der G -Wirkung auf M , einen **homogenen Raum** oder auch **Kleinschen Raum**.

Beispiel 0.5 Offensichtlich operieren G_R, G_Q und $O(n+1)$ auf R, Q bzw. S^n . Die ersten beiden Wirkungen sind nicht transitiv. Dagegen ist $(S^n, O(n+1))$ ein homogener Raum. \square

Beispiel 0.6 Die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ wirkt in üblicher Weise auf \mathbb{R}^n . Diese Wirkung ist nicht transitiv, denn für alle $A \in GL(n, \mathbb{R})$ ist $A0 = 0$. Die Wirkung von $GL(n, \mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist dagegen transitiv. \square

Beispiel 0.7 Die affine Gruppe von \mathbb{R}^n ist $\text{Aff}(n, \mathbb{R}) := GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$. Dabei entspricht $(A, \mathbf{v}) \in \text{Aff}(n, \mathbb{R})$ der affinen Transformation

$$\xi \in \mathbb{R}^n \mapsto A\xi + \mathbf{v}.$$

Die Multiplikation in $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ ist nun gerade so festgelegt, dass man eine $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ -Wirkung auf \mathbb{R}^n erhält. Sind also $(A, \mathbf{v}), (B, \mathbf{w}) \in \text{Aff}(n, \mathbb{R})$ und ist $(C, \mathbf{u}) = (A, \mathbf{v}) \cdot (B, \mathbf{w})$, so soll

$$A(B\xi + \mathbf{w}) + \mathbf{v} = C\xi + \mathbf{u}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gelten. Folglich ist

$$(A, \mathbf{v}) \cdot (B, \mathbf{w}) = (AB, A\mathbf{w} + \mathbf{v}).$$

Wie man sofort sieht, wirkt $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ transitiv auf \mathbb{R}^n . Das Gleiche gilt für die Untergruppe $O(n) \times \mathbb{R}^n \subset \text{Aff}(n, \mathbb{R})$ der euklidischen Transformationen des \mathbb{R}^n . Betten wir $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ längs

$$(A, \mathbf{v}) \mapsto \begin{pmatrix} A & \mathbf{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in $GL(n+1, \mathbb{R})$ ein und identifizieren wir $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit dem Spaltenvektor $\begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$, so sind die Multiplikation in $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ und die Wirkung von $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ auf \mathbb{R}^n durch die Multiplikation von Matrizen gegeben. \square

Beispiel 0.8 Die **Galilei-Gruppe** ist die Untergruppe von $GL(5, \mathbb{R})$, die aus allen Matrizen der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ \mathbf{v} & D & \mathbf{w} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Spaltenvektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$ und $D \in SO(3)$ besteht. Diese Gruppe wirkt durch

$$A(t, \xi) := (t + a, D\xi + t\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

auf der nichtrelativistischen Raumzeit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Wegen $A(0, 0) = (a, \mathbf{w})$ ist diese Wirkung auch transitiv. \square

Nach dem **Kleinschen Erlanger Programm**² ist eine Geometrie nichts anderes als ein homogener Raum. Die zu untersuchenden geometrischen Eigenschaften sind dann gerade solche, die unter der Gruppenwirkung invariant bleiben. Zum Beispiel sind die homogenen Räume $(\mathbb{R}^n, \text{Aff}(n, \mathbb{R}))$, $(\mathbb{R}^n, O(n) \times \mathbb{R}^n)$ und $(S^n, O(n+1))$ die affine, euklidische bzw. sphärische Geometrie. Analog kann man die projektive, hyperbolische, konforme und symplektische Geometrie beschreiben.

Für viele Überlegungen ist die konkrete Realisierung der Mannigfaltigkeit M nicht von Bedeutung. Tatsächlich kann man M allein aus der Gruppenwirkung reproduzieren. Sei dazu (M, G) ein homogener Raum und sei $o \in M$ fixiert. Wir setzen

$$H := \{g \in G : go = o\}.$$

Man sieht leicht, dass H eine abgeschlossene Untergruppe von G ist. Sei G/H der Faktorraum von G nach der Untergruppe H . Die Elemente von G/H schreiben wir als $[g]$ mit $g \in G$. Dabei gilt $[g_1] = [g_2]$ genau dann, wenn es ein $h \in H$ mit $g_2 = g_1 h$ gibt. Folglich ist

$$[g] \in G/H \mapsto go \in M$$

eine wohldefinierte Bijektion. Weiter kann man G/H so mit einer Differentialstruktur versehen, dass diese Abbildung sogar ein Diffeomorphismus ist.

Ein weiterer zentraler Begriff dieser Vorlesung wird der Begriff der Lie-Algebra sein. Eine Lie-Algebra ist, im Gegensatz zur Lieschen Gruppe, ein rein algebraisches Objekt. Zur Motivation dieses Begriffes betrachten wir einen echten linearen Unterraum $\mathfrak{g} \subset M(n, \mathbb{R})$. Sind $X, Y \in \mathfrak{g}$, so gilt i.Allg. nicht $XY \in \mathfrak{g}$. Ist z.B. \mathfrak{g} die Menge aller schiefssymmetrischen $n \times n$ -Matrizen, also aller $X \in \mathfrak{g}$ mit $X^T = -X$, und sind $X, Y \in \mathfrak{g}$, so gilt

$$(XY)^T = Y^T X^T = YX.$$

Ist also $XY \neq -YX$, so ist $XY \notin \mathfrak{g}$. Statt des Produktes XY kann man aber den Kommutator $[X, Y] := XY - YX$ nutzen. Hier hätte man jetzt

$$[X, Y]^T = Y^T X^T - X^T Y^T = YX - XY = -[X, Y],$$

d.h. $[X, Y] \in \mathfrak{g}$. Allgemein ist eine Lie-Algebra ein Vektorraum \mathfrak{g} mit einer bilinearen Abbildung $(X, Y) \in \mathfrak{g}^2 \mapsto [X, Y] \in \mathfrak{g}$, die gewissen Bedingungen genügt. Beispiele für Unterräume von $M(n, \mathbb{R})$, die zusammen mit dem Kommutator $[X, Y] := XY - YX$ eine Lie-Algebra bilden, sind

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) &:= M(n, \mathbb{R}), \\ \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) &:= \{X \in M(n, \mathbb{R}) : \text{Tr}(X) = 0\}, \\ \mathfrak{o}(n) &:= \{X \in M(n, \mathbb{R}) : X^T = -X\}. \end{aligned}$$

Wir geben jetzt noch ein einfaches Beispiel dafür an, wie in der Quantenphysik in natürlicher Weise Lie-Algebren auftreten.

²1872 hielt Felix Klein (1849-1925) seine Antrittsvorlesung in Erlangen. Diese wurde unter dem Titel „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen“ veröffentlicht. Die darin formulierten Ideen zur Systematisierung von Geometrien werden heute als Kleinsches Erlanger Programm bezeichnet.

Beispiel 0.9 Seien a_p^\dagger und a_n^\dagger die Erzeugungsoperatoren für ein Proton bzw. ein Neutron und seien a_p und a_n die entsprechenden Vernichtungsoperatoren. Für die Kommutatoren dieser Operatoren wird vorausgesetzt, dass

$$\begin{aligned} [a_p, a_p^\dagger] &= [a_n, a_n^\dagger] = \text{id} , \\ [a_p, a_n^\dagger] &= [a_n, a_p^\dagger] = 0 , \\ [a_p, a_n] &= [a_p^\dagger, a_n^\dagger] = 0 . \end{aligned}$$

Sei \mathfrak{g} der von den Produkten $a_p^\dagger a_n$, $a_n^\dagger a_p$, $a_p^\dagger a_p$ und $a_n^\dagger a_n$ erzeugte Vektorraum. Dann wird \mathfrak{g} auch von den Operatoren

$$B := a_p^\dagger a_p + a_n^\dagger a_n , \quad \tau_+ := a_p^\dagger a_n , \quad \tau_- := a_n^\dagger a_p , \quad \tau_0 := a_p^\dagger a_p - a_n^\dagger a_n$$

erzeugt. Hierbei ist B der so genannte **Teilchenzahloperator**. Wir wollen einsehen, dass \mathfrak{g} zusammen mit dem Kommutator von Operatoren eine Lie-Algebra ist. Zunächst ist

$$[B, a_p^\dagger] = a_p^\dagger a_p a_p^\dagger + a_n^\dagger a_n a_p^\dagger - a_p^\dagger a_p^\dagger a_p - a_p^\dagger a_n^\dagger a_n = a_p^\dagger [a_p, a_p^\dagger] = a_p^\dagger .$$

Genauso sieht man

$$[B, a_n^\dagger] = a_n^\dagger , \quad [B, a_p] = -a_p , \quad [B, a_n] = -a_n .$$

Folglich ist

$$[B, a_p^\dagger a_n] = B a_p^\dagger a_n - a_p^\dagger B a_n + a_p^\dagger B a_n - a_p^\dagger a_n B = [B, a_p^\dagger] a_n + a_p^\dagger [B, a_n] = a_p^\dagger a_n - a_p^\dagger a_n = 0$$

und analog

$$[B, a_n^\dagger a_p] = [B, a_p^\dagger a_p] = [B, a_n^\dagger a_n] = 0 .$$

Damit gilt

$$[B, \tau_+] = [B, \tau_-] = [B, \tau_0] = 0 .$$

Des Weiteren ist

$$\begin{aligned} [\tau_0, \tau_+] &= a_p^\dagger a_p a_p^\dagger a_n - a_n^\dagger a_n a_p^\dagger a_n - a_p^\dagger a_n a_p^\dagger a_p + a_p^\dagger a_n a_n^\dagger a_n \\ &= a_p^\dagger a_n a_p a_p^\dagger - a_n^\dagger a_n a_p^\dagger a_n - a_p^\dagger a_n a_p^\dagger a_p + a_n a_n^\dagger a_p^\dagger a_n \\ &= a_p^\dagger a_n [a_p, a_p^\dagger] + [a_n, a_n^\dagger] a_p^\dagger a_n \\ &= 2\tau_+ , \\ [\tau_0, \tau_-] &= a_p^\dagger a_p a_n^\dagger a_p - a_n^\dagger a_n a_n^\dagger a_p - a_n^\dagger a_p a_p^\dagger a_p + a_n^\dagger a_p a_n^\dagger a_n \\ &= a_p^\dagger a_p a_n^\dagger a_p - a_n^\dagger a_p a_n a_n^\dagger - a_p a_p^\dagger a_n^\dagger a_p + a_n^\dagger a_p a_n^\dagger a_n \\ &= -[a_p, a_p^\dagger] a_n^\dagger a_p - a_n^\dagger a_p [a_n, a_n^\dagger] \\ &= -2\tau_- , \\ [\tau_+, \tau_-] &= a_p^\dagger a_n a_n^\dagger a_p - a_n^\dagger a_p a_p^\dagger a_n \\ &= a_p^\dagger a_n a_n^\dagger a_p - a_p^\dagger a_n^\dagger a_n a_p - a_n^\dagger a_p a_p^\dagger a_n + a_n^\dagger a_p^\dagger a_p a_n \\ &= a_p^\dagger [a_n, a_n^\dagger] a_p - a_n^\dagger [a_p, a_p^\dagger] a_n \\ &= \tau_0 . \end{aligned}$$

Also ist \mathfrak{g} tatsächlich eine Lie-Algebra. Außerdem sehen wir, dass τ_+ , τ_- und τ_0 eine Unter algebra von \mathfrak{g} aufspannen. Diese Unter algebra ist zur Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ isomorph. Für die Erzeugenden

$$X_+ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad X_- := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad X_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ haben wir nämlich die Relationen

$$[X_0, X_+] = 2X_+ , \quad [X_0, X_-] = -2X_- , \quad [X_+, X_-] = X_0 .$$

□

Zwischen Lieschen Gruppen und Lie-Algebren besteht ein enger Zusammenhang. So ist jeder Lieschen Gruppe genau eine Lie-Algebra zugeordnet. Zum Beispiel ist $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ die Lie-Algebra von $GL(n, \mathbb{R})$ und $GL_+(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ die Lie-Algebra von $SL(n, \mathbb{R})$ und $\mathfrak{o}(n)$ die Lie-Algebra von $O(n)$ und $SO(n)$. Umgekehrt gibt es zu jeder Lie-Algebra \mathfrak{g} bis auf Isomorphie genau eine einfach zusammenhängende Liesche Gruppe G , deren Lie-Algebra \mathfrak{g} ist.

1 Liesche Gruppen: Grundlegendes und Beispiele

In dieser Vorlesung verstehen wir unter einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit einen Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis und mit einem maximalen C^∞ -Atlas. Mit „glatt“ ist stets „von der Klasse C^∞ “ gemeint.

Definition 1.1 Eine Gruppe G heißt **Liesche Gruppe** $:\Leftrightarrow G$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und die Abbildungen $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ und $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ sind differenzierbar.

Bemerkung 1.2 Die Glattheit von $(g, h) \mapsto gh$ und $g \mapsto g^{-1}$ ist zur Glattheit von $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ äquivalent. \square

Definition 1.3 Sei G eine Liesche Gruppe und sei $g \in G$. Dann heißen die Abbildungen

$$L_g : a \in G \mapsto ga \in G, \quad R_g : a \in G \mapsto ag \in G \quad \text{und} \quad \alpha_g : a \in G \mapsto gag^{-1} \in G$$

Linkstranslation, Rechtstranslation bzw. innerer Automorphismus zu g .

Nach Definition 1.1 sind die Abbildungen L_g, R_g und α_g glatt. Offensichtlich ist $\alpha_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$. Bezeichne e das Einselement von G .

Satz 1.4 Für alle $g, h \in G$ gilt:

- (i) $L_{gh} = L_g \circ L_h, R_{gh} = R_h \circ R_g, \alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$.
- (ii) $L_{g^{-1}} = L_g^{-1}, R_{g^{-1}} = R_g^{-1}, \alpha_{g^{-1}} = \alpha_g^{-1}$.
- (iii) $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$.

Beweis. (i) Es ist

$$\alpha_{gh}(a) = gha(gh)^{-1} = ghah^{-1}g^{-1} = \alpha_g(hah^{-1}) = \alpha_g(\alpha_h(a)).$$

Die beiden anderen Gleichungen zeigt man genauso.

(ii) Das folgt aus (i) und $L_e = R_e = \alpha_e = \text{id}_G$.

(iii) Das ist gerade die Assoziativität der Gruppenoperation. \square

Folglich sind L_g, R_g und α_g Diffeomorphismen.

Beispiel 1.5 Jeder endlichdimensionale Vektorraum E ist mit der Operation

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in E \times E \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{w} \in E$$

eine abelsche Liesche Gruppe. \square

Beispiel 1.6 Jede Gruppe versehen mit der diskreten Topologie ist eine nulldimensionale Liesche Gruppe. \square

Beispiel 1.7 Sei $T^m := \mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m$, d.h. $T^m := \mathbb{R}^m / \sim$, wobei die Äquivalenzrelation \sim auf \mathbb{R}^m dadurch definiert ist, dass $\xi \sim \xi'$ genau dann gilt, wenn $\xi - \xi' \in \mathbb{Z}^m$. Sei T^m mit der Quotiententopologie versehen. Wir geben T^m wie folgt eine differenzierbare Struktur. Sei $V = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_m, b_m)$ mit $b_i - a_i \leq 1$ und sei $\psi : V \rightarrow T^m$ durch $\psi(\xi) := [\xi]$ gegeben. Dabei bezeichnet $[\xi]$ die Äquivalenzklasse von ξ . Dann ist (U, x) mit $U := \psi(V)$ und $x := \psi^{-1} : U \rightarrow V$ eine Karte von T^m .

Sind (U_1, x_1) und (U_2, x_2) zwei solche Karten und ist $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, so existiert zu jeder Zusammenhangskomponente V_0 von $x_2(U_1 \cap U_2)$ ein $\zeta \in \mathbb{Z}^m$ mit

$$x_1 \circ x_2^{-1}(\xi) = \xi + \zeta \quad \text{für alle } \xi \in V_0 .$$

Folglich bilden diese Karten einen C^∞ -Atlas von T^m . Indem wir T^m mit der Operation

$$([\xi], [\xi']) \in T^m \times T^m \mapsto [\xi + \xi'] \in T^m$$

versehen, erhalten wir eine abelsche Liesche Gruppe. Diese Gruppe wird **m -dimensionaler Torus** genannt. \square

Sei $M(n, \mathbb{K})$ der Raum der $n \times n$ -Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Wir identifizieren $M(n, \mathbb{K})$ mit \mathbb{R}^{n^2} bzw. \mathbb{R}^{2n^2} . Dann ist die **allgemeine lineare Gruppe**

$$\text{GL}(n, \mathbb{K}) := \{M(n, \mathbb{K}) : \det(A) \neq 0\}$$

als offene Teilmenge von $M(n, \mathbb{K})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Satz 1.8 $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ ist eine Liesche Gruppe.

Beweis. Zu zeigen ist, dass die Abbildungen $(A, B) \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \times \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mapsto AB \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ und $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mapsto A^{-1} \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ glatt sind. Für die erste Abbildung ist das sofort klar. Für die zweite Abbildung folgt das mittels Cramerscher Regel. \square

Folgerung 1.9 Für jeden endlichdimensionalen Vektorraum E ist die Gruppe $\text{GL}(E)$ der invertierbaren Endomorphismen von E eine Liesche Gruppe. \square

Folgerung 1.10 Die affine Gruppe von E , d.h. $\text{Aff}(E) := \text{GL}(E) \times E$ mit der Multiplikation

$$(A, \mathbf{v}) \cdot (B, \mathbf{w}) := (AB, A\mathbf{w} + \mathbf{v})$$

ist eine Liesche Gruppe. \square

Bevor wir das nächste Beispiel angeben, erinnern wir an die folgenden Sachverhalte.

