Seminar zur Topologie von Flächen

Katharina und Lutz Habermann

Dieses Skript enthält den Stoff eines Proseminars, das wir im Sommersemester 2001 vor allem mit Studierenden im 4. Semester des Diplomstudiengangs Mathematik durchgeführt haben. Dieses Seminar sollte einen ersten Einblick in die Topologie von Mannigfaltigkeiten geben, mit dem Schwerpunkt der topologischen Klassifikation der Flächen. Dabei wurde eine möglichst elementare Darstellung der Resultate und Methoden angestrebt. Für Ergänzungen und Weiterführendes verweisen wir auf die angegebene Literatur.

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Räume und Mannigfaltigkeiten

1.1 Topologische Räume

Definition 1.1.1 *Ein* **topologischer Raum** *ist ein Paar* $(X, \mathcal{O})$ *bestehend aus einer nichtleeren Menge* X *und einem System* $\mathcal{O}$ *von Teilmengen von* X *mit folgenden Eigenschaften:*

(O1) *Die Menge* X *und die leere Menge* $\emptyset$ *sind Elemente von* $\mathcal{O}$.

(O2) *Sind* $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$, *so ist auch* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$.

(O3) *Für jede beliebige Familie* $\{U_i\}_{i \in I}$ *von Mengen* $U_i \in \mathcal{O}$ *ist* $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.

Das Mengensystem $\mathcal{O}$ *heißt dann* **Topologie auf** X. *Eine Teilmenge* U *von* X *heißt* **offen**, *falls* $U \in \mathcal{O}$. *Sie heißt* **abgeschlossen**, *falls* $X \setminus U \in \mathcal{O}$. *Sie heißt* **Umgebung von** $x \in X$, *falls sie offen ist und* $x \in U$.

Das System aller Umgebungen von $x \in X$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(\mathcal{O}, x)$ oder einfach $\mathcal{U}(x)$.

Satz 1.1.2 *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *ein topologischer Raum. Dann ist* $U \subseteq X$ *genau dann offen, wenn zu jedem* $x \in U$ *eine Umgebung* U_x *von* x *mit* $U_x \subseteq U$ *existiert.*

Beweis. Ist $U \subseteq X$ offen, so ist U für jedes $x \in U$ eine Umgebung von x mit $U \subseteq U$. Damit ist eine Richtung der Behauptung gezeigt. Die andere Richtung erhält man folgendermaßen. Ist $U \subseteq X$ und existiert zu jedem $x \in U$ eine Umgebung U_x von x mit $U_x \subseteq U$, so ist

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x \, .$$

Da alle U_x offen sind, folgt mit (O3), dass auch U offen ist. □

Im folgenden sind einige Beispiele für topologische Räume angegeben.

Beispiel 1.1.3 Sei X eine beliebige nichtleere Menge. Das System $\mathcal{O} = \{X, \emptyset\}$ ist eine Topologie auf X. Es wird die **triviale Topologie** auf X genannt. □

Beispiel 1.1.4 Bezeichne 2^X die Potenzmenge von X. Ist $X \neq \emptyset$, so ist $\left(X, 2^X\right)$ ein topologischer Raum. 2^X heißt die **diskrete Topologie** auf X. □

Beispiel 1.1.5 Eine Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt **Zariski-offen**, falls $U = \emptyset$ oder $\mathbb{C} \setminus U$ endlich ist. Das System aller Zariski-offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{C}$, genannt **Zariski-Topologie** auf $\mathbb{C}$. □

Beispiel 1.1.6 Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Dann ist

$$\mathcal{O}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{O}\}$$

eine Topologie auf A. Sie wird die **von X induzierte Topologie** oder auch **Relativtopologie** genannt. □

Beispiel 1.1.7 Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist das System $\mathcal{O}(d)$ der bezüglich d offenen Teilmengen von X eine Topologie auf X. (Auch die diskrete Topologie ist von dieser Gestalt.) $\square$

Die Räume $\mathbb{R}^n$ seien im folgenden stets mit der Standardtopologie versehen, d.h. mit $\mathcal{O}(d)$, wobei $d(x, y) = |x - y|$. Teilmengen A von $\mathbb{R}^n$ betrachten wir immer mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie.