Definition 1.11 Sei M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei $k \in \{0, \dots, m\}$. Eine Teilmenge M_0 von M heißt **k -dimensionale Untermannigfaltigkeit** von M : \iff Zu jedem $p_0 \in M_0$ existiert eine Karte (U, x) von M um p_0 mit der Eigenschaft, dass

$$x(U \cap M_0) = x(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) .$$

Satz 1.12 Sei M_0 eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M und sei M_0 mit der Relativtopologie versehen. Ist (U, x) wie in Definition 1.11, so ist $(U \cap M_0, (x^1, \dots, x^k))$ eine Karte von M_0 . Das System aller dieser Karten ist ein C^∞ -Atlas von M . \square

Eine Untermannigfaltigkeit einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist also selbst eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Satz 1.13 Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n , sei $m \geq n$, sei $\Phi \in C^\infty(M, N)$, sei $q_0 \in N$ fixiert und sei $M_0 := \{p \in M : \Phi(p) = q_0\} \neq \emptyset$. Gilt $\text{rang}(D\Phi|_p) = n$ für alle $p \in M_0$, so ist M_0 eine $(m - n)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M . Außerdem ist

$$T_p M_0 = \{\mathbf{v} \in T_p M : D\Phi|_p(\mathbf{v}) = 0\} .$$

\square

Satz 1.14 Seien M_0 und N_0 Untermannigfaltigkeiten von M bzw. N und sei $\Phi \in C^\infty(M, N)$ derart, dass $\Phi(M_0) \subset N_0$. Dann ist $\Phi_0 := \Phi|_{M_0} \in C^\infty(M_0, N_0)$ für alle $p \in M_0$ gilt $D\Phi_0|_p = D\Phi|_p$.

Beweis. Dass Φ_0 glatt ist, leitet man einfach aus Definition 1.11 und Satz 1.12 ab. Auch der zweite Teil der Behauptung ist leicht zu sehen. Ist nämlich $\mathbf{v} \in TM_0$ und ist γ eine glatte Kurve auf M_0 mit $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$, so gilt

$$D\Phi_0|_p(\mathbf{v}) = (\Phi_0 \circ \gamma)'(0) = (\Phi \circ \gamma)'(0) = D\Phi|_p(\mathbf{v}) .$$

□

Beispiel 1.15 Wir zeigen, dass die **spezielle lineare Gruppe**

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in M(n, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$$

eine Liesche Gruppe ist. Sei $\Phi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\Phi(A) := \det(A)$ definiert. Da $\det(A) = \det(a_1, \dots, a_n)$ eine n -lineare Abbildung in den Spalten a_1, \dots, a_n von A ist, ist Φ glatt und

$$D\Phi|_A(B) = \det(b_1, a_2, \dots, a_n) + \det(a_1, b_2, a_3, \dots, a_n) + \dots + \det(a_1, \dots, a_{n-1}, b_n) ,$$

wobei b_1, \dots, b_n die Spalten von $B \in M(n, \mathbb{R}) \cong T_A \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sind. Insbesondere ist

$$D\Phi|_A(A) = n \det(A) .$$

Für alle $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist folglich $D\Phi|_A(A) \neq 0$ und somit $\mathrm{rang}(D\Phi|_A) = 1$. Das impliziert nach Satz 1.13, dass $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist. Weiter erhält man mittels Satz 1.14, dass die Abbildungen $(A, B) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \mapsto AB \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ und $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \mapsto A^{-1} \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ glatt sind. Also ist $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ tatsächlich eine Liesche Gruppe und $\dim \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$.

Analog zeigt man, dass $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ eine Liesche Gruppe der (reellen) Dimension $2(n^2 - 1)$ ist. □

Bezeichne $\mathbf{1}_n$ die Einheitsmatrix in $M(n, \mathbb{K})$.

Beispiel 1.16 Die **orthogonale Gruppe**

$$\mathrm{O}(n) := \{A \in M(n, \mathbb{R}) : A^T A = \mathbf{1}_n\} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

ist eine Liesche Gruppe. Um dies einzusehen, betrachten wir die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow S(n, \mathbb{R}) , \quad \Phi(A) := A^T A ,$$

wobei $S(n, \mathbb{R})$ der Raum der symmetrischen reellen $n \times n$ -Matrizen ist, d.h.

$$S(n, \mathbb{R}) := \{B \in M(n, \mathbb{R}) : B^T = B\} .$$

Für $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $B \in M(n, \mathbb{R})$ gilt

$$D\Phi|_A(B) = B^T A + A^T B .$$

Ist also $A \in \mathrm{O}(n)$, so ist

$$D\Phi|_A(AB) = B^T + B = 2B \quad \text{für } B \in S(n, \mathbb{R})$$

und somit $D\Phi|_A : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow S(n, \mathbb{R})$ surjektiv. Mit den Sätzen 1.13 und 1.14 folgt nun die gewünschte Aussage. Wegen $\dim S(n, \mathbb{R}) = (n^2 + n)/2$ gilt

$$\dim \mathrm{O}(n) = n^2 - \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} .$$

Außerdem ist die **spezielle orthogonale Gruppe** $\mathrm{SO}(n) := \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ als eine Untergruppe und Zusammenhangskomponente von $\mathrm{O}(n)$ ebenfalls eine Liesche Gruppe und $\dim \mathrm{SO}(n) = \dim \mathrm{O}(n) = n(n-1)/2$. □

Beispiel 1.17 Die unitäre Gruppe

$$U(n) := \{A \in M(n, \mathbb{C}) : \bar{A}^T A = \mathbf{1}_n\} \subset GL(n, \mathbb{C})$$

ist eine Liesche Gruppe. Zum Beweis betrachte man hier die Abbildung

$$\Phi : M(n, \mathbb{C}) \rightarrow H(n), \quad \Phi(A) := \bar{A}^T A,$$

und verfähre wie in den Beispielen 1.15 und 1.16. Dabei ist $H(n)$ der reelle Vektorraum der hermiteschen $n \times n$ -Matrizen, d.h.

$$H(n) := \{B \in M(n, \mathbb{C}) : \bar{B}^T = B\}.$$

Da $\dim H(n) = n^2$, ist $\dim U(n) = n^2$. Offenbar ist $U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. □

Genauso kann man zeigen, dass die **spezielle unitäre Gruppe** $SU(n) := U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$, die **symplektische Gruppe** $Sp(n, \mathbb{R}) := \{A \in M(2n, \mathbb{R}) : A^T \mathbf{J}_n A = \mathbf{J}_n\}$, wobei

$$\mathbf{J}_n := \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} \in GL(2n, \mathbb{R}),$$

die **pseudoorthogonale Gruppe** $O(m, k) := \{A \in M(m+k, \mathbb{R}) : A^T \mathbf{I}_{m,k} A = \mathbf{I}_{m,k}\}$, wobei

$$\mathbf{I}_{m,k} := \begin{pmatrix} \mathbf{1}_m & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_k \end{pmatrix} \in GL(m+k, \mathbb{R}),$$

und die **spezielle pseudoorthogonale Gruppe** $SO(m, k) := O(m, k) \cap SL(m+k, \mathbb{R})$ Liesche Gruppen sind. Dabei gilt

$$\begin{aligned} \dim SU(n) &= \dim U(n) - 1 = n^2 - 1, \\ \dim Sp(n, \mathbb{R}) &= 2n^2 + n, \\ \dim SO(m, k) &= \dim O(m, k) = \frac{(m+k)(m+k-1)}{2}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $O(n, 0) = O(0, n) = O(n)$ und entsprechend $SO(n, 0) = SO(0, n) = SO(n)$. Die Gruppe $O(3, 1)$ wird auch **Lorentz-Gruppe** genannt.

Bemerkung 1.18 Die Gruppen T^m , $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{K})$, $U(n)$, $SO(n)$, $SU(n)$ und $Sp(n, \mathbb{R})$ sind zusammenhängend. Die Gruppen $GL(n, \mathbb{R})$ und $O(n)$ haben genau zwei Zusammenhangskomponenten. Ist $m, k \geq 1$, so besitzt $O(m, k)$ genau vier und $SO(m, k)$ genau zwei Zusammenhangskomponenten. Die Gruppen T^m , $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ und $SU(n)$ sind kompakt. Dagegen sind $GL(n, \mathbb{K})$, $SL(n, \mathbb{K})$ und $Sp(n, \mathbb{R})$ nicht kompakt. Das Gleiche gilt für $O(m, k)$ und $SO(m, k)$ mit $m, k \geq 1$. □

Wir wollen die Gruppen $SU(2)$ und $SL(2, \mathbb{R})$ noch etwas genauer betrachten.

Satz 1.19 *Es ist*

$$SU(2) := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} : z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ und } |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}.$$

Inbesondere ist $SU(2)$ diffeomorph zur dreidimensionalen Sphäre S^3 .

Beweis. Sei

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{pmatrix} \in SU(2).$$

Die Bedingung $A \in U(2)$ besagt, dass die Spalten von A eine Orthonormalbasis von \mathbb{C}^2 bezüglich des üblichen Skalarproduktes bilden. Folglich gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ mit

$$\begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix}.$$

Da außerdem $\det(A) = 1$, ist $z = 1$. □

Satz 1.20 Sei $D(2) \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit positiver Diagonale, d.h.

$$D(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a > 0 \right\}.$$

Dann gilt $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{SO}(2)D(2)$. Damit ist gemeint, dass zu jedem $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ eindeutig bestimmte Matrizen $B \in \mathrm{SO}(2)$ und $C \in D(2)$ mit $A = BC$ existieren. Insbesondere ist $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ zu $\mathrm{SO}(2) \times D(2)$ und damit zu $S^1 \times \mathbb{R}^2$ diffeomorph.

Beweis. Sei $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ und sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ die erste Spalte von A . Dann gibt es genau ein $B_0 \in \mathrm{SO}(2)$ derart, dass

$$B_0 \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

für ein $a > 0$. Da auch $B_0 A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, ist dann $C := B_0 A \in D(2)$ und $A = B_0^{-1} C$ ist die gewünschte Zerlegung. \square

Bemerkung 1.21 Eine einfache Rechnung zeigt, dass $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{Sp}(1, \mathbb{R})$. \square

Offensichtlich gilt

Satz 1.22 Sind G und H Liesche Gruppen, so ist $G \times H$ mit der Operation

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

ebenfalls eine Liesche Gruppe. \square

In den folgenden Sätzen sind topologische Eigenschaften von Lieschen Gruppen beschrieben.

Satz 1.23 Jede Liesche Gruppe G ist regulär, d.h. zu jedem $g \in G$ und zu jeder abgeschlossenen Menge $F \subseteq G$ mit $g \notin F$ existieren offene Mengen $U, V \subset G$ mit $g \in U$, $F \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Beweis. Seien g und F wie oben angegeben. Indem wir andernfalls $L_{g^{-1}}$ anwenden, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $g = e$. Also ist $G \setminus F$ offen und $e \in G \setminus F$. Da $\Phi : (g_1, g_2) \in G \times G \mapsto g_1 g_2^{-1} \in G$ insbesondere stetig ist, existieren offene Umgebungen U_1, U_2 von e mit $\Phi(U_1 \times U_2) \subset G \setminus F$. Wir setzen $U := U_1 \cap U_2$. Dann ist auch U eine offene Umgebung von e und $\Phi(U \times U) \subset G \setminus F$. Für jedes $h \in F$ gilt $U \cap L_h(U) = \emptyset$. Andernfalls gäbe es ein $h \in F$ und $a_1, a_2 \in U$ mit $a_1 = h a_2$. Hieraus würde $h = a_1 a_2^{-1} \in \Phi(U \times U) \cap F$ folgen, was aber ein Widerspruch zu $\Phi(U \times U) \cap F = \emptyset$ wäre. Da U offen ist, ist auch jedes $L_h(U)$ und somit auch $V := \bigcup_{h \in F} L_h(U)$ offen. Die Mengen U und V leisten jetzt das Verlangte. \square

Satz 1.24 Jede offene Untergruppe einer Lieschen Gruppe ist auch abgeschlossen.

Beweis. Sei G eine Liesche Gruppe und sei H eine Untergruppe von G . Dann ist

$$G \setminus H = \bigcup_{g \in G \setminus H} L_g(H).$$

Ist H offen, so ist auch $L_g(H)$ offen, also auch $G \setminus H$. Das heißt, H ist abgeschlossen. \square

Ist G eine Liesche Gruppe, so bezeichne G_0 die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements e . Das heißt, G_0 ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Mengen $V \subset G$ mit $e \in V$.

Satz 1.25 Für jede Liesche Gruppe G ist G_0 eine offene Untergruppe und ein Normalteiler.

Beweis. Sei $h \in G_0$. Da $R_{h^{-1}}$ stetig und G_0 zusammenhängend ist, ist auch $G_0h^{-1} = R_{h^{-1}}(G_0)$ zusammenhängend. Außerdem ist $e = hh^{-1} \in G_0h^{-1}$. Folglich ist $G_0h^{-1} \subset G_0$. Damit ist gezeigt, dass G_0 eine Untergruppe ist. Sei $g \in G$. Da α_g stetig ist, ist $gG_0g^{-1} = \alpha_g(G_0)$ zusammenhängend. Außerdem ist $e = geg^{-1} \in gG_0g^{-1}$. Es folgt $gG_0g^{-1} \subset G_0$. Also ist G_0 auch ein Normalteiler. Wir müssen noch zeigen, dass G_0 offen ist. Da G eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, gibt es eine zusammenhängende offene Umgebung V von e . Für diese gilt $V \subset G_0$. Weil G_0 eine Untergruppe ist, gilt weiter $L_g(V) \subset G_0$ für alle $g \in G_0$. Folglich ist $G_0 = \bigcup_{g \in G_0} L_g(V)$. Da alle $L_g(V)$ offen sind, ist damit auch G_0 offen. \square

Für eine Teilmenge V einer Lieschen Gruppe G setzen wir

$$V^{-1} := \{g^{-1} : g \in V\} \quad \text{und} \quad V^n := \{g_1g_2 \cdots g_n : g_1, \dots, g_n \in V\}.$$

Satz 1.26 Sei G eine zusammenhängende Liesche Gruppe und sei V eine offene Umgebung von e . Dann gilt $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$.

Beweis. Wir setzen $W := V \cap V^{-1}$ und $H := \bigcup_{n=1}^{\infty} W^n$. Wegen $W \subset V$ ist $H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$. Also genügt es zu zeigen, dass $H = G$. Da $W = W^{-1}$, ist H eine Untergruppe von G . Diese Untergruppe ist offen. Dafür genügt es zu verifizieren, dass W^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ offen ist. Dies zeigen wir induktiv. Die Offenheit von $W^1 = W$ erhalten wir aus der Offenheit von V und V^{-1} . Ist W^n offen, so ist $L_g(W^n)$ für jedes $g \in W$ offen und demnach auch $W^{n+1} = \bigcup_{g \in W} L_g(W^n)$. Als offene Untergruppe von G ist H nach Satz 1.24 auch abgeschlossen. Weil G zusammenhängend ist, folgt $H = G$. \square

Bemerkung 1.27 Eine Gruppe G heißt **topologische Gruppe**, falls G ein topologischer Raum ist und die Abbildungen $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ und $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ stetig sind. Die Sätze 1.23, 1.24 und 1.26 gelten genauso für topologische Gruppen. Auch ist die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements einer topologischen Gruppe wieder ein Normalteiler. Dieser muss aber nicht notwendig offen sein. \square

Definition 1.28 Seien G und H Liesche Gruppen.

- (i) Eine Abbildung $\Phi : G \rightarrow H$ heißt **Lie-Gruppen-Homomorphismus** $:\Leftrightarrow \Phi$ ist glatt und ein Gruppenshomomorphismus, d.h. $\Phi(g_1 \cdot g_2) = \Phi(g_1) \cdot \Phi(g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in G$.
- (ii) Ein Lie-Gruppen-Homomorphismus $\Phi : G \rightarrow H$ heißt **Lie-Gruppen-Isomorphismus** $:\Leftrightarrow \Phi$ ist ein Diffeomorphismus.
- (iii) Die Lieschen Gruppen G und H heißen **isomorph** $:\Leftrightarrow$ Es existiert ein Lie-Gruppen-Isomorphismus $\Phi : G \rightarrow H$.

Beispiel 1.29 Die Abbildungen $\det : \text{GL}(n, \mathbb{K}) \rightarrow \text{GL}(1, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und $t \in \mathbb{R} \mapsto [ta_1, \dots, ta_m] \in T^m$ für ein $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ sind Lie-Gruppen-Homomorphismen. \square

Beispiel 1.30 Die Abbildungen $([\xi_1], \dots, [\xi_m]) \in (T^1)^m \mapsto [\xi_1, \dots, \xi_m] \in T^m$ und $[\xi] \in T^1 \mapsto e^{2\pi i \xi} \in \text{U}(1)$ sind Lie-Gruppen-Isomorphismen genauso wie

$$z \in \text{U}(1) \mapsto \begin{pmatrix} \text{Re}(z) & -\text{Im}(z) \\ \text{Im}(z) & \text{Re}(z) \end{pmatrix} \in \text{SO}(2).$$

Folglich sind $(T^1)^m$ und T^m sowie T^1 , $\text{U}(1)$ und $\text{SO}(2)$ isomorph. \square

Beispiel 1.31 Durch

$$\Phi \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} |z_1|^2 - |z_2|^2 & 2\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) & -2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \\ 2\operatorname{Im}(z_1 z_2) & \operatorname{Re}(z_1^2 + z_2^2) & \operatorname{Im}(z_1^2 - z_2^2) \\ 2\operatorname{Re}(z_1 z_2) & -\operatorname{Im}(z_1^2 + z_2^2) & \operatorname{Re}(z_1^2 - z_2^2) \end{pmatrix}$$

ist ein Lie-Gruppen-Homomorphismus $\Phi : \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ definiert. Dabei ist $\operatorname{Ker} \Phi = \{\pm \mathbf{1}_2\}$. \square

Definition 1.32 Eine Untergruppe H einer Lieschen Gruppe G heißt eine **Liesche Untergruppe** von G $:\Leftrightarrow H$ ist eine Untermannigfaltigkeit von G .

Beispiel 1.33 Die Gruppen $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ und $\mathrm{O}(n)$ sind Liesche Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Die Gruppen $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ und $\mathrm{U}(n)$ sind Liesche Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Die Gruppen $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ und $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ sind Liesche Untergruppen von $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ bzw. $\mathrm{SL}(2n, \mathbb{R})$. Des Weiteren sind $\mathrm{O}(m, k)$ bzw. $\mathrm{SO}(m, k)$ Liesche Untergruppen von $\mathrm{GL}(m+k, \mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{SL}(m+k, \mathbb{R})$. Die Gruppe $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(2n)$ ist eine Liesche Untergruppe sowohl von $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ als auch von $\mathrm{O}(2n)$ und zu $\mathrm{U}(n)$ isomorph. \square

Beispiel 1.34 Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei

$$T_a := \{[t, ta] \in T^2 : t \in \mathbb{R}\} .$$

Dann ist T_a eine Untergruppe von T^2 . Diese Untergruppe ist genau dann eine Liesche Untergruppe von T^2 , wenn $a \in \mathbb{Q}$. \square

2 Die Lie-Algebra einer Lieschen Gruppe

Definition 2.1 Eine Lie-Algebra ist ein \mathbb{K} -Vektorraum \mathfrak{a} versehen mit einer Abbildung

$$[\cdot, \cdot] : (v_1, v_2) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \mapsto [v_1, v_2] \in \mathfrak{a},$$

welche die folgenden Eigenschaften hat.

- (a) Für alle $v_1, v_2 \in \mathfrak{a}$ ist $[v_1, v_2] = -[v_2, v_1]$.
- (b) Für alle $v_1, v_2, v_3 \in \mathfrak{a}$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ ist $[\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, v_3] = \lambda_1 [v_1, v_3] + \lambda_2 [v_2, v_3]$.
- (c) **Jacobi-Identität:** Für alle $v_1, v_2, v_3 \in \mathfrak{a}$ ist $[[v_1, v_2], v_3] + [[v_2, v_3], v_1] + [[v_3, v_1], v_2] = 0$.

Die Abbildung $[\cdot, \cdot]$ wird dann die **Lie-Klammer** oder das **Lie-Produkt** von \mathfrak{a} genannt.

Beispiel 2.2 Der \mathbb{R}^3 ist zusammen mit $[v_1, v_2] := v_1 \times v_2$, wobei $v_1 \times v_2$ das Vektorprodukt von v_1 und v_2 bezeichnet, eine Lie-Algebra. \square

Beispiel 2.3 Jede assoziative Algebra \mathfrak{a} ist zusammen mit $[v_1, v_2] := v_1 \cdot v_2 - v_2 \cdot v_1$ eine Lie-Algebra. Insbesondere ist $M(n, \mathbb{K})$ mit $[A, B] := AB - BA$ eine Lie-Algebra. \square

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und bezeichne $\mathfrak{X}(M)$ den Raum aller glatten Vektorfelder auf M . Ist $f \in C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$, so sei $X(f) \in C^\infty(M)$ die Richtungsableitung von f in Richtung X , d.h.

$$X(f)(p) = \text{df}|_p(X(p)) \quad \text{für } p \in M.$$

Definition 2.4 Der **Kommutator** zweier Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist das durch

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad \text{für alle } f \in C^\infty(M)$$

bestimmte Vektorfeld $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$.

Bekanntlich gilt

Satz 2.5 (i) Der \mathbb{R} -Vektorraum $\mathfrak{X}(M)$ ist zusammen mit dem Kommutator eine Lie-Algebra.

- (ii) Für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$ ist $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$. \square

Satz 2.6 Sei M_0 eine Untermannigfaltigkeit von M und seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ derart, dass die Einschränkungen $X_0 := X|_{M_0}$ und $Y_0 := Y|_{M_0}$ Vektorfelder auf M_0 sind. Dann sind X_0 und Y_0 glatt und $[X_0, Y_0] = [X, Y]|_{M_0}$. \square

Sei auch N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ist $\Phi : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus und ist $X \in \mathfrak{X}(M)$, so ist $\Phi_* X \in \mathfrak{X}(N)$ durch

$$(\Phi_* X)(\Phi(p)) = \text{D}\Phi|_p(X(p)) \quad \text{für } p \in M$$

definiert. Eine Verallgemeinerung des nächsten Satzes werden wir weiter unten beweisen (vgl. Satz 2.26).

Satz 2.7 Sei $\Phi : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus und seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dann ist

$$\Phi_*[X, Y] = [\Phi_* X, \Phi_* Y].$$

\square

Sei G eine Liesche Gruppe.

Definition 2.8 (i) Ein Vektorfeld X auf G heißt **linksinvariant** $:\Leftrightarrow$ Es gilt $(L_g)_*X = X$ für alle $g \in G$, d.h.

$$X(gh) = DL_g|_h(X(h)) \quad \text{für alle } g, h \in G .$$

(ii) X heißt **rechtsinvariant** $:\Leftrightarrow$ Es gilt $(R_g)_*X = X$ für alle $g \in G$, d.h.

$$X(hg) = DR_g|_h(X(h)) \quad \text{für alle } g, h \in G .$$

Den Vektorraum der linksinvarianten Vektorfelder auf G bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}^G(G)$. Außerdem setzen wir $\mathfrak{g} := T_eG$.

Satz 2.9 Die Vektorräume $\mathfrak{X}^G(G)$ und \mathfrak{g} sind kanonisch isomorph.

Beweis. Die Abbildung $X \in \mathfrak{X}^G(G) \mapsto X(e) \in \mathfrak{g}$ ist offensichtlich linear. Wir zeigen, dass diese Abbildung umkehrbar ist. Sei $v \in \mathfrak{g}$. Wir definieren ein Vektorfeld X auf G durch $X(g) := DL_g|_e(v)$. Dann ist $X(e) = v$. Außerdem ist $X \in \mathfrak{X}^G(G)$, denn

$$X(gh) = DL_{gh}|_e(v) = DL_g|_h(DL_h|_e(v)) = DL_g|_h(X(h)) .$$

□

Satz 2.10 (i) Es ist $\mathfrak{X}^G(G) \subset \mathfrak{X}(G)$, d.h. jedes linksinvariante Vektorfeld auf G ist glatt.

(ii) Sind $X, Y \in \mathfrak{X}^G(G)$, so ist auch $[X, Y] \in \mathfrak{X}^G(G)$.

Beweis. (i) Sei $X \in \mathfrak{X}^G(G)$. Dann gilt $X(g) = DL_g|_e(X(e))$ für alle $g \in G$. Sei $\gamma : I \rightarrow G$ eine glatte Kurve auf G mit $\dot{\gamma}(0) = X(e)$ und sei $\Phi : G \times I \rightarrow G$ durch $\Phi(g, t) := g\gamma(t)$ definiert. Da die Gruppenoperation glatt ist, ist auch Φ glatt. Damit ist auch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} : G \times I \rightarrow TG ,$$

also insbesondere

$$g \in G \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial t}(g, 0) = X(g) \in TG$$

glatt.

(ii) Seien $X, Y \in \mathfrak{X}^G(G)$ und sei $g \in G$. Nach Satz 2.7 ist dann

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = [X, Y] .$$

□

Aus den Sätzen 2.9 und 2.10 folgt, dass durch

$$[X(e), Y(e)] = [X, Y](e) \quad \text{für } X, Y \in \mathfrak{X}^G(G) \tag{2.1}$$

eine Lie-Klammer auf \mathfrak{g} definiert ist.

Definition 2.11 Der reelle Vektorraum \mathfrak{g} versehen mit der durch (2.1) definierten Lie-Klammer wird die **Lie-Algebra der Lieschen Gruppe G** genannt.

Satz 2.12 Die Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ der Lieschen Gruppe $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ stimmt mit der Lie-Algebra $M(n, \mathbb{K})$ überein.

Beweis. Da $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ eine offene Teilmenge von $M(n, \mathbb{K})$ ist, können wir den Tangentialraum $T_A \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ für jedes $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ mit dem Vektorraum $M(n, \mathbb{K})$ identifizieren. Seien $B_1, B_2 \in M(n, \mathbb{K})$ und seien X_1, X_2 die linksinvarianten Vektorfelder auf $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ mit $X_i(\mathbf{1}_n) = B_i$. Außerdem sei $L : M(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ linear und $f := L|_{\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})} \in C^\infty(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}))$. Dann gilt

$$X_i(A) = AB_i$$

und

$$X(f)(A) = L(X(A)) \quad (2.2)$$

für $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ und $X \in \mathfrak{X}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}))$. Insbesondere ist $X_i(f)(A) = L(AB_i)$ und damit $X_i(f)$ die Einschränkung der linearen Abbildung

$$L_i : B \in M(n, \mathbb{K}) \mapsto L(BB_i) \in \mathbb{R}.$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} [X_1, X_2](f)(\mathbf{1}_n) &= X_1(X_2(f))(\mathbf{1}_n) - X_2(X_1(f))(\mathbf{1}_n) \\ &= L_2(B_1) - L_1(B_2) \\ &= L(B_1B_2) - L(B_1B_2) \\ &= L(B_1B_2 - B_2B_1). \end{aligned}$$

Mit (2.2) folgt

$$[X_1, X_2](\mathbf{1}_n) = B_1B_2 - B_2B_1$$

und der Satz ist bewiesen. \square

Allgemeiner gilt, dass für jeden endlichdimensionalen Vektorraum E die Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(E)$ von $\mathrm{GL}(E)$ mit der zur assoziativen Algebra $\mathrm{End}(E)$ der Endomorphismen von E gehörenden Lie-Algebra übereinstimmt.

Definition 2.13 Eine Lie-Algebra $(\mathfrak{a}_0, [\cdot, \cdot]_0)$ heißt eine **Unteralgebra** einer Lie-Algebra $(\mathfrak{a}, [\cdot, \cdot])$: $\iff \mathfrak{a}_0$ ist ein Unterraum von \mathfrak{a} und für alle $v, w \in \mathfrak{a}_0$ gilt $[v, w]_0 = [v, w]$.

Satz 2.14 Sei G eine Liesche Gruppe, sei H eine Liesche Untergruppe von G und seien \mathfrak{g} und \mathfrak{h} die Lie-Algebren von G bzw. H . Dann ist \mathfrak{h} eine Unteralgebra von \mathfrak{g} .

Beweis. Seien $v, w \in \mathfrak{h}$ und seien $X, Y \in \mathfrak{X}^G(G)$ und $X_0, Y_0 \in \mathfrak{X}^H(H)$ durch $X(e) = X_0(e) = v$ und $Y(e) = Y_0(e) = w$ bestimmt. Dann ist $X_0 = X|_H$ und $Y_0 = Y|_H$. Mit Satz 2.6 folgt

$$[X_0, Y_0] = [X, Y]|_H.$$

Insbesondere ist $[X_0, Y_0](e) = [X, Y](e)$, was die Behauptung liefert. \square

Die in folgenden Beispielen betrachteten Lie-Algebren sind nach den Sätzen 2.12 und 2.14 Unter-algebren von $M(n, \mathbb{R})$ bzw. $M(n, \mathbb{C})$.

Beispiel 2.15 Bezeichne $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ die Lie-Algebra von $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$. Wir zeigen, dass

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{B \in M(n, \mathbb{K}) : \mathrm{Tr}(B) = 0\}. \quad (2.3)$$

Um dies einzusehen, betrachten wir wieder die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \Phi(A) := \det(A).$$

Nach Beispiel 1.15 und Satz 1.13 ist

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = T_{\mathbf{1}_n} \mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) = \{B \in M(n, \mathbb{K}) : D\Phi|_{\mathbf{1}_n}(B) = 0\}.$$

Für $A = (a_1, \dots, a_n) \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ und $B = (b_1, \dots, b_n) \in M(n, \mathbb{K})$ haben wir

$$D\Phi|_A(B) = \det(b_1, a_2, \dots, a_n) + \det(a_1, b_2, a_3, \dots, a_n) + \dots + \det(a_1, \dots, a_{n-1}, b_n) .$$

Somit ist

$$D\Phi|_{1_n}(B) = b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn} = \text{Tr}(B)$$

und (2.3) folgt. \square

Beispiel 2.16 Die Lie-Algebra $\mathfrak{o}(n)$ der orthogonalen Gruppe $O(n)$ ist der Raum der schief-symmetrischen Matrizen,

$$\mathfrak{o}(n) = \{B \in M(n, \mathbb{R}) : B^T + B = 0\} . \quad (2.4)$$

Betrachten wir nämlich

$$\Phi : \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow S(n, \mathbb{R}) , \quad \Phi(A) := A^T A ,$$

so ist $D\Phi|_A(B) = B^T A + A^T B$, woraus mit Beispiel 1.16 und Satz 1.13 die Beziehung (2.4) folgt. Da $SO(n)$ die Zusammenhangskomponente des Einselements von $O(n)$ ist, stimmt die Lie-Algebra von $SO(n)$ mit $\mathfrak{o}(n)$ überein. \square

Beispiel 2.17 Sei $\mathfrak{u}(n)$ die Lie-Algebra der unitären Gruppe $U(n)$. Wie in Beispiel 2.16 sieht man, dass $\mathfrak{u}(n)$ der Raum der schieferhermiteschen Matrizen ist,

$$\mathfrak{u}(n) = \{B \in M(n, \mathbb{C}) : \bar{B}^T + B = 0\} .$$

Insbesondere ist $\mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}$ und somit gilt $[v, w] = 0$ für alle $v, w \in \mathfrak{u}(1)$. Wir merken noch an, dass $\mathfrak{u}(n)$ kein komplexer Unterraum von $M(n, \mathbb{C})$ ist. Ist nämlich $B \in \mathfrak{u}(n)$ und $B \neq 0$, so ist $iB \notin \mathfrak{u}(n)$. \square

Sind $(\mathfrak{a}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{a}})$ und $(\mathfrak{b}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{b}})$ zwei Lie-Algebren, so bezeichne $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ ihre direkte Summe, d.h. $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ sei mit der Lie-Klammer

$$[(v_1, w_1), (v_2, w_2)] := ([v_1, v_2]_{\mathfrak{a}}, [w_1, w_2]_{\mathfrak{b}}) \quad \text{für } v_1, v_2 \in \mathfrak{a} \text{ und } w_1, w_2 \in \mathfrak{b}$$

versehen.

Satz 2.18 Sind \mathfrak{g} und \mathfrak{h} die Lie-Algebren der Lieschen Gruppen G und H , so ist $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ die Lie-Algebra von $G \times H$.

Zum Beweis dieses Satzes benutzen wir die folgende Tatsache. Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$, so sei $X + Y \in \mathfrak{X}(M \times N)$ durch

$$(X + Y)(p, q) := (X(p), Y(q)) \in T_p M \oplus T_q N = T_{(p, q)}(M \times N)$$

für $(p, q) \in M \times N$ definiert. Dann gilt:

Lemma 2.19 Für alle $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ und alle $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ ist

$$[X_1 + Y_1, X_2 + Y_2] = [X_1, X_2] + [Y_1, Y_2] .$$

\square

Beweis von Lemma 2.18. Sei $v \in \mathfrak{g}$ und $w \in \mathfrak{h}$ und seien $X \in \mathfrak{X}^G(G)$, $Y \in \mathfrak{X}^H(H)$ und $Z \in \mathfrak{X}^{G \times H}(G \times H)$ derart, dass $X(e_G) = v$, $Y(e_H) = w$ und $Z(e_G, e_H) = (v, w)$, wobei hier e_G und e_H die neutralen Elemente von G bzw. H bezeichnen. Dann ist

$$Z(g, h) = DL_{(g, h)}|_{(e_G, e_H)}(v, w) = (DL_g|_{e_G}(v), DL_h|_{e_H}(w)) = (X(g), Y(h)) ,$$

d.h. $Z = X + Y$. Hieraus folgt mit Lemma 2.19 die Behauptung. \square

Beispiel 2.20 Die Lie-Algebra von $U(1)^n$ ist $\mathfrak{u}(1)^n = i\mathbb{R}^n$, wobei $[v, w] = 0$ für alle $v, w \in U(1)^n$. \square

Definition 2.21 Seien G und H Liesche Gruppen, seien \mathfrak{g} und \mathfrak{h} ihre Lie-Algebren und sei $\Phi : G \rightarrow H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Dann heißt die lineare Abbildung $\Phi_* := D\Phi|_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ das **Differential** von Φ .

Definition 2.22 Seien $(\mathfrak{a}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{a}})$ und $(\mathfrak{b}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{b}})$ zwei Lie-Algebren. Eine lineare Abbildung $\phi : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ heißt **Lie-Algebren-Homomorphismus** $:\Leftrightarrow$ Für alle $v, w \in \mathfrak{a}$ gilt $\phi([v, w]_{\mathfrak{a}}) = [\phi(v), \phi(w)]_{\mathfrak{b}}$.

Satz 2.23 Das Differential $\Phi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ eines jeden Lie-Gruppen-Homomorphismus $\Phi : G \rightarrow H$ ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus.

Zum Beweis dieses Satzes benutzen wir eine Verallgemeinerung von Satz 2.7.

Definition 2.24 Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und sei $\Phi \in C^\infty(M, N)$. Ein Paar (X, Y) von Vektorfeldern $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$ heißt **Φ -verknüpft** $:\Leftrightarrow$ Für alle $p \in M$ ist $D\Phi|_p(X(p)) = Y(\Phi(p))$.

Beispiel 2.25 Ist $\Phi : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, so ist $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(N)$ genau dann Φ -verknüpft, wenn $Y = \Phi_*X$. \square

Satz 2.26 Seien M, N und Φ wie in Definition 2.24 und seien $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$. Sind (X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) Φ -verknüpft, so ist auch $([X_1, X_2], [Y_1, Y_2])$ Φ -verknüpft.

Beweis. Seien $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ Φ -verknüpft und sei $f \in C^\infty(N)$. Dann gilt $Y_i(f) \circ \Phi = X_i(f \circ \Phi)$, denn für $p \in M$ ist

$$Y_i(f)(\Phi(p)) = df|_{\Phi(p)}(Y_i(\Phi(p))) = df|_{\Phi(p)}(D\Phi|_p(X_i(p))) = d(f \circ \Phi)|_p(X_i(p)) = X_i(f \circ \Phi)(p).$$

Damit sehen wir

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_2](f) \circ \Phi &= Y_1(Y_2(f)) \circ \Phi - Y_2(Y_1(f)) \circ \Phi \\ &= X_1(Y_2(f) \circ \Phi) - X_2(Y_1(f) \circ \Phi) \\ &= X_1(X_2(f \circ \Phi)) - X_2(X_1(f \circ \Phi)) \\ &= [X_1, X_2](f \circ \Phi). \end{aligned}$$

Also ist

$$df|_{\Phi(p)}([Y_1, Y_2](\Phi(p))) = df|_{\Phi(p)}(D\Phi|_p([X_1, X_2](p))).$$

Da dies für alle $f \in C^\infty(N)$ gilt, folgt

$$[Y_1, Y_2](\Phi(p)) = D\Phi|_p([X_1, X_2](p)).$$

\square

Beweis von Satz 2.23. Sei $\Phi : G \rightarrow H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Wegen

$$\Phi(L_g(a)) = \Phi(ga) = \Phi(g)\Phi(a) = L_{\Phi(g)}(\Phi(a))$$

gilt $\Phi \circ L_g = L_{\Phi(g)} \circ \Phi$ für alle $g \in G$. Seien $v_1, v_2 \in \mathfrak{g}$ und seien $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}^G(G)$ und $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}^H(H)$ durch $X_i(e_G) = v_i$ und $Y_i(e_H) = \Phi_*(v_i)$ bestimmt. Dann sind (X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) Φ -verknüpft. Wir haben nämlich

$$\begin{aligned} D\Phi|_g(X_i(g)) &= D\Phi|_g(DL_g|_{e_G}(v_i)) = D(\Phi \circ L_g)|_{e_G}(v_i) = D(L_{\Phi(g)} \circ \Phi)|_{e_G}(v_i) \\ &= DL_{\Phi(g)}|_{e_H}(D\Phi|_{e_G}(v_i)) = DL_{\Phi(g)}|_{e_H}(\Phi_*(v_i)) = Y_i(\Phi(g)). \end{aligned}$$

Nach Satz 2.26 ist dann auch $([X_1, X_2], [Y_1, Y_2])$ Φ -verknüpft. Es folgt

$$\Phi_*([v_1, v_2]) = D\Phi|_{e_G}([X_1, X_2](e_G)) = [Y_1, Y_2](\Phi(e_G)) = [Y_1, Y_2](e_H) = [\Phi_*(v_1), \Phi_*(v_2)].$$

Bezeichne $\Omega^k(M)$ den Raum der glatten k -Formen auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M und sei $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ das äußere Differential. Wir erinnern an die folgende Beziehung.