Eine wichtige Klasse von topologischen Räumen bilden die so genannten T_2-Räume.

Definition 1.1.8 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt* T_2**-Raum** *oder* **Hausdorff-Raum**, *falls zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ ein $U_x \in \mathcal{U}(x)$ und ein $U_y \in \mathcal{U}(y)$ mit*

$$U_x \cap U_y = \emptyset$$

existieren.

Beispiel 1.1.9 Jeder metrische Raum ist ein T_2-Raum. $\square$

Beispiel 1.1.10 Enthält X mindestens zwei verschiedene Punkte, so ist X mit der trivialen Topologie kein T_2-Raum. Ebenso ist $\mathbb{C}$ mit der Zariski-Topologie kein T_2-Raum. $\square$

Die folgende Definition verallgemeinert den Begriff der stetigen Abbildung zwischen metrischen Räumen.

Definition 1.1.11 *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* **stetig**, *falls*

$$V \in \mathcal{O}_Y \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$$

gilt. f heißt **Homöomorphismus**, *falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind. Die Räume X und Y heißen* **homöomorph** *(in Zeichen: $X \approx Y$), falls es einen Homöomorphismus $f : X \to Y$ gibt.*

Wir möchten jetzt noch die so genannte Quotiententopologie definieren. Dazu beweisen wir zunächst

Satz 1.1.12 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung in eine beliebige Menge Y. Dann ist*

$$\mathcal{O}_f = \left\{ V \subseteq Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{O} \right\}$$

eine Topologie auf Y.

Beweis. Zu zeigen ist, dass $\mathcal{O}_f$ den Bedingungen (O1), (O2) und (O3) genügt. Dies folgt aber unmittelbar aus:

(1) $f^{-1}(Y) = X$ und $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(2) Für alle $V_1, V_2 \subseteq Y$ ist

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) .$$

(3) Für jede Familie $\{V_i\}_{i \in I}$ von Mengen $V_i \subseteq Y$ ist

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i) .$$

$\square$

Sei jetzt $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Die Quotientenmenge nach $\sim$, d.h. die Menge aller Äquivalenzklassen von $\sim$ bezeichnen wir mit $X/{\sim}$. Außerdem sei $\pi : X \to X/{\sim}$ die kanonische Projektion. Nach Satz 1.1.12 ist dann

$$\mathcal{O}_\sim = \left\{ V \subseteq X/{\sim} : \pi^{-1}(V) \in \mathcal{O} \right\}$$

eine Topologie auf $X/{\sim}$.

Definition 1.1.13 *Das System $\mathcal{O}_\sim$ heißt die* **Quotiententopologie von $\mathcal{O}$ nach $\sim$**.

Beispiel 1.1.14 Sei $X_1 = \mathbb{R}$ und $X_2 = [0,1]$. Wir definieren Äquivalenzrelationen $\sim_i$ auf X_i durch:

(1) Für $x, y \in X_1$ gilt $x \sim_1 y$ genau dann, wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = y + k$ existiert.

(2) Für $x, y \in X_2$ gilt $x \sim_2 y$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x, y \in \{0, 1\}$.

Dann gilt

$$X_1/{\sim_1} \approx X_2/{\sim_2} \approx S^1 \ ,$$

wobei $S^1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \right\}$. Zum Beispiel induziert die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \quad f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \ ,$$

Homöomorphismen $f_i : X_i/{\sim_i} \to S^1$, $i = 1, 2$. □

1.2 Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wird der Begriff der Mannigfaltigkeit, genauer der topologischen Mannigfaltigkeit, eingeführt und mit einer Reihe von Beispielen illustriert.