Satz 2.27 Für $\omega \in \Omega^k(M)$ und $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k), \end{aligned}$$

wobei die mit $\hat{}$ gekennzeichneten Argumente wegzulassen sind. Insbesondere gilt

$$d\eta(X_0, X_1) = X_0(\eta(X_1)) - X_1(\eta(X_0)) - \eta([X_0, X_1])$$

für $\eta \in \Omega^1(M)$. □

Sei $\Phi : M \rightarrow N$ eine Diffeomorphismus und sei ϑ eine k -Form auf N . Dann ist die k -Form $\Phi^*\vartheta$ auf M durch

$$(\Phi^*\vartheta)|_p(v_1, \dots, v_k) := \vartheta|_{\Phi(p)}(D\Phi|_p(v_1), \dots, D\Phi|_p(v_k))$$

für $p \in M$ und $v_1, \dots, v_k \in T_pM$ definiert.

Satz 2.28 Für $\Phi \in C^\infty(M, N)$ und $\vartheta \in \Omega^k(M)$ gilt

$$\Phi^*d\vartheta = d\Phi^*\vartheta.$$

□

Definition 2.29 Eine Form ω auf G heißt **linksinvariant** $:\Leftrightarrow$ Es ist $L_g^*\omega = \omega$ für alle $g \in G$.

Den Vektorraum aller linksinvarianten k -Formen auf G bezeichnen wir mit $\Omega_G^k(G)$.

Satz 2.30 (i) Für jede Form $\omega \in \Omega_G^k(G)$ und alle Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}^G(G)$ ist die Funktion $\omega(X_1, \dots, X_k)$ konstant.

(ii) Es ist $\Omega_G^k(G) \subset \Omega^k(G)$, d.h. jede linksinvariante Form auf G ist glatt.

(iii) Ist ω eine linksinvariante Form auf G , so ist auch $d\omega$ linksinvariant.

(iv) Sind ω^1 und ω^2 linksinvariante Formen auf G , so ist auch $\omega^1 \wedge \omega^2$ linksinvariant.

Beweis. Sei $\omega \in \Omega_G^k(G)$.

(i) Für $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}^G(G)$ und $g \in G$ gilt

$$\begin{aligned} \omega(X_1, \dots, X_k)(g) &= \omega|_g(X_1(g), \dots, X_k(g)) = \omega|_g(DL_g|_e(X_1(e)), \dots, DL_g|_e(X_k(e))) \\ &= (L_g^*\omega)|_e(X_1(e), \dots, X_k(e)) = \omega(X_1, \dots, X_k)(e). \end{aligned}$$

(ii) Wegen (i) und $\mathfrak{X}^G(G) \subset \mathfrak{X}(G)$ ist $\omega(Y_1, \dots, Y_k) \in C^\infty(G)$ für alle $Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{X}(G)$. Das impliziert die Behauptung.

Die Aussagen (iii) und (iv) folgen aus Satz 2.28 und

$$L_g^*(\omega^1 \wedge \omega^2) = (L_g^*\omega^1) \wedge (L_g^*\omega^2) .$$

□

Bezeichne $\Lambda^k \mathfrak{g}^*$ den Vektorraum der alternierenden k -linearen Abbildungen $\varphi : \mathfrak{g}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Insbesondere ist $\Lambda^1 \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^* := \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$.

Satz 2.31 Die Vektorräume $\Omega_G^k(G)$ und $\Lambda^k \mathfrak{g}^*$ sind kanonisch isomorph.

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 2.9 verifiziert man, dass $\omega \in \Omega_G^k(G) \mapsto \omega|_e \in \Lambda^k \mathfrak{g}^*$ ein Isomorphismus ist. □

Definition 2.32 Sei $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis von \mathfrak{g} . Die durch

$$[v_i, v_j] = \sum_{k=1}^m C_{ij}^k v_k$$

bestimmten Zahlen C_{ij}^k werden die **Strukturkonstanten** von G bezüglich $\{v_1, \dots, v_m\}$ genannt.

Die Eigenschaften des Lie-Produkts implizieren

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^m (C_{ij}^k C_{kl}^r + C_{jl}^k C_{ki}^r + C_{li}^k C_{kj}^r) = 0 .$$

Satz 2.33 (Maurer-Cartansche Strukturgleichungen) Seien C_{ij}^k die Strukturkonstanten von G bezüglich der Basis $\{v_1, \dots, v_m\}$ und seien η^1, \dots, η^m die linksinvarianten 1-Formen auf G mit $\eta^i|_e(v_j) = \delta_j^i$. Dann gilt

$$d\eta^i = - \sum_{1 \leq j < k \leq m} C_{jk}^i \eta^j \wedge \eta^k = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m C_{jk}^i \eta^j \wedge \eta^k .$$

Beweis. Für die durch $X_i(e) = v_i$ bestimmten Vektorfelder $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}^G(G)$ gilt

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^m C_{ij}^k X_k \quad \text{und} \quad \eta^i(X_j) = \delta_j^i .$$

Mit Satz 2.27 folgt

$$d\eta^i(X_j, X_k) = X_j(\eta^i(X_k)) - X_k(\eta^i(X_j)) - \eta^i([X_j, X_k]) = -\eta^i \left(\sum_{l=1}^m C_{jk}^l X_l \right) = -C_{jk}^i .$$

□

Beispiel 2.34 Sei

$$B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Dann ist $\{B_1, B_2, B_3\}$ eine Basis von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ und es gilt

$$[B_1, B_2] = 2B_2, \quad [B_1, B_3] = -2B_3 \quad \text{und} \quad [B_2, B_3] = B_1 .$$

Die einzigen von Null verschiedenen Strukturkonstanten sind also

$$C_{12}^2 = -C_{21}^2 = 2, \quad C_{13}^3 = -C_{31}^3 = -2 \quad \text{und} \quad C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1 .$$

Für die durch $\eta^i|_e(B_j) = \delta_j^i$ bestimmten linksinvarianten Formen η^1, η^2, η^3 auf $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ gilt folglich

$$d\eta^1 = -\eta^2 \wedge \eta^3, \quad d\eta^2 = -2\eta^1 \wedge \eta^2 \quad \text{und} \quad d\eta^3 = 2\eta^1 \wedge \eta^3 .$$

□

3 Die Exponentialabbildung

Im Weiteren schreiben wir statt $D\Phi|_p(v)$ für $\Phi \in C^\infty(M, N)$ und $v \in T_pM$ auch einfach $D\Phi(v)$. Sei G eine Liesche Gruppe und \mathfrak{g} ihre Lie-Algebra.

Satz 3.1 Sei $v \in \mathfrak{g}$ und sei $\gamma : I \rightarrow G$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\gamma}(t) = DL_{\gamma(t)}(v) \quad \text{und} \quad \gamma(0) = e. \quad (3.1)$$

Dann ist $I = \mathbb{R}$ und es gilt $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $I = (r_1, r_2)$. Wir beweisen, dass $r_2 = \infty$. Angenommen $r_2 < \infty$. Wir setzen $r := r_2/2$ und $g := \gamma(r)$ und definieren $\rho : (r_1 + r, 3r) \rightarrow G$ durch $\rho(t) := g\gamma(t-r)$. Dann ist

$$\dot{\rho}(t) = DL_g(\dot{\gamma}(t-r)) = DL_g(DL_{\gamma(t-r)}(v)) = DL_{g\gamma(t-r)}(v) = DL_{\rho(t)}(v)$$

und $\rho(r) = \gamma(r)$. Folglich muss $(r_1, 3r) \subset (r_1, r_2)$ gelten, was ein Widerspruch zu $3r > r_2$ ist. Analog zeigt man $r_1 = -\infty$.

Sei $s \in \mathbb{R}$ beliebig fixiert. Wir setzen $h := \gamma(s)$ und definieren $\rho_1, \rho_2 : \mathbb{R} \rightarrow G$ durch

$$\rho_1(t) := \gamma(s+t) \quad \text{und} \quad \rho_2(t) := h\gamma(t).$$

Dann haben wir

$$\dot{\rho}_1(t) = \dot{\gamma}(s+t) = DL_{\gamma(s+t)}(v) = DL_{\rho_1(t)}(v)$$

und

$$\dot{\rho}_2(t) = DL_h(\dot{\gamma}(t)) = DL_h(DL_{\gamma(t)}(v)) = DL_{h\gamma(t)}(v) = DL_{\rho_2(t)}(v).$$

Außerdem ist

$$\rho_1(0) = \gamma(s) = h = \rho_2(0).$$

Also sind ρ_1 und ρ_2 Lösungen des gleichen Anfangswertproblems. Folglich stimmen sie überein, d.h. es gilt

$$\gamma(s+t) = \rho_1(t) = \rho_2(t) = \gamma(s)\gamma(t) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Damit ist auch der zweite Teil der Behauptung bewiesen. \square

Bemerkung 3.2 Die Differentialgleichung $\dot{\gamma}(t) = DL_{\gamma(t)}(v)$ kann mit dem durch $X(e) = v$ bestimmten Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}^G(G)$ in der Form $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$ geschrieben werden. Die maximale Lösung von (3.1) ist folglich die maximale Integralkurve des Vektorfeldes X durch e . \square

Definition 3.3 Ist $v \in \mathfrak{g}$, so sei $\exp(v) := \gamma(1)$, wobei γ die maximale Lösung von (3.1) ist. Die so definierte Abbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ wird die **Exponentialabbildung** von G genannt.

Offensichtlich ist $\exp(0) = e$. Außerdem haben wir

Satz 3.4 (i) Die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ ist glatt.

(ii) Die maximale Lösung von (3.1) stimmt mit der Abbildung $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tv) \in G$ überein. Insbesondere ist

$$\left. \frac{d}{dt} \exp(tv) \right|_{t=0} = v.$$

(iii) Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und alle $v \in \mathfrak{g}$ gilt $\exp((s+t)v) = \exp(sv)\exp(tv)$.

(iv) Das Differential $D\exp|_0 : T_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \rightarrow T_eG = \mathfrak{g}$ der Exponentialabbildung in $0 \in \mathfrak{g}$ ist die identische Abbildung.

Beweis. (i) Die Aussage folgt aus dem Satz über die glatte Abhängigkeit der Lösung einer Differentialgleichung von Parametern.

(ii) Sei γ die maximale Lösung von (3.1), sei $s \in \mathbb{R}$ beliebig und sei $\rho : \mathbb{R} \rightarrow G$ durch $\rho(t) := \gamma(st)$ definiert. Dann ist

$$\dot{\rho}(t) = s\dot{\gamma}(st) = sDL_{\gamma(st)}(v) = DL_{\rho(t)}(sv)$$

und $\rho(0) = \gamma(0) = e$. Folglich ist $\rho(1) = \exp(sv)$, d.h. $\gamma(s) = \exp(sv)$. Der zweite Teil der Behauptung folgt nun aus

$$\dot{\gamma}(0) = DL_{\gamma(0)}(v) = DL_e(v) = v.$$

(iii) Dies folgt aus Satz 3.1 und (ii).

(iv) Nach (ii) gilt

$$D \exp|_0(v) = \left. \frac{d}{dt} \exp(tv) \right|_{t=0} = v.$$

□

Folgerung 3.5 *Es existiert eine offene Umgebung $V \subset \mathfrak{g}$ von 0 derart, dass $\exp|_V : V \rightarrow \exp(V)$ ein Diffeomorphismus ist.*

Beweis. Das ist eine Konsequenz von Satz 3.4(iv). □

Bemerkung 3.6 Sei $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis von \mathfrak{g} , sei $W \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Umgebung von 0 und sei $\psi : W \rightarrow G$ durch $\psi(x) := \exp(x^1 v_1 + \dots + x^m v_m)$ definiert. Nach Folgerung 3.5 ist $\psi : W \rightarrow \psi(W)$ für genügend kleines W ein Diffeomorphismus und somit ψ^{-1} eine Karte von G . Die Koordinaten x^1, \dots, x^m zu solch einer Karte nennt man auch **kanonische Koordinaten**. □

Beispiel 3.7 Wir bestimmen die Exponentialabbildung der abelschen Gruppe $(\mathbb{R}, +)$. Sei $g \in \mathbb{R}$ und sei $v \in T_0 \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Dann ist

$$DL_g(v) = \left. \frac{d}{dt} L_g(tv) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (tv + g) \right|_{t=0} = v.$$

Also lautet die Differentialgleichung (3.1) in diesem Fall

$$\dot{\gamma}(t) = v \quad \text{und} \quad \gamma(0) = 0.$$

Deren maximale Lösung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch $\gamma(t) := tv$ gegeben. Somit ist $\exp(v) = \gamma(1) = v$, d.h. $\exp = \text{id}_{\mathbb{R}}$. □

Beispiel 3.8 Die Exponentialabbildung der unitären Gruppe $U(1)$ ist $z \in \mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R} \mapsto e^z \in U(1)$. Ist nämlich $z \in \mathfrak{u}(1)$ und $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow U(1)$ durch $\gamma(t) := e^{tz}$ definiert, so gilt $\dot{\gamma}(t) = e^{tz} z$, d.h. $\dot{\gamma}(t) = DL_{\gamma(t)}(z)$, und $\gamma(0) = 1$. Damit ist $\exp(z) = \gamma(1) = e^z$. □

Beispiel 3.9 Die Exponentialabbildung von $GL(n, \mathbb{K})$ ist

$$B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = M(n, \mathbb{K}) \mapsto e^B := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \in GL(n, \mathbb{K}).$$

Ist nämlich $\gamma(t) := e^{tB}$ für ein $B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, so gilt $\dot{\gamma}(t) = e^{tB} B$, was wiederum nichts anderes als $\dot{\gamma}(t) = DL_{\gamma(t)}(B)$ heißt.

Allgemeiner gilt für jeden endlichdimensionalen Vektorraum E , dass

$$\phi \in \mathfrak{gl}(E) = \text{End}(E) \mapsto e^\phi := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^k}{k!} \in GL(E)$$

die Exponentialabbildung von $GL(E)$ ist. □

Nach Satz 3.4 ist die Abbildung $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tv) \in G$ für jedes $v \in \mathfrak{g}$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Umgekehrt kann man zeigen:

Satz 3.10 *Sei $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Dann gilt*

- (i) *Es existiert ein $v \in \mathfrak{g}$ mit $\Phi(t) = \exp(tv)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*
- (ii) *Φ ist glatt.*

Beweis. (i) Wir wählen eine offene Umgebung $V \subset \mathfrak{g}$ von 0 derart, dass $\exp|_V : V \rightarrow \exp(V)$ ein Diffeomorphismus ist. Dabei können wir o.B.d.A. annehmen, dass die Umgebung V konvex ist. Sei $W := \{v \in \mathfrak{g} : 2v \in V\}$ und $U := \exp(W)$. Dann ist auch W konvex. Außerdem kann $g_1^2 = g_2^2$ für $g_1, g_2 \in U$ nur dann gelten, wenn $g_1 = g_2$. Schreiben wir nämlich $g_i = \exp(v_i)$ mit $v_i \in W$, so erhalten wir

$$\exp(2v_1) = \exp(v_1)^2 = g_1^2 = g_2^2 = \exp(v_2)^2 = \exp(2v_2) .$$

Da $2v_1$ und $2v_2$ in V liegen, folgt $v_1 = v_2$ und somit $g_1 = g_2$. Die Stetigkeit von Φ impliziert, dass es ein $\delta > 0$ mit $\Phi([0, \delta]) \subset U$ gibt. Sei $v_0 \in W$ durch $\exp(v_0) = \Phi(\delta)$ bestimmt. Wir betrachten

$$\Psi : \mathbb{R} \rightarrow G, \quad \Psi(t) := \exp\left(\frac{t}{\delta}v_0\right) .$$

Da diese Abbildung auch ein stetiger Gruppenhomomorphismus ist, ist $K := \{t \in \mathbb{R} : \Phi(t) = \Psi(t)\}$ eine abgeschlossene Untergruppe von \mathbb{R} . Folglich gilt entweder $K = \mathbb{R}$ oder $K = \{k\theta : k \in \mathbb{Z}\}$ für ein $\theta \geq 0$. Angenommen es gilt der 2. Fall. Wegen $\delta > 0$ und $\delta \in K$ muss dann $0 < \theta \leq \delta$ gelten. Insbesondere ist $\Phi(\theta/2) \in U$. Da W konvex und $v_0 \in W$ ist, ist außerdem $\theta/(2\delta)v_0 \in W$ und demzufolge $\Psi(\theta/2) \in U$. Wegen $\theta \in K$ haben wir weiter

$$(\Phi(\theta/2))^2 = \Phi(\theta) = \Psi(\theta) = (\Psi(\theta/2))^2 .$$

Nach der anfangs angestellten Überlegung folgt $\Phi(\theta/2) = \Psi(\theta/2)$, d.h. $\theta/2 \in K$. Damit haben wir einen Widerspruch erhalten. Also ist $K = \mathbb{R}$ und (i) ist bewiesen.

(ii) Das ist eine Konsequenz von (i). □

Satz 3.11 *Jede zusammenhängende eindimensionale Liesche Gruppe ist zu \mathbb{R} oder T^1 isomorph.*

Beweis. Sei G eine zusammenhängende eindimensionale Liesche Gruppe. Sei $v_0 \in \mathfrak{g}$ und $v_0 \neq 0$. Da \mathfrak{g} eindimensional ist, ist $\mathfrak{g} = \mathbb{R}v_0$. Wir betrachten die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow G$, $\Phi(t) := \exp(tv_0)$. Diese Abbildung ist nach Satz 3.4 ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Da G zusammenhängend ist, existieren nach Satz 1.26 und Folgerung 3.5 zu jedem $g \in G$ endlich viele reelle Zahlen t_1, \dots, t_n mit $\exp(t_1v_0) \cdots \exp(t_nv_0) = g$, d.h. mit $\exp((t_1 + \cdots + t_n)v_0) = g$. Folglich ist Φ surjektiv. Des Weiteren gilt

$$D\Phi|_t(1) = \left. \frac{d}{ds} \Phi(t+s) \right|_{s=0} = DL_{\Phi(t)} \left(\left. \frac{d}{ds} \Phi(s) \right|_{s=0} \right) = DL_{\Phi(t)}(v_0) .$$

Also ist $D\Phi|_t$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein Isomorphismus. Das impliziert, dass $\Phi|_I : I \rightarrow \Phi(I)$ für jedes genügend kleine offene Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus ist. Ist Φ injektiv, so folgt, dass Φ bereits ein Lie-Gruppen-Isomorphismus ist. Andernfalls ist $\text{Ker}(\Phi)$ eine nichttriviale abgeschlossene Untergruppe von \mathbb{R} , d.h. $\text{Ker}(\Phi) = \{k\theta : k \in \mathbb{Z}\}$ für ein $\theta > 0$ und wir erhalten, dass durch $\hat{\Phi}([t]) := \Phi(t\theta)$ ein Lie-Gruppen-Isomorphismus $\hat{\Phi} : T^1 \rightarrow G$ definiert ist. □

Eine wichtige Eigenschaft der Exponentialabbildung ist

Satz 3.12 *Sei $\Phi : G \rightarrow H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Dann gilt $\exp(\Phi_*(v)) = \Phi(\exp(v))$ für alle $v \in \mathfrak{g}$.*

Beweis. Sei $v \in \mathfrak{g}$, sei γ die maximale Lösung von (3.1) und sei $\rho = \Phi \circ \gamma$. Dann ist

$$\dot{\rho}(t) = \left. \frac{d}{ds} \rho(t+s) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \rho(t)\rho(s) \right|_{s=0} = DL_{\rho(t)}(\dot{\rho}(0)) = DL_{\rho(t)}(\Phi_*(v))$$

und $\rho(0) = \Phi(e) = e$. Es folgt

$$\exp(\Phi_*(v)) = \rho(1) = \Phi(\gamma(1)) = \Phi(\exp(v)).$$

□

Beispiel 3.13 Für den Lie-Gruppen-Homomorphismus $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$ ist $\det_*(B) = \mathrm{Tr}(B)$. Somit gilt $e^{\mathrm{Tr}(B)} = \det(e^B)$ für alle $B \in M(n, \mathbb{K})$. □

Im Allgemeinen ist $\exp(v)\exp(w) \neq \exp(v+w)$. Der Fehler kann wie folgt abgeschätzt werden.

Satz 3.14 *Es gilt*

$$\exp(tv)\exp(tw) = \exp(t(v+w) + O(t^2))$$

für $t \rightarrow 0$ und beliebige $v, w \in \mathfrak{g}$.

Beweis. Sei $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis von \mathfrak{g} und sei $W \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Umgebung von 0 derart, dass die Abbildung $\psi : W \rightarrow \psi(W)$, $\psi(x) := \exp(x^1 v_1 + \dots + x^m v_m)$, ein Diffeomorphismus ist. Wir wählen eine offene Umgebung $W' \subset W$ von 0 derart, dass $\psi(x)\psi(y) \in \psi(W)$ für alle $x, y \in W'$, und definieren $\Psi = (\Psi^1, \dots, \Psi^m) : W' \times W' \rightarrow W$ durch $\Psi(x, y) := \psi^{-1}(\psi(x)\psi(y))$. Wegen $\Psi(x, 0) = x$ und $\Psi(0, y) = y$ ist

$$\frac{\partial \Psi^i}{\partial x^k}(0, 0) = \frac{\partial \Psi^i}{\partial y^k}(0, 0) = \delta_k^i \quad \text{für } i, k = 1, \dots, m.$$

Laut Taylorscher Formel gilt somit

$$\begin{aligned} \Psi^i(x, y) &= \Psi^i(0, 0) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \Psi^i}{\partial x^k}(0, 0)x^k + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \Psi^i}{\partial y^k}(0, 0)y^k + O(\|(x, y)\|^2) \\ &= x^i + y^i + O(\|(x, y)\|^2) \end{aligned}$$

für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Folglich ist

$$\Psi(tx, ty) = t(x+y) + O(t^2)$$

für $t \rightarrow 0$ und beliebige $x, y \in \mathbb{R}^m$, womit der Satz bewiesen ist. □

Bemerkung 3.15 Es gibt verschiedene Verschärfungen von Satz 3.14, darunter die so genannte **Campbell-Hausdorff-Formel**. Insbesondere kann man zeigen, dass

$$\exp(v)\exp(w) = \exp(v+w + O([v, w]))$$

für $(v, w) \rightarrow (0, 0)$. Folglich gilt $\exp(v)\exp(w) = \exp(v+w)$, falls $[v, w] = 0$. □

Bemerkung 3.16 Die Exponentialabbildung ist auch für zusammenhängende Liesche Gruppen nicht notwendig surjektiv. Betrachten wir zum Beispiel die Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Sei $B \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Dann existieren eine Matrix $C \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ und $z, w \in \mathbb{C}$ derart, dass

$$B = C^{-1} \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & -z \end{pmatrix} C.$$

Damit ist

$$\exp(B) = e^B = C^{-1} \begin{pmatrix} e^z & w \\ 0 & e^{-z} \end{pmatrix} C$$

und demzufolge $\text{Tr}(\exp(B)) = e^z + e^{-z}$. Wegen

$$\det(B - z\mathbf{1}_2) = z^2 - \text{Tr}(B)z + \det(B) = z^2 + \det(B)$$

gilt außerdem $z \in \mathbb{R}$ oder $z \in i\mathbb{R}$. Es folgt, dass

$$\text{Tr}(\exp(B)) = 2 \cosh(z) \geq 2$$

für $z \in \mathbb{R}$ und

$$\text{Tr}(\exp(B)) = 2 \cos(iz) \geq -2$$

für $z \in i\mathbb{R}$. Demnach gilt $\text{Tr}(\exp(B)) \geq -2$ für alle $B \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Also ist $\exp(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})) \neq \text{SL}(2, \mathbb{R})$. \square

4 Die adjungierten Darstellungen

Definition 4.1 Sei E ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum, G eine Liesche Gruppe und \mathfrak{a} eine Lie-Algebra. Eine **Darstellung von G über E** ist ein Lie-Gruppen-Homomorphismus $\kappa : G \rightarrow \mathrm{GL}(E)$. Eine **Darstellung von \mathfrak{a} über E** ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus $\tau : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{gl}(E)$. Eine Darstellung heißt **treu** $:\Leftrightarrow$ Sie ist injektiv.

Beispiel 4.2 Offensichtlich sind die konstanten Abbildungen $g \in G \mapsto \mathrm{id}_E \in \mathrm{GL}(E)$ und $v \in \mathfrak{a} \mapsto 0 \in \mathfrak{gl}(E)$ Darstellungen von G bzw. \mathfrak{a} über E . Diese Darstellungen heißen **triviale Darstellungen**. \square

Beispiel 4.3 Sei G eine Liesche Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ und \mathfrak{a} eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Dann sind die Inklusionsabbildungen $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ und $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = \mathfrak{gl}(\mathbb{K}^n)$ treue Darstellungen von G bzw. \mathfrak{a} über \mathbb{K}^n . \square

Beispiel 4.4 Sei \mathfrak{a} eine endlichdimensionale Lie-Algebra. Dann ist die durch $\tau(v)(w) := [v, w]$ definierte Abbildung $\tau : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$ eine Darstellung von \mathfrak{a} über \mathfrak{a} . Dafür ist einzusehen, dass

$$\tau([v_1, v_2]) = \tau(v_1) \circ \tau(v_2) - \tau(v_2) \circ \tau(v_1)$$

für alle $v_1, v_2 \in \mathfrak{g}$, d.h.

$$[[v_1, v_2], w] = [v_1, [v_2, w]] - [v_2, [v_1, w]]$$

für alle $v_1, v_2, w \in \mathfrak{g}$. Die letzte Beziehung ist zur Jacobi-Identität äquivalent. \square

Beispiel 4.5 Bezeichne $\mathbb{R}_n[s, t]$ den Vektorraum der homogenen Polynome in s und t vom Grad n . Die durch

$$\kappa(A)(P) := P \circ A^{-1}$$

definierte Abbildung $\kappa : \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{R}_n[s, t])$ ist eine Darstellung von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}_n[s, t]$. \square

Beispiel 4.6 Seien B_1, B_2, B_3 wie in Beispiel 2.34. Dann definiert

$$\tau(B_1) := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \tau(B_2) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau(B_3) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Darstellung $\tau : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^3)$ der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ über \mathbb{R}^3 . \square

Wir definieren $\mathrm{Ad} : G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ durch $\mathrm{Ad}(g) := (\alpha_g)_*$.

Satz 4.7 Die Abbildung $\mathrm{Ad} : G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ ist eine Darstellung der Lieschen Gruppe G über ihrer Lie-Algebra \mathfrak{g} .

Beweis. Für $g, h \in G$ gilt

$$\mathrm{Ad}(gh) = (\alpha_{gh})_* = (\alpha_g \circ \alpha_h)_* = (\alpha_g)_* \circ (\alpha_h)_* = \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{Ad}(h).$$

Sei $v \in \mathfrak{g}$ und sei $\gamma : I \rightarrow G$ eine glatte Kurve auf G mit $\dot{\gamma}(0) = v$. Dann ist $\Phi : G \times I \rightarrow G$, $\Phi(g, t) := \alpha_g(\gamma(t))$, und folglich auch

$$g \in G \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial t}(g, 0) = \mathrm{Ad}(g)(v) \in \mathfrak{g}$$

glatt. \square

Definition 4.8 Die Darstellung $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ heißt die **adjungierte Darstellung von G** .

Nach Satz 2.23 induziert jede Darstellung einer Lieschen Gruppen G eine Darstellung ihrer Lie-Algebra \mathfrak{g} . Genauer gilt

Satz 4.9 Ist $\kappa : G \rightarrow \text{GL}(E)$ eine Darstellung von G , so ist ihr Differential $\kappa_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(E)$ eine Darstellung von \mathfrak{g} . \square

Definition 4.10 Die Darstellung $\text{ad} := \text{Ad}_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ wird die **adjungierte Darstellung von \mathfrak{g}** genannt.

Satz 4.11 Für alle $v \in \mathfrak{g}$ gilt $\exp(\text{ad}(v)) = \text{Ad}(\exp(v))$.

Beweis. Die Behauptung ist ein Spezialfall von Satz 3.12. \square

Beispiel 4.12 Sei G eine Liesche Untergruppe von $\text{GL}(n, \mathbb{K})$. Für $A \in G$ und $B \in \mathfrak{g}$ ist dann $\text{Ad}(A)(B) = ABA^{-1}$. Folglich ist

$$\text{ad}(B_1)(B_2) = \left. \frac{d}{dt} \text{Ad}(\exp(tB_1))(B_2) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \exp(tB_1) B_2 \exp(-tB_1) \right|_{t=0} = B_1 B_2 - B_2 B_1 .$$

Das heißt, für alle $B_1, B_2 \in \mathfrak{g}$ gilt $\text{ad}(B_1)(B_2) = [B_1, B_2]$. \square

Die letzte Beziehung gilt auch allgemein.

Satz 4.13 Sei G eine Liesche Gruppe und \mathfrak{g} ihre Lie-Algebra. Dann ist $\text{ad}(v)(w) = [v, w]$ für alle $v, w \in \mathfrak{g}$.

Bevor wir diesen Satz beweisen, erinnern wir daran, dass die Lie-Ableitung eines Vektorfeldes Y in Richtung eines Vektorfeldes X mit dem Kommutator $[X, Y]$ übereinstimmt. Es gilt also

Satz 4.14 Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und sei (Φ_t) eine glatte einparametrische Familie von Diffeomorphismen $\Phi_t : M \rightarrow M$ derart, dass $\Phi_0 = \text{id}_M$ und

$$\left. \frac{d}{dt} \Phi_t(p) \right|_{t=0} = -X(p)$$

für alle $p \in M$. Dann ist

$$\left. \frac{d}{dt} (\Phi_t)_* Y \right|_{t=0} = [X, Y] .$$

\square

Beweis von Satz 4.13. Seien $v, w \in \mathfrak{g}$ und seien $X, Y \in \mathfrak{X}^G(G)$ mit $X(e) = v$ und $Y(e) = w$. Weiter setzen wir $\Phi_t := R_{\exp(-tv)}$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $\Phi_0 = \text{id}_G$ und

$$\left. \frac{d}{dt} \Phi_t(g) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} g \exp(-tv) \right|_{t=0} = DL_g \left(\left. \frac{d}{dt} \exp(-tv) \right|_{t=0} \right) = -DL_g(v) = -X(g) .$$

Mit Satz 4.14 folgt

$$\begin{aligned} \text{ad}(v)(w) &= \left. \frac{d}{dt} \text{Ad}(\exp(tv))(w) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} DR_{\exp(-tv)}(DL_{\exp(tv)}(w)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} D\Phi_t(Y(\Phi_{-t}(e))) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} ((\Phi_t)_* Y)(e) \right|_{t=0} = [X, Y](e) = [v, w] . \end{aligned}$$

\square

Definition 4.15 (i) Zwei Darstellungen $\kappa_1 : G \rightarrow \mathrm{GL}(E_1)$ und $\kappa_2 : G \rightarrow \mathrm{GL}(E_2)$ einer Lieschen Gruppe G heißen **äquivalent** $:\Leftrightarrow$ Es existiert ein Isomorphismus $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ mit $\phi \circ \kappa_1(g) = \kappa_2(g) \circ \phi$ für alle $g \in G$.

(ii) Zwei Darstellungen $\tau_1 : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{gl}(E_1)$ und $\tau_2 : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{gl}(E_2)$ einer Lie-Algebra \mathfrak{a} heißen **äquivalent** $:\Leftrightarrow$ Es existiert ein Isomorphismus $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ mit $\phi \circ \tau_1(v) = \tau_2(v) \circ \phi$ für alle $v \in \mathfrak{a}$.

Satz 4.16 Zwei Darstellungen $\kappa_1 : G \rightarrow \mathrm{GL}(E_1)$ und $\kappa_2 : G \rightarrow \mathrm{GL}(E_2)$ einer zusammenhängenden Lieschen Gruppe G sind genau dann äquivalent, wenn die Darstellungen $(\kappa_1)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(E_1)$ und $(\kappa_2)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(E_2)$ äquivalent sind.

Zum Beweis dieses Satzes benutzen wir

Satz 4.17 Sei G eine zusammenhängende Liesche Gruppe und seien $\Phi_1, \Phi_2 : G \rightarrow H$ zwei Lie-Gruppen-Homomorphismen. Gilt $(\Phi_1)_* = (\Phi_2)_*$, so gilt auch $\Phi_1 = \Phi_2$.

Beweis. Gelte $(\Phi_1)_* = (\Phi_2)_*$. Nach Satz 3.12 ist dann

$$\Phi_1(\exp(v)) = \exp((\Phi_1)_*(v)) = \exp((\Phi_2)_*(v)) = \Phi_2(\exp(v))$$

für alle $v \in \mathfrak{g}$. Also stimmen Φ_1 und Φ_2 nach Folgerung 3.5 auf einer Umgebung von e überein. Mit Satz 1.26 folgt $\Phi_1 = \Phi_2$. \square

Beweis von Satz 4.16. Sei G eine zusammenhängende Liesche Gruppe und seien $\kappa_i : G \rightarrow \mathrm{GL}(E_i)$, $i = 1, 2$, zwei Darstellungen von G . Ist $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ ein Isomorphismus, so sei $\kappa_2^\phi : G \rightarrow \mathrm{GL}(E_2)$ durch $\kappa_2^\phi(g) := \phi^{-1} \circ \kappa_2(g) \circ \phi$ für $g \in G$ definiert. Offensichtlich ist κ_2^ϕ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus und

$$(\kappa_2^\phi)_*(v) = \phi^{-1} \circ (\kappa_2)_*(v) \circ \phi$$

für alle $v \in \mathfrak{g}$. Sind κ_1 und κ_2 äquivalent, so gibt es einen Isomorphismus $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ mit $\kappa_1 = \kappa_2^\phi$. Dann gilt auch $(\kappa_1)_* = (\kappa_2^\phi)_*$, also

$$(\kappa_1)_*(v) = \phi^{-1} \circ (\kappa_2)_*(v) \circ \phi$$

für alle $v \in \mathfrak{g}$ und somit sind $(\kappa_1)_*$ und $(\kappa_2)_*$ äquivalent. Sind jetzt umgekehrt $(\kappa_1)_*$ und $(\kappa_2)_*$ äquivalent, so gibt es einen Isomorphismus $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ mit $(\kappa_1)_* = (\kappa_2^\phi)_*$. Mit Satz 4.17 folgt $\kappa_1 = \kappa_2^\phi$, also die Äquivalenz von κ_1 und κ_2 . \square

Beispiel 4.18 Sei

$$B_1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\{B_1, B_2, B_3\}$ eine Basis von $\mathfrak{o}(3)$ und es gilt

$$[B_1, B_2] = B_3, \quad [B_1, B_3] = -B_2, \quad [B_2, B_3] = B_1.$$

Hiermit berechnet man, dass die Matrixdarstellung von $\mathrm{ad}(B_i)$ bezüglich der von den Matrizen $C_1 := B_3$, $C_2 := -B_2$ und $C_3 := B_1$ gebildeten Basis von $\mathfrak{o}(3)$ gerade B_i ist. Also sind die Inklusion $\mathfrak{o}(3) \hookrightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ und $\mathrm{ad} : \mathfrak{o}(3) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{o}(3))$ äquivalente Darstellungen der Lie-Algebra $\mathfrak{o}(3)$. Nach Satz 4.16 sind dann auch die Darstellungen $\mathrm{SO}(3) \hookrightarrow \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ und $\mathrm{Ad} : \mathrm{SO}(3) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{o}(3))$ äquivalent. Dagegen sind die Darstellungen $\mathrm{O}(3) \hookrightarrow \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ und $\mathrm{Ad} : \mathrm{O}(3) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{o}(3))$ nicht äquivalent. Während nämlich die erste eine treue Darstellung ist, ist die adjungierte Darstellung von $\mathrm{O}(3)$ wegen $\mathrm{Ad}(-A) = \mathrm{Ad}(A)$ für $A \in \mathrm{O}(3)$ nicht treu. \square

5 Wirkungen und homogene Räume

Sei G eine Liesche Gruppe und M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Definition 5.1 Eine **Linkswirkung** (bzw. **Rechtswirkung**) von G auf M ist eine glatte Abbildung

$$(g, p) \in G \times M \mapsto W_g(p) \in M$$

mit den folgenden Eigenschaften.

- (a) Für alle $g, h \in G$ und $p \in M$ gilt $W_g(W_h(p)) = W_{gh}(p)$ (bzw. $W_g(W_h(p)) = W_{hg}(p)$).
- (b) Für mindestens ein $g \in G$ ist die Abbildung $W_g : p \in M \rightarrow W_g(p) \in M$ surjektiv.

Im Fall einer Linkswirkung schreiben wir gp oder $L_g(p)$ statt $W_g(p)$. Liegt eine Rechtswirkung vor, so sei $pg := R_g(p) := W_g(p)$ gesetzt. Hat man eine Wirkung von G auf M , so sagt man auch, dass G (von links bzw. von rechts) auf M wirkt, und nennt das Paar (M, G) eine **Liesche Transformationsgruppe**.

Lemma 5.2 Ist $(g, p) \in G \times M \mapsto R_g(p) \in M$ eine Rechtswirkung von G auf M , so definiert $L_g(p) := R_{g^{-1}}(p)$ eine Linkswirkung von G auf M .

Beweis. Das rechnet man einfach nach. □

Also können wir uns im Folgenden auf Linkswirkungen beschränken.

Lemma 5.3 Für die Abbildungen $L_g : M \rightarrow M$ einer jeden Wirkung von G auf M gilt:

- (i) $L_e = \text{id}_M$.
- (ii) $L_{g^{-1}} = L_g^{-1}$.
- (iii) L_g ist ein Diffeomorphismus.

Beweis. (i) Für alle $g \in G$ und $p \in M$ ist $e(gp) = (eg)p = gp$. Da L_g für wenigstens ein $g \in G$ surjektiv ist, folgt die Behauptung.

(ii) Die Behauptung ist eine Konsequenz von (i) und $L_g \circ L_{g^{-1}} = L_{g^{-1}} \circ L_g = L_e$.

(iii) Da die Abbildungen L_g nach Definition 5.1 glatt sind, ergibt sich die Behauptung aus (ii). □

Satz 5.4 Für jede Wirkung von G auf M ist die Menge $K := \{g \in G : L_g = \text{id}_M\}$ ein abgeschlossener Normalteiler von G .

Beweis. Sei $a \in K$ und $g \in G$. Dann ist

$$L_{gag^{-1}} = L_g \circ L_a \circ L_g^{-1} = L_g \circ \text{id}_M \circ L_g^{-1} = \text{id}_M$$

und somit $gag^{-1} \in K$. Da K offensichtlich eine Untergruppe von G ist, ist K damit tatsächlich ein Normalteiler. Wir zeigen, dass $G \setminus K$ offen ist. Sei $h \in G \setminus K$. Dann gibt es ein $p \in M$ mit $hp \neq p$. Sei V eine offene Umgebung von hp mit $p \notin V$. Da die Abbildung $g \in G \mapsto gp \in M$ stetig ist, finden wir eine offene Umgebung U von h mit $gp \in V$ für alle $g \in U$. Insbesondere gilt $gp \neq p$ für alle $g \in U$. Folglich ist $U \subset G \setminus K$ und somit $G \setminus K$ offen. □

Definition 5.5 Eine Wirkung von G auf M heißt

- (i) **effektiv** : \iff Nur für $g = e$ gilt $L_g = \text{id}_M$.
- (ii) **einfach** : \iff Nur für $g = e$ hat die Abbildung L_g einen Fixpunkt.
- (iii) **transitiv** : \iff Zu je zwei Punkten $p, q \in M$ gibt es ein $g \in G$ mit $gp = q$.
- (iv) **einfach transitiv** : \iff Sie ist einfach und transitiv.

Definition 5.6 Eine Liesche Transformationsgruppe (M, G) heißt ein **homogener Raum** : \iff G wirkt transitiv auf M .

Statt homogener Raum sagt man auch **Kleinscher Raum**.

Lemma 5.7 (i) Eine Wirkung von G auf M ist genau dann einfach transitiv, wenn zu je zwei Punkten $p, q \in M$ genau ein $g \in G$ mit $gp = q$ existiert.

(ii) Ist eine Wirkung einfach, so ist sie auch effektiv.

Beweis. Wirke G einfach transitiv auf M und seien $p, q \in M$. Dann gibt es ein $g \in G$ mit $gp = q$. Gilt auch $hp = q$, so folgt $gp = hq$ und weiter $h^{-1}gp = p$. Also ist p ein Fixpunkt von $L_{h^{-1}g}$. Da die Wirkung einfach ist, muss dann $h^{-1}g = e$, d.h. $g = h$ gelten. Die restlichen Aussagen sind offensichtlich. \square

Definition 5.8 Wirke G auf M und sei $p \in M$. Dann heißt die Menge $Gp := \{gp : g \in G\}$ der **Orbit** oder die **Bahn** von p unter G .

Lemma 5.9 Für eine G -Wirkung auf M sind folgende Eigenschaften äquivalent.

- (1) Die Wirkung ist transitiv.
- (2) Für alle $p \in M$ ist $Gp = M$.
- (3) Es existiert ein $p \in M$ mit $Gp = M$.

Beweis. Die Implikationen (1) \implies (2) und (2) \implies (3) sind offensichtlich. Wir sind demnach fertig, wenn wir (3) \implies (1) gezeigt haben. Sei also $p \in M$ mit $Gp = M$ und seien $q_1, q_2 \in M$ beliebig. Dann existieren $g_1, g_2 \in G$ mit $g_1p = q_1$ und $g_2p = q_2$. Damit ist $g_2g_1^{-1}q_1 = g_2g_1^{-1}g_1p = g_2p = q_2$. \square

Definition 5.10 Wirke G auf M und sei $p \in M$. Dann heißt $G(p) := \{g \in G : gp = p\}$ der **Stabilisator** oder die **Isotropiegruppe** von p .

Man sieht unmittelbar, dass $G(p)$ eine abgeschlossene Untergruppe von G ist.

Satz 5.11 Sei (M, G) ein homogener Raum. Dann sind die Stabilisatoren $G(p), G(q)$ zweier Punkte $p, q \in M$ konjugierte Untergruppen.

Beweis. Seien $p, q \in M$. Nach Voraussetzung gibt es ein $g \in G$ mit $gp = q$. Ist dann $h \in G(p)$, so gilt

$$ghg^{-1}q = ghg^{-1}gp = ghp = gp = q.$$

Demnach ist $gG(p)g^{-1} \subset G(q)$. Genauso sieht man $g^{-1}G(q)g \subset G(p)$. Also ist $G(q) = gG(p)g^{-1}$. \square

Beispiel 5.12 Die Abbildung $(g, p) \in G \times M \mapsto p \in M$ ist eine Wirkung auf M , die so genannte **triviale** Wirkung von G auf M . \square

Beispiel 5.13 Die Abbildung $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ ist eine einfach transitive Wirkung von G auf G . \square

Beispiel 5.14 Die Abbildung $(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \mapsto e^{it}z \in \mathbb{C}$ ist eine Wirkung von \mathbb{R} auf \mathbb{C} . Da $L_{2k\pi} = \text{id}_{\mathbb{C}}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, ist diese Wirkung nicht effektiv. Wegen $L_t(0) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist sie auch nicht transitiv. \square

Beispiel 5.15 Durch $(a, z) \in U(1) \times \mathbb{C} \mapsto az \in \mathbb{C}$ ist eine Wirkung von $U(1)$ auf \mathbb{C} definiert. Diese Wirkung ist effektiv. Wegen $L_a(0) = 0$ für alle $a \in U(1)$ ist sie aber weder frei noch transitiv. \square

Eine Verallgemeinerung der letzten beiden Beispiele ist

Beispiel 5.16 Sei $\kappa : G \rightarrow \text{GL}(E)$ eine Darstellung von G über E . Dann ist $(g, \mathbf{v}) \in G \times E \mapsto \kappa(g)(\mathbf{v}) \in E$ eine Wirkung von G auf E . Da $\kappa(g)(0) = 0$ für alle $g \in G$, ist diese Wirkung dann und nur dann einfach (bzw. transitiv), wenn $G = \{e\}$ (bzw. $E = \{0\}$). Sie ist genau dann effektiv, wenn κ treu ist. \square

Im Folgenden geben wir Beispiele für homogene Räume an. Die Glattheit der Abbildung $(g, p) \mapsto gp$ ist dabei stets offensichtlich.

Beispiel 5.17 Die affine Gruppe $\text{Aff}(E)$ eines endlichdimensionalen Vektorraumes E wirkt vermöge

$$(A, \mathbf{v})\mathbf{w} := A\mathbf{w} + \mathbf{v}$$

für $(A, \mathbf{v}) \in \text{Aff}(E)$ und $\mathbf{w} \in E$ auf E . Ist nämlich auch $(A', \mathbf{v}') \in \text{Aff}(E)$, so gilt

$$\begin{aligned} (A, \mathbf{v})((A', \mathbf{v}')\mathbf{w}) &= (A, \mathbf{v})(A'\mathbf{w} + \mathbf{v}') = AA'\mathbf{w} + A\mathbf{v}' + \mathbf{v} \\ &= (AA', A\mathbf{v}' + \mathbf{v})\mathbf{w} = ((A, \mathbf{v})(A', \mathbf{v}'))\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Diese Wirkung ist transitiv, denn für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ gilt $(\text{id}_E, \mathbf{w} - \mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Aus $(A, \mathbf{v})0 = \mathbf{v}$ erhält man sofort, dass $\text{GL}(E) \times \{0\}$ der Stabilisator von 0 ist. \square

Beispiel 5.18 Sei $A \in \text{SO}(n+1)$. Dann gilt $\|Ax\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, wobei wir hier und im Weiteren die Elemente von \mathbb{R}^{n+1} als Spaltenvektoren verstehen. Ist also $\xi \in S^n$, so ist auch $A\xi \in S^n$. Somit wirkt $\text{SO}(n+1)$ auf S^n . Dass diese Wirkung transitiv ist, sieht man folgendermaßen. Sei $(\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ eine geordnete Orthonormalbasis in der üblichen Orientierung von \mathbb{R}^{n+1} , sei $A \in M(n+1, \mathbb{R})$ die Matrix, deren Spalten die Vektoren ξ_1, \dots, ξ_{n+1} sind, und sei ξ_N der Nordpol von S^n , d.h. $\xi_N := (0, \dots, 0, 1)$. Dann ist $A \in \text{SO}(n+1)$ und $A\xi_N = \xi_{n+1}$. Folglich existiert zu jedem $\xi \in S^n$ ein $A \in \text{SO}(n+1)$ mit $A\xi_N = \xi$, was mit Lemma 5.9 die Transitivität der Wirkung liefert. Weiter berechnet man, dass der Stabilisator von ξ_N das Bild der Einbettung

$$A_0 \in \text{SO}(n) \mapsto \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SO}(n+1)$$

ist.

Diese Beschreibung der Sphären als homogene Räume ist nicht die einzige. Versteht man zum Beispiel S^{2n+1} vermöge $S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \|z\| = 1\}$ als Teilmenge von \mathbb{C}^{n+1} , so induziert die kanonische Wirkung von $U(n+1)$ auf \mathbb{C}^{n+1} eine transitive Wirkung von $U(n+1)$ auf S^{2n+1} , für die der Stabilisator des Nordpols zu $U(n)$ isomorph ist. \square

Beispiel 5.19 Sei $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ die kanonische Projektion auf den reell projektiven Raum \mathbb{RP}^n . Dann ist durch $A\pi(\xi) := \pi(A\xi)$ für $A \in \text{SO}(n+1)$ und $\xi \in S^n$ eine Wirkung von $\text{SO}(n+1)$ auf \mathbb{RP}^n definiert. Diese Wirkung ist nach Beispiel 5.18 transitiv und der Stabilisator von $\pi(\xi_N)$ ist

$$\text{S}(\text{O}(n) \times \text{O}(1)) := \left\{ \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & \det(A_0) \end{pmatrix} : A_0 \in \text{O}(n) \right\}.$$

\square

Beispiel 5.20 Bezeichne \mathcal{H} die obere Halbebene von \mathbb{C} , d.h. $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$$

und sei $z \in \mathcal{H}$. Dann ist $cz + d \neq 0$. Wir setzen

$$Az := \frac{az + b}{cz + d}. \quad (5.1)$$

Wegen

$$2i \text{Im}(Az) = Az - \overline{Az} = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} = \frac{(ad - bc)(z - \bar{z})}{|cz + d|^2} = \frac{2i \text{Im}(z)}{|cz + d|^2}$$

ist $Az \in \mathcal{H}$. Sei auch

$$A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} A(A'z) &= A \frac{a'z + b'}{c'z + d'} = \frac{a \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + b}{c \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + d} = \frac{a(a'z + b') + b(c'z + d')}{c(a'z + b') + d(c'z + d')} \\ &= \frac{(aa' + bc')z + ab' + bd'}{(ca' + dc')z + cb' + dd'} = (AA')z. \end{aligned}$$

Also ist durch (5.1) eine Wirkung von $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ auf \mathcal{H} definiert. Ist $x := \text{Re}(z)$, $y := \text{Im}(z)$ und

$$A_z := \begin{pmatrix} y^{1/2} & y^{-1/2}x \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix},$$

so ist $A_z \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ und $A_z i = z$. Das impliziert mit Lemma 5.9, dass $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ transitiv wirkt. Da $Ai = i$ genau dann gilt, wenn $a = d$ und $b = -c$, und da wegen $\det(A) = 1$ dann auch $a^2 + b^2 = 1$ gilt, ist der Stabilisator von i gerade $\text{SO}(2)$. \square

6 Abgeschlossene Untergruppen

In diesem Abschnitt sei G eine Liesche Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe von G . Wir werden beweisen, dass H eine Untermannigfaltigkeit und somit eine Liesche Untergruppe von G ist und dass der Faktorraum G/H ein homogener Raum ist.

Sei $\| \cdot \|$ irgendeine Norm auf der Lie-Algebra \mathfrak{g} von G und sei

$$\mathfrak{h}' := \{v \in \mathfrak{g} : \exp(tv) \in H \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}.$$

Lemma 6.1 Sei $(v_k)_{k \geq k_0}$ eine Folge in $\mathfrak{g} \setminus \{0\}$ derart, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0$ und $\exp(v_k) \in H$ für alle $k \geq k_0$, und konvergiere die Folge $(v_k / \|v_k\|)_{k \geq k_0}$ gegen ein $v \in \mathfrak{g}$. Dann gilt $v \in \mathfrak{h}'$.

Beweis. Sei $t > 0$ fixiert und sei $m_k := \max\{l \in \mathbb{N}_0 : l\|v_k\| < t\}$. Dann haben wir

$$m_k \|v_k\| < t \leq (m_k + 1)\|v_k\| = m_k \|v_k\| + \|v_k\|,$$

d.h.

$$0 < t - m_k \|v_k\| \leq \|v_k\|.$$

Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0$ muss somit $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k \|v_k\| = t$ und damit auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_k v_k = \lim_{k \rightarrow \infty} m_k \|v_k\| \frac{v_k}{\|v_k\|} = tv$$

gelten, was aufgrund der Stetigkeit der Exponentialabbildung $\lim_{k \rightarrow \infty} \exp(m_k v_k) = \exp(tv)$ impliziert. Da H abgeschlossen ist und da nach Voraussetzung $\exp(m_k v_k) = \exp(v_k)^{m_k} \in H$ für alle $k \geq k_0$, folgt $\exp(tv) \in H$. Wegen $\exp(-tv) = \exp(tv)^{-1}$ ist dann auch $\exp(-tv) \in H$. \square

Lemma 6.2 Die Menge \mathfrak{h}' ist ein Unterraum von \mathfrak{g} .

Beweis. Seien $v, w \in \mathfrak{h}'$. Offensichtlich ist dann $\lambda v \in \mathfrak{h}'$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Zu zeigen bleibt, dass $v + w \in \mathfrak{h}'$. Ist $v + w = 0$, so gilt die Aussage trivialerweise. Sei also $v + w \neq 0$. Sei $V \subset \mathfrak{g}$ eine offene Umgebung von 0 derart, dass $\exp|_V : V \rightarrow \exp(V)$ ein Diffeomorphismus ist, und sei die offene Umgebung $V' \subset V$ von 0 so gewählt, dass auch $-V' \subset V$ und $\exp(V')^2 \subset \exp(V)$. Des Weiteren sei $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $k^{-1}v \in V'$ und $k^{-1}w \in V'$ für alle $k \geq k_0$. Wir definieren $u_k \in V$ für $k \geq k_0$ durch

$$\exp(u_k) = \exp(k^{-1}v) \exp(k^{-1}w).$$

Dann gilt $\exp(u_k) \in H$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$. Wegen $v + w \neq 0$ und $-V' \subset V$ ist außerdem $u_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$. Weiter impliziert Satz 3.14, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} k u_k = v + w$ und folglich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{\|u_k\|} = \frac{v + w}{\|v + w\|}.$$

Indem wir jetzt Lemma 6.1 anwenden, erhalten wir $v + w \in \mathfrak{h}'$. \square

Sei \mathfrak{m} ein zu \mathfrak{h}' komplementärer Unterraum, also ein Unterraum von \mathfrak{g} mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{m}$.

Lemma 6.3 Es existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathfrak{m}$ von 0 derart, dass $\exp(w) \notin H$ für alle $w \in U \setminus \{0\}$.

Beweis. Angenommen die Behauptung ist falsch. Dann existiert eine Folge $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathfrak{m} \setminus \{0\}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 0$ und $\exp(w_k) \in H$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $C := \{w \in \mathfrak{m} : 1 \leq \|w\| \leq 2\}$. Wir wählen zu jedem hinreichend großen $k \in \mathbb{N}$ ein $m_k \in \mathbb{N}$ derart, dass $m_k w_k \in C$. Da C kompakt ist, können wir annehmen, dass die Folge $(m_k w_k)$ gegen ein $w' \in C$ konvergiert. Damit gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{w_k}{\|w_k\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k w_k}{\|m_k w_k\|} = \frac{w'}{\|w'\|}.$$

Mit Lemma 6.1 folgt $w' \in \mathfrak{h}'$, was ein Widerspruch zu $w' \in \mathfrak{m}$ und $w' \neq 0$ ist. \square

Nach diesen Vorbereitungen können wir beweisen:

Satz 6.4 *Sei G eine Liesche Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe von G . Dann ist H eine Untermannigfaltigkeit und somit eine Liesche Untergruppe von G . Die Lie-Algebra von H stimmt mit \mathfrak{h}' überein.*

Beweis. Sei $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ wieder ein komplementärer Unterraum zu \mathfrak{h}' und sei $\Psi : \mathfrak{h}' \times \mathfrak{m} \rightarrow G$ durch $\Psi(v, w) := \exp(w)\exp(v)$ für $v \in \mathfrak{h}'$ und $w \in \mathfrak{m}$ definiert. Da $D\Psi|_{(0,0)}(v, w) = v + w$, ist $D\Psi|_{(0,0)}$ ein Isomorphismus. Also existieren offene Umgebungen $U' \subset \mathfrak{h}'$ und $U \subset \mathfrak{m}$ von 0 derart, dass $\Psi|_{U' \times U} : U' \times U \rightarrow V := \Psi(U' \times U)$ ein Diffeomorphismus ist. Dabei können wir nach Lemma 6.3 voraussetzen, dass $\exp(w) \notin H$ für $w \in U \setminus \{0\}$. Folglich gilt $H \cap V = \Psi(U' \times \{0\})$. Ist nun $h \in H$, so ist $\Psi_h := L_h \circ \Psi|_{U' \times U}$ ein Diffeomorphismus auf die offene Umgebung $V_h := L_h(V)$ von h in G und $H \cap V_h = \Psi_h(U' \times \{0\})$. Damit ist gezeigt, dass H eine Untermannigfaltigkeit von G ist. Der zweite Teil der Behauptung folgt aus

$$T_e H = D\Psi|_{(0,0)}(\mathfrak{h}' \times \{0\}) = \mathfrak{h}'.$$

\square

Beispiel 6.5 Die Gruppe

$$S(O(m) \times O(k)) := \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} : A_1 \in O(m), A_2 \in O(k) \text{ und } \det(A_1) = \det(A_2) \right\}$$

ist eine abgeschlossene Untergruppe sowohl von $O(m+k)$ als auch von $GL(m+k, \mathbb{R})$. Nach Satz 6.4 ist $S(O(m) \times O(k))$ damit eine Liesche Untergruppe von $O(m+k)$ und von $GL(m+k, \mathbb{R})$. \square

Bemerkung 6.6 Man kann zeigen, dass jede Liesche Untergruppe H einer Lieschen Gruppe G abgeschlossen ist. Also stimmen nach Satz 6.4 die Lieschen Untergruppen von G mit den abgeschlossenen Untergruppen von G überein. \square

Sei H weiterhin eine abgeschlossene Untergruppe von G und sei $\pi : G \rightarrow G/H$ die kanonische Projektion auf den Faktorraum $G/H := \{gH : g \in G\}$, d.h. $\pi(g) := gH$ für $g \in G$. Wir versehen G/H mit der Quotiententopologie. Eine Menge $W \subset G/H$ ist damit genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(W) \subset G$ offen ist. Außerdem definieren wir $\mathbf{l}_g : G/H \rightarrow G/H$ für $g \in G$ durch $\mathbf{l}_g(aH) := gaH$, also durch $\mathbf{l}_g \circ \pi = \pi \circ L_g$. Offensichtlich gilt $\mathbf{l}_{g_1 g_2} = \mathbf{l}_{g_1} \circ \mathbf{l}_{g_2}$ für $g_1, g_2 \in G$ und $\mathbf{l}_e = \text{id}_{G/H}$.

Satz 6.7 (i) *Die kanonische Projektion $\pi : G \rightarrow G/H$ ist stetig und offen.*

(ii) *Der Faktorraum G/H besitzt eine abzählbare Basis.*

(iii) *Für jedes $g \in G$ ist $\mathbf{l}_g : G/H \rightarrow G/H$ ein Homöomorphismus.*

(iv) *Der Faktorraum G/H ist Hausdorffsch.*

Beweis. (i) Die Stetigkeit von π folgt sofort aus der Definition der Quotiententopologie. Sei $V \subset G$ offen. Dann ist $R_h(V)$ für jedes $h \in H$ offen. Somit ist auch

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g \in V} L_g(H) = \bigcup_{h \in H} R_h(V)$$

offen, was bedeutet, dass $\pi(V)$ offen ist.

(ii) Die Behauptung folgt aus (i) und der Tatsache, dass G eine abzählbare Basis besitzt.

(iii) Es genügt einzusehen, dass $\mathbf{l}_g : G/H \rightarrow G/H$ stetig ist. Sei $W \subset G/H$ offen. Da

$$\pi^{-1}(\mathbf{l}_g^{-1}(W)) = L_g^{-1}(\pi^{-1}(W))$$

und da $L_g : G \rightarrow G$ stetig ist, ist dann $\pi^{-1}(\mathbf{l}_g^{-1}(W))$ und damit auch $\mathbf{l}_g^{-1}(W)$ offen.

(iv) Sei $g \in G$ und gelte $\pi(g) \neq \pi(e)$. Dann ist $g \notin H$. Da H abgeschlossen ist, ist $G \setminus H$ eine offene Umgebung von g . Wir wählen zunächst eine offene Umgebungen $V \subset G$ von e mit $R_g(V) \subset G \setminus H$ und anschließend eine offene Umgebungen $V_0 \subset G$ von e mit $V_0^{-1}V_0 \subset V$. Dann sind $\pi(V_0)$ und $\pi(R_g(V_0))$ nach (i) offene Umgebungen von $\pi(e)$ bzw. $\pi(g)$. Außerdem ist $\pi(V_0) \cap \pi(R_g(V_0)) = \emptyset$. Sind nämlich $a_1, a_2 \in V_0$ und gilt $\pi(a_1) = \pi(a_2g)$, so ist $a_1h = a_2g$ für ein $h \in H$ und wir erhalten damit den Widerspruch

$$a_1^{-1}a_2g \in R_g(V_0^{-1}V_0) \cap H \subset R_g(V) \cap H \subset (G \setminus H) \cap H = \emptyset.$$

Seien jetzt $g_1, g_2 \in G$ und gelte $\pi(g_1) \neq \pi(g_2)$. Dann gilt auch $\pi(g_2^{-1}g_1) \neq \pi(e)$. Folglich existieren nach der Überlegung oben offene Umgebungen W_1 und W_2 von $\pi(g_2^{-1}g_1)$ bzw. $\pi(e)$ mit $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Nach (iii) sind dann $\mathbf{l}_{g_2}(W_1)$ und $\mathbf{l}_{g_2}(W_2)$ offene Umgebungen von $\pi(g_1)$ bzw. $\pi(g_2)$ und $\mathbf{l}_{g_2}(W_1) \cap \mathbf{l}_{g_2}(W_2) = \emptyset$. \square

Satz 6.8 *Sei G eine Liesche Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe von G . Dann existiert eine differenzierbare Struktur auf G/H mit den folgenden Eigenschaften.*

- (a) *Die kanonische Projektion π ist glatt.*
- (b) *Zu jedem $p_0 \in G/H$ existieren eine offene Umgebung $W_0 \subset G/H$ von p_0 und eine glatte Abbildung $\mathbf{s}_0 : W_0 \rightarrow G$ mit $\pi(\mathbf{s}_0(p)) = p$ für alle $p \in W_0$.*
- (c) *Die Abbildung $(g, p) \in G \times G/H \mapsto gp := \mathbf{l}_g(p) \in G/H$ ist glatt.*

Beweise. Seien Ψ, U', U und V wie im Beweis von Satz 6.4. Sei $U_0 \subset U$ eine offene Umgebung von 0 mit $\exp(-w_1)\exp(w_2) \in V$ für alle $w_1, w_2 \in U_0$ und sei $\psi : U_0 \rightarrow G/H$ durch $\psi(w) := \pi(\exp(w))$ definiert. Dann ist ψ injektiv. Sind nämlich $w_1, w_2 \in U_0$ und gilt $\psi(w_1) = \psi(w_2)$, so ist $\exp(w_2) = \exp(w_1)h$ für ein $h \in H$. Wegen $h = \exp(-w_1)\exp(w_2) \in H \cap V$ ist $h = \exp(v)$ für ein $v \in U'$. Damit gilt $\Psi(0, w_2) = \Psi(v, w_1)$, woraus $w_1 = w_2$ folgt. Offenbar ist ψ stetig. Wir zeigen, dass ψ auch offen ist. Sei $U_1 \subset U_0$ offen. Dann ist $U' \times U_1$ offen in $U' \times U$. Da $\Psi|_{U' \times U}$ und π offen sind, ist folglich $\psi(U_1) = \pi(\Psi(U' \times U_1))$ eine offene Teilmenge von G/H . Also ist $W := \psi(U_0)$ offen und ψ ein Homöomorphismus. Für $g \in G$ sei $\psi_g := \mathbf{l}_g \circ \psi : U_0 \rightarrow W_g := \mathbf{l}_g(W)$ und $\varphi_g := \psi_g^{-1} : W_g \rightarrow U_0$. Dann ist $\mathcal{A}_{G/H} := \{(W_g, \varphi_g) : g \in G\}$ ein C^∞ -Atlas von G/H . Tatsächlich ist $\bigcup_{g \in G} W_g = G/H$. Außerdem sind nach der Überlegung oben alle W_g offen und alle

φ_g Homöomorphismen. Es bleibt zu verifizieren, dass die Kartenwechsel glatt sind und dass die von $\mathcal{A}_{G/H}$ bestimmte differenzierbare Struktur die angegebenen Eigenschaften besitzt. Dazu setzen wir $V_g := \pi^{-1}(W_g)$ und $\mathbf{s}_g := L_g \circ \exp \circ \varphi_g : W_g \rightarrow G$ für $g \in G$ und beweisen das folgende Lemma.

Lemma 6.9 *Für jedes $g \in G$ gilt:*

(i) Die Abbildungen $\varphi_g \circ \pi|_{V_g} : V_g \rightarrow U_0$ und $\mathfrak{s}_g \circ \varphi_g^{-1} : U_0 \rightarrow G$ sind glatt.

(ii) Es ist $\pi \circ \mathfrak{s}_g = \text{id}_{W_g}$.

Beweis. (i) Die inversen Abbildungen zu $R_h \circ L_g \circ \Psi|_{U' \times U_0}$, $h \in H$, bilden einen differenzierbaren Atlas von V_g . Außerdem gilt

$$\pi \circ R_h \circ L_g \circ \Psi(v, w) = \mathfrak{l}_g \circ \pi(\exp(w) \exp(v)) = \mathfrak{l}_g(\pi(\exp(w))) = \psi_g(w),$$

d.h.

$$\varphi_g \circ \pi \circ R_h \circ L_g \circ \Psi(v, w) = w$$

für $(v, w) \in U' \times U_0$. Damit ist gezeigt, dass $\varphi_g \circ \pi|_{V_g}$ glatt ist. Der zweite Teil folgt sofort aus $\mathfrak{s}_g \circ \varphi_g^{-1} = (L_g \circ \exp)|_{U_0}$.

(ii) Für alle $p \in W_g$ gilt

$$\pi \circ \mathfrak{s}_g = \pi \circ L_g \circ \exp \circ \varphi_g = \mathfrak{l}_g \circ \pi \circ \exp \circ \varphi_g = \psi_g \circ \varphi_g = \text{id}_{W_g} .$$

□

Fortsetzung des Beweise von Satz 6.8. Seien $g, g' \in G$ und gelte $W_g \cap W_{g'} \neq \emptyset$. Nach Lemma 6.9(ii) ist

$$\varphi_{g'} \circ \varphi_g^{-1}(p) = (\varphi_{g'} \circ \pi) \circ (\mathfrak{s}_g \circ \varphi_g^{-1})(p)$$

für $p \in W_g \cap W_{g'}$. Also ist der Kartenwechsel $\varphi_{g'} \circ \varphi_g^{-1}$ nach Lemma 6.9(i) die Verkettung von glatten Abbildungen und damit selbst glatt. Die Eigenschaften (a) und (b) ergeben sich jetzt ebenfalls aus Lemma 6.9. Die Eigenschaft (c) folgt aus (a), (b) und

$$\mathfrak{l}_g(p) = \mathfrak{l}_g(\pi(\mathfrak{s}_0(p))) = \pi(g\mathfrak{s}_0(p))$$

für $p \in W_0$.

□

Im Weiteren sei G/H stets mit der von $\mathcal{A}_{G/H}$ bestimmten differenzierbaren Struktur versehen.

Folgerung 6.10 (i) *Der Faktorraum G/H ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer kanonischen transitiven Wirkung von G .*

(ii) *Die Dimension von G/H ist $\dim G - \dim H$.*

Beweis. (i) Die Behauptung folgt aus den Sätzen 6.7 und 6.8.

(ii) Aus den Beweisen der Sätze 6.4 und 6.8 ergibt sich

$$\dim G/H = \dim \mathfrak{m} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}' = \dim G - \dim H .$$

□

Wir betrachten jetzt einen beliebigen homogenen Raum (M, G) . Ist H der Stabilisator eines Punktes von M , so ist H eine abgeschlossene Untergruppe von G und damit, wie oben gezeigt, G/H eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Satz 6.11 *Sei (M, G) ein homogener Raum, sei H der Stabilisator eines Punktes $q_0 \in M$ und gelte $\dim M = \dim G - \dim H$. Dann ist durch*

$$\Phi(aH) := aq_0 \tag{6.1}$$

ein Diffeomorphismus $\Phi : G/H \rightarrow M$ mit

$$\Phi \circ \mathfrak{l}_g = L_g \circ \Phi \tag{6.2}$$

für alle $g \in G$ definiert.

Beweis. Offensichtlich ist durch (6.1) eine Bijektion $\Phi : G/H \rightarrow M$ mit (6.2) definiert. Ist $\mathfrak{s}_0 : W_0 \rightarrow G$ wie in Satz 6.8, so gilt $\Phi(p) = \mathfrak{s}_0(p)q_0$ für $p \in W_0$. Folglich ist Φ glatt. Für die Glattheit von Φ^{-1} genügt es zu verifizieren, dass das Differential $D\Phi|_p : T_p G/H \rightarrow T_{\Phi(p)} M$ für jedes $p \in G/H$ ein Isomorphismus ist. Wir haben

$$D\Phi|_{gH} \circ D\mathbf{l}_g|_{eH} = dL_g|_{q_0} \circ D\Phi|_{eH}$$

und wissen, dass die Linkstranslationen \mathbf{l}_g und L_g und die Abbildung $\psi : U_0 \rightarrow G/H$ aus dem Beweis von Satz 6.8 Diffeomorphismen sind. Da außerdem $\dim M = \dim G - \dim H$, reicht es zu zeigen, dass $D(\Phi \circ \psi)|_0 : \mathfrak{m} \rightarrow T_{q_0} M$ injektiv ist. Sei $v \in \mathfrak{m}$. Wegen $\Phi \circ \psi(u) = \Phi(\exp(u)H) = \exp(u)q_0$ für $u \in U_0$ ist

$$D(\Phi \circ \psi)|_0(v) = \left. \frac{d}{dt} \exp(tv)q_0 \right|_{t=0}.$$

Gelte jetzt $D(\Phi \circ \psi)|_0(v) = 0$ und sei $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ durch $c(s) := \exp(sv)q_0$ definiert. Dann ist

$$\begin{aligned} \dot{c}(s) &= \left. \frac{d}{dt} \exp(tv)q_0 \right|_{t=s} = \left. \frac{d}{dt} \exp((s+t)v)q_0 \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \exp(sv) \exp(tv)q_0 \right|_{t=0} = DL_{\exp(sv)} \left(\left. \frac{d}{dt} \exp(tv)q_0 \right|_{t=0} \right) = 0. \end{aligned}$$

Also ist c konstant und damit $\exp(sv)q_0 = q_0$, d.h. $\exp(sv) \in H$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Mit Satz 6.4 folgt $v \in \mathfrak{h}$. Da aber auch $v \in \mathfrak{m}$, ist $v = 0$. \square

Bemerkung 6.12 Die Voraussetzung $\dim M = \dim G - \dim H$ in Satz 6.11 kann weggelassen werden. Vgl. S. Helgason: Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. \square

7 Homogene Vektorbündel

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Definition 7.1 Ein Paar $(\mathcal{E}, \pi_{\mathcal{E}})$ bestehend aus einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{E} und einer Abbildung $\pi_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow M$ heißt **\mathbb{K} -Vektorbündel** über M vom **Rang** n : \iff

- (a) Für jedes $p \in M$ ist $\mathcal{E}_p := \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(\{p\})$ ein \mathbb{K} -Vektorraum der Dimension n .
- (b) Zu jedem $p_0 \in M$ existieren eine offene Umgebung U von p_0 und ein Diffeomorphismus $\phi = (\phi^1, \phi^2) : \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{K}^n$ mit den folgenden Eigenschaften.
 - (1) Für alle $\xi \in \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ ist $\phi^1(\xi) = \pi_{\mathcal{E}}(\xi)$.
 - (2) Für jedes $p \in U$ ist die Abbildung $\xi \in \mathcal{E}_p \mapsto \phi^2(\xi) \in \mathbb{K}^n$ ein linearer Isomorphismus.

Die Mannigfaltigkeiten \mathcal{E} und M heißen der **Totalraum** bzw. die **Basis** von $(\mathcal{E}, \pi_{\mathcal{E}})$ und \mathcal{E}_p die **Faser** von $(\mathcal{E}, \pi_{\mathcal{E}})$ über p . Ein Paar (U, ϕ) wie in (b) wird eine **Bündelkarte** von $(\mathcal{E}, \pi_{\mathcal{E}})$ genannt. Die Definition impliziert, dass die Abbildung $\pi_{\mathcal{E}}$ glatt und surjektiv ist. Statt $(\mathcal{E}, \pi_{\mathcal{E}})$ werden wir im Weiteren auch einfach \mathcal{E} schreiben.

Beispiel 7.2 Das Tangentialbündel TM und das Kotangentialbündel T^*M sind reelle Vektorbündel über M vom Rang $m = \dim M$, wobei $(TM)_p = T_pM$ und $(T^*M)_p = T_p^*M$. Sind $\partial_1, \dots, \partial_m$ die kanonischen Vektorfelder zu einer Karte (U, x) von M und dx^1, \dots, dx^m die dazu dualen 1-Formen, so sind durch

$$\phi \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \partial_i(p) \right) := \tilde{\phi} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i dx^i|_p \right) := (p, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

für $p \in U$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ Bündelkarten ϕ und $\tilde{\phi}$ von TM bzw. T^*M definiert. □

Sei G wieder eine Liesche Gruppe.

Definition 7.3 (i) Ein Vektorbündel \mathcal{E} über M heißt **G -Vektorbündel** : \iff

- (a) G wirkt auf \mathcal{E} und auf M .
 - (b) Für alle $g \in G$ gilt $\pi_{\mathcal{E}} \circ L_g = L_g \circ \pi_{\mathcal{E}}$.
 - (c) Für alle $g \in G$ und alle $p \in M$ ist die Abbildung $\xi \in \mathcal{E}_p \mapsto L_g(\xi) \in \mathcal{E}_{gp}$ linear.
- (ii) Ein G -Vektorbündel \mathcal{E} über M heißt **homogen** : \iff G wirkt transitiv auf M .

Ein G -Vektorbündel ist also ein Vektorbündel \mathcal{E} mit einer Wirkung von G auf \mathcal{E} derart, dass Fasern in Fasern überführt werden und G in den Fasern linear operiert. Es ist ein homogenes G -Vektorbündel, wenn die Basis M mit der induzierten G -Wirkung ein homogener Raum ist.

Beispiel 7.4 Sei (M, G) ein homogener Raum. Dann sind das Tangentialbündel TM und das Kotangentialbündel T^*M mit den wie folgt definierten Wirkungen homogene G -Bündel. Für $g \in G$, $\mathbf{v} \in T_pM$ und $\boldsymbol{\alpha} \in T_p^*M$ sei

$$L_g(\mathbf{v}) := DL_g(\mathbf{v}) \in T_{gp}M \quad \text{und} \quad L_g(\boldsymbol{\alpha}) := \boldsymbol{\alpha} \circ DL_{g^{-1}}|_{gp} \in T_{gp}^*M.$$

□

Definition 7.5 Seien \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 zwei G -Vektorbündel über M .

- (i) Eine glatte Abbildung $\Phi : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ heißt **G -Vektorbündel-Isomorphismus** $:\Leftrightarrow$
- (a) Für jedes $p \in M$ ist $\Phi((\mathcal{E}_1)_p) \subset (\mathcal{E}_2)_p$, d.h. $\pi_{\mathcal{E}_2} \circ \Phi = \pi_{\mathcal{E}_1}$.
 - (b) Für jedes $p \in M$ ist $\xi \in (\mathcal{E}_1)_p \mapsto \Phi(\xi) \in (\mathcal{E}_2)_p$ ein linearer Isomorphismus.
 - (c) Für alle $g \in G$ gilt $\Phi \circ L_g = L_g \circ \Phi$.
- (ii) Die G -Vektorbündel \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 heißen **isomorph** $:\Leftrightarrow$ Es existiert ein G -Vektorbündel-Isomorphismus $\Phi : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$.

Bemerkung 7.6 Ist $\Phi : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ ein G -Vektorbündel-Isomorphismus, so ist Φ ein Diffeomorphismus und auch $\Phi^{-1} : \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_1$ ein G -Vektorbündel-Isomorphismus. \square

Wir geben jetzt ein Konstruktionsverfahren für homogene G -Vektorbündel an. Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G , sei E ein n -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und sei $\kappa : H \rightarrow \text{GL}(E)$ eine Darstellung von H . Durch

$$R_h(a, \mathbf{v}) := (ah, \kappa(h^{-1})\mathbf{v})$$

für $h \in H$ und $(a, \mathbf{v}) \in G \times E$ definieren wir eine Rechtswirkung von H auf $G \times E$. Sei der Faktorraum $G \times_{\kappa} E := (G \times E)/H$ dieser Wirkung mit der Quotiententopologie versehen und bezeichne $[a, \mathbf{v}] \in G \times_{\kappa} E$ den Orbit von $(a, \mathbf{v}) \in G \times E$. Wir definieren $\pi_{\kappa} : G \times_{\kappa} E \rightarrow G/H$ durch $\pi_{\kappa}([a, \mathbf{v}]) = \pi(a)$, wobei $\pi : G \rightarrow G/H$ wieder die kanonische Projektion ist. Sei $p \in G/H$ und sei $a \in \pi^{-1}(\{p\})$. Wir führen auf

$$(G \times_{\kappa} E)_p := \pi_{\kappa}^{-1}(\{p\}) = \{[a, \mathbf{v}] : \mathbf{v} \in E\}$$

durch

$$[a, \mathbf{v}] + [a, \mathbf{v}'] := [a, \mathbf{v} + \mathbf{v}'] \quad \text{und} \quad \lambda[a, \mathbf{v}] := [a, \lambda\mathbf{v}]$$

für $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Vektorraumstruktur ein. Sei $h \in H$. Dann ist $[a, \mathbf{v}] := [ah, \kappa(h^{-1})\mathbf{v}]$ und $[a, \mathbf{v}'] := [ah, \kappa(h^{-1})\mathbf{v}']$. Weiter gilt

$$[a, \mathbf{v} + \mathbf{v}'] = [ah, \kappa(h^{-1})(\mathbf{v} + \mathbf{v}')] = [ah, \kappa(h^{-1})\mathbf{v} + \kappa(h^{-1})\mathbf{v}']$$

und

$$[ah, \kappa(h^{-1})(\lambda\mathbf{v})] = [ah, \lambda\kappa(h^{-1})\mathbf{v}] .$$

Somit hängt die Vektorraumstruktur auf $(G \times_{\kappa} E)_p$ nicht von der Wahl von $a \in \pi^{-1}(\{p\})$ ab. Sei $L_g : G \times_{\kappa} E \rightarrow G \times_{\kappa} E$ für $g \in G$ durch $L_g([a, \mathbf{v}]) := [ga, \mathbf{v}]$ definiert. Dann gilt

$$\pi_{\kappa}(L_g([a, \mathbf{v}])) = \pi_{\kappa}([ga, \mathbf{v}]) = \pi(ga) = \mathbf{l}_g(\pi(a)) = \mathbf{l}_g(\pi_{\kappa}([a, \mathbf{v}])) .$$

Nach Satz 6.8 gibt es zu jedem $p_0 \in G/H$ eine Umgebung W_0 von p_0 und eine glatte Abbildung $\mathbf{s}_0 : W_0 \rightarrow G$ mit $\pi(\mathbf{s}_0(p)) = p$ für alle $p \in W_0$. Wir definieren $\psi : W_0 \times E \rightarrow \pi_{\kappa}^{-1}(W_0)$ durch

$$\psi(p, \mathbf{v}) := [\mathbf{s}_0(p), \mathbf{v}] .$$

Sei $a \in \pi^{-1}(W_0)$ und sei $\mathbf{v} \in E$. Dann ist $\mathbf{s}_0(\pi(a))^{-1}a \in H$ und somit

$$[a, \mathbf{v}] = [\mathbf{s}_0(\pi(a))\mathbf{s}_0(\pi(a))^{-1}a, \mathbf{v}] = [\mathbf{s}_0(\pi(a)), \kappa(\mathbf{s}_0(\pi(a))^{-1}a)\mathbf{v}] .$$

Für die Abbildung $\phi := \psi^{-1} : \pi_{\kappa}^{-1}(W_0) \rightarrow W_0 \times E$ gilt demnach

$$\phi([a, \mathbf{v}]) = (\pi(a), \kappa(\mathbf{s}_0(\pi(a))^{-1}a)\mathbf{v}) . \quad (7.1)$$

Es ist jetzt nicht schwer einzusehen, dass die Gesamtheit aller dieser Abbildungen ϕ (nach Identifizierung von E mit \mathbb{K}^n) einen differenzierbaren Atlas von Bündelkarten von $G \times_{\kappa} E$ bildet.

Bezüglich der dadurch bestimmten differenzierbaren Struktur auf $G \times_{\kappa} E$ ist die Abbildung $(a, \mathbf{v}) \in G \times E \mapsto [a, \mathbf{v}] \in G \times_{\kappa} E$ nach (7.1) glatt. Wegen

$$L_g(\psi(p, \mathbf{v})) = [g\mathfrak{s}_0(p), \mathbf{v}]$$

ist dann auch die Abbildung

$$(g, \xi) \in G \times (G \times_{\kappa} E) \mapsto L_g(\xi) \in G \times_{\kappa} E$$

glatt. Insgesamt haben wir damit gesehen, dass $(G \times_{\kappa} E, \pi_{\kappa})$ ein homogenes G -Vektorbündel über G/H ist.

Als Nächstes zeigen wir, dass jedes homogene G -Vektorbündel \mathcal{E} so beschrieben werden kann. Dabei können wir nach Satz 6.11 annehmen, dass die Basis M von \mathcal{E} ein Faktorraum G/H nach einer abgeschlossenen Untergruppe H von G ist.

Satz 7.7 *Sei \mathcal{E} ein homogenes G -Vektorbündel über G/H . Dann existiert eine Darstellung $\kappa : H \rightarrow \mathrm{GL}(E)$ derart, dass $G \times_{\kappa} E$ und \mathcal{E} isomorph sind.*

Beweis. Sei $E := \mathcal{E}_{eH}$. Ist $\mathbf{v} \in E$ und $h \in H$, so ist

$$\pi_{\mathcal{E}}(L_h(\mathbf{v})) = \mathbf{l}_h(\pi_{\mathcal{E}}(\mathbf{v})) = \mathbf{l}_h(eH) = eH$$

und somit $L_h(\mathbf{v}) \in E$. Außerdem ist die Abbildung $L_h|_E : E \rightarrow E$ nach Definition 7.3(i) linear. Folglich definiert $\kappa(h)(\mathbf{v}) := L_h(\mathbf{v})$ eine Darstellung $\kappa : H \rightarrow \mathrm{GL}(E)$. Für $[a, \mathbf{v}] \in G \times_{\kappa} E$ setzen wir $\Phi([a, \mathbf{v}]) := L_a(\mathbf{v})$. Wegen

$$L_{ah}(\kappa(h^{-1})\mathbf{v}) = L_{ah}(L_{h^{-1}}(\mathbf{v})) = L_a(\mathbf{v})$$

für $h \in H$ ist dadurch eine Abbildung $\Phi : G \times_{\kappa} E \rightarrow \mathcal{E}$ bestimmt. Ist $\psi : W_0 \times E \rightarrow \pi_{\kappa}^{-1}(W_0)$ wie oben angegeben, so ist

$$\Phi(\psi(p, \mathbf{v})) = L_{\mathfrak{s}_0(p)}(\mathbf{v}).$$

Demzufolge ist Φ glatt. Es bleibt zu verifizieren, dass Φ die Eigenschaften aus Definition 7.5 besitzt. Offensichtlich gilt (b). Weiter ist

$$\pi_{\mathcal{E}}(\Phi([a, \mathbf{v}])) = \pi_{\mathcal{E}}(L_a(\mathbf{v})) = \mathbf{l}_a(\pi_{\mathcal{E}}(\mathbf{v})) = \mathbf{l}_a(eH) = aH = \pi(a) = \pi_{\kappa}([a, \mathbf{v}])$$

und

$$\Phi(L_g([a, \mathbf{v}])) = \Phi([ga, \mathbf{v}]) = L_{ga}(\mathbf{v}) = L_g(L_a(\mathbf{v})) = L_g(\Phi([a, \mathbf{v}])).$$

Damit hat Φ auch die Eigenschaften (a) und (c). \square

Definition 7.8 *Sei \mathcal{E} ein Vektorbündel über M . Eine Abbildung $s : M \rightarrow \mathcal{E}$ heißt ein **Schnitt** von $\mathcal{E} : \iff \pi_{\mathcal{E}} \circ s = \mathrm{id}_M$.*

Die Menge der glatten Schnitte von \mathcal{E} bezeichnen wir mit $\Gamma(\mathcal{E})$. Damit ist $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ und $\Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$. Ist \mathcal{E} ein G -Vektorbündel über M , so sei $g_*s \in \Gamma(\mathcal{E})$ für $g \in G$ und $s \in \Gamma(\mathcal{E})$ durch

$$(g_*s)(p) := L_g(s(g^{-1}p))$$

definiert.

Bemerkung 7.9 Ist (M, g) ein homogener Raum und ist $X \in \mathfrak{X}(M)$, so ist $g_*X = (L_g)_*X$. \square

Sei weiterhin $\kappa : H \rightarrow \mathrm{GL}(E)$ eine Darstellung von H über dem \mathbb{K} -Vektorraum E und bezeichne $C_{\kappa}^{\infty}(G, E)$ die Menge der glatten Abbildungen $\sigma : G \rightarrow E$ mit der Eigenschaft, dass

$$\sigma(ah) = \kappa(h^{-1})\sigma(a)$$

für alle $a \in G$ und $h \in H$.

Satz 7.10 Es gibt einen kanonischen Isomorphismus $\mathfrak{s} \in \Gamma(G \times_{\kappa} E) \mapsto \mathfrak{s}^{\sharp} \in C_{\kappa}^{\infty}(G, E)$. Dabei gilt

$$(f\mathfrak{s})^{\sharp}(a) = f(\pi(a))\mathfrak{s}^{\sharp}(a) \quad \text{und} \quad (g_*\mathfrak{s})^{\sharp}(a) = \mathfrak{s}^{\sharp}(g^{-1}a) \quad (7.2)$$

für $\mathfrak{s} \in \Gamma(G \times_{\kappa} E)$, $f \in C^{\infty}(G/H, \mathbb{K})$ und $a, g \in G$.

Beweis. Sei $\mathfrak{s} \in \Gamma(G \times_{\kappa} E)$. Wir definieren $\mathfrak{s}^{\sharp} : G \rightarrow E$ durch $[a, \mathfrak{s}^{\sharp}(a)] = \mathfrak{s}(\pi(a))$. Für $h \in H$ gilt dann

$$[ah, \mathfrak{s}^{\sharp}(ah)] = \mathfrak{s}(\pi(ah)) = \mathfrak{s}(\pi(a)) = [a, \mathfrak{s}^{\sharp}(a)] = [ah, \kappa(h^{-1})\mathfrak{s}^{\sharp}(a)]$$

und damit

$$\mathfrak{s}^{\sharp}(ah) = \kappa(h^{-1})\mathfrak{s}^{\sharp}(a).$$

Ist $\mathfrak{s}_0 : W_0 \rightarrow G$ wie in Satz 6.8(b), so gilt $\mathfrak{s}(p) = [\mathfrak{s}_0(p), \mathfrak{s}^{\sharp}(\mathfrak{s}_0(p))]$ für alle $p \in W_0$. Folglich ist die Abbildung $\mathfrak{s}^{\sharp} \circ \mathfrak{s}_0$ glatt. Wegen

$$\mathfrak{s}^{\sharp}(a) = \mathfrak{s}^{\sharp}(\mathfrak{s}_0(\pi(a))\mathfrak{s}_0(\pi(a))^{-1}a) = \kappa(a^{-1}\mathfrak{s}_0(\pi(a)))\mathfrak{s}^{\sharp}(\mathfrak{s}_0(\pi(a)))$$

für $a \in \pi^{-1}(W_0)$ ist dann auch \mathfrak{s}^{\sharp} glatt. Offensichtlich ist die Zuordnung $\mathfrak{s} \mapsto \mathfrak{s}^{\sharp}$ ein Isomorphismus von $\Gamma(G \times_{\kappa} E)$ auf $C_{\kappa}^{\infty}(G, E)$. Ist schließlich $f \in C^{\infty}(G/H, \mathbb{K})$ und $g \in G$, so haben wir

$$[a, (f\mathfrak{s})^{\sharp}(a)] = f(\pi(a))\mathfrak{s}(\pi(a)) = [a, f(\pi(a))\mathfrak{s}^{\sharp}(a)]$$

und

$$[a, (g_*\mathfrak{s})^{\sharp}(a)] = (g_*\mathfrak{s})(\pi(a)) = L_g(\mathfrak{s}(\pi(g^{-1}a))) = L_g[g^{-1}a, \mathfrak{s}^{\sharp}(g^{-1}a)] = [a, \mathfrak{s}^{\sharp}(g^{-1}a)],$$

was (7.2) liefert. \square

Definition 7.11 Ein homogener Raum G/H heißt **reduktiv** $:\Leftrightarrow$ Es existiert ein Unterraum $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ und $\text{Ad}(h)(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$ für alle $h \in H$.

Beispiel 7.12 Nach Beispiel 5.18 ist $S^n = \text{SO}(n+1)/\text{SO}(n)$. Dies ist ein reduktiver Raum. Ist nämlich $\text{SO}(n) \hookrightarrow \text{SO}(n+1)$ wie in Beispiel 5.18, so ist

$$\mathfrak{m} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x^T & 0 \end{pmatrix} \in M(n+1, \mathbb{R}) : x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

ein zu $\mathfrak{o}(n)$ komplementärer Unterraum von $\mathfrak{o}(n+1)$ und für $A_0 \in \text{SO}(n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\text{Ad}(A_0) \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_0x \\ -(A_0x)^T & 0 \end{pmatrix}.$$

\square

Satz 7.13 Sei $M = G/H$ ein reduktiver homogener Raum und sei \mathfrak{m} wie in Definition 7.11. Dann sind die homogenen G -Vektorbündel $G \times_{\text{Ad}} \mathfrak{m}$ und TM isomorph.

Beweis. Wir definieren $\Phi : G \times_{\text{Ad}} \mathfrak{m} \rightarrow TM$ durch $\Phi([a, w]) := D\mathbf{l}_a(D\pi(w))$. Wegen

$$D\pi(\text{Ad}(h)w) = D\pi \circ DL_h \circ DR_{h^{-1}}(w) = D\mathbf{l}_h \circ D\pi \circ DR_{h^{-1}}(w) = D\mathbf{l}_h(D\pi(w))$$

ist diese Definition korrekt. Die Abbildung Φ ist offensichtlich glatt. Mit Hilfe der Tatsache, dass $d\pi|_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \rightarrow T_{\pi(e)}M$ nach Satz 6.8 ein Isomorphismus ist, verifiziert man leicht, dass Φ ein G -Vektorbündel-Isomorphismus ist. \square