Definition 1.2.1 *Eine* **n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand** *ist ein topologischer Raum M mit folgenden Eigenschaften:*

(M1) *M ist ein T_2-Raum.*

(M2) *Zu jedem $x \in M$ existieren ein $U \in \mathcal{U}(x)$ und ein Homöomorphismus $\varphi : U \to V$ auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.*

Das Paar (U, φ) wird dann **Karte von M um** *x genannt. Eine Familie $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ von Karten von M heißt* **Atlas von** *M, falls*

$$\bigcup_{i \in I} U_i = M \ .$$

Beispiel 1.2.2 Jede mit der diskreten Topologie versehene Menge M ist eine nulldimensionale topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand. □

Beispiel 1.2.3 Der $\mathbb{R}^n$ und alle offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten ohne Rand. □

Beispiel 1.2.4 Sei M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand und sei W eine nichtleere offene Teilmenge von M. Dann ist auch W eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand. Ist nämlich (U, φ) eine Karte von M um $x \in W$, so ist $\left(U \cap W, \varphi|_{U \cap W}\right)$ eine Karte von W um x. □

Beispiel 1.2.5 Die Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand. Als Karten kann man hier z.B. die **stereographischen Projektionen**

$$\varphi_{\mathrm{N}} : S^n \setminus \{x^{\mathrm{N}}\} \to \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \varphi_{\mathrm{S}} : S^n \setminus \{x^{\mathrm{S}}\} \to \mathbb{R}^n$$

nehmen, wobei x^{N} den Nord- und x^{S} den Südpol von S^n bezeichnet, d.h.

$$x^{\mathrm{N}} = (0, \ldots, 0, 1) \quad \text{und} \quad x^{\mathrm{S}} = (0, \ldots, 0, -1) .$$

Dabei ist φ_{N} dadurch definiert, dass $(\varphi_{\mathrm{N}}(x), 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Schnittpunkt der Geraden durch x^{N} und x mit der Hyperebenen $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist. Analog ist $(\varphi_{\mathrm{S}}(x), 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Schnittpunkt der Geraden durch x^{S} und x mit $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. $\square$

Beispiel 1.2.6 Wir betrachten auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation, die dadurch gegeben ist, dass $x \sim y$ genau dann gilt, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $x = \lambda y$ existiert. Den Quotienten

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n = \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \sim ,$$

der auch als die Menge aller eindimensionalen linearen Unterräume von $\mathbb{R}^{n+1}$ verstanden werden kann, versehen wir mit der Quotiententopologie. Dieser topologische Raum wird **reell-projektiver Raum** genannt. Wir konstruieren folgendermaßen einen Atlas von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Die Äquivalenzklasse von $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ bezüglich $\sim$ schreiben wir als $[x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}]$. Für $i = 1, \ldots, n+1$ sei

$$U_i = \{[x_1 : \cdots : x_{n+1}] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n : x_i \neq 0\} .$$

Wir definieren $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\varphi_i\left([x_1 : \cdots : x_{n+1}]\right) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right) .$$

Dann ist $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,\ldots,n+1}$ ein Atlas von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. $\square$

Beispiel 1.2.7 $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| = |x_2|\}$ ist <u>keine</u> topologische Mannigfaltigkeit. $\square$

Als nächstes wird ein Beispiel für einen topologischen Raum angegeben, bei dem zu jedem Punkt eine Umgebung existiert, die homöomorph zu einer offenen Umgebung von $\mathbb{R}$ ist, der aber kein T_2-Raum und somit auch keine topologische Mannigfaltigkeit ist.

Beispiel 1.2.8 Sei $N = \{(\alpha, x) : \alpha \in \{0, 1\} \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$ und sei die Äquivalenzrelation $\sim$ auf N dadurch gegeben, dass $(\alpha, x) \sim (\beta, y)$ für $x \geq 0$ genau dann gilt, wenn $(\alpha, x) = (\beta, y)$, und für $x < 0$ genau dann gilt, wenn $x = y$. Sei $M = N/\sim$. Für die Äquivalenzklasse von $(\alpha, x) \in N$ schreiben wir $[(\alpha, x)]$. Wir definieren $U_0 \subseteq M$ und $U_1 \subseteq M$ durch

$$U_0 = \{[(0, x)] : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad U_1 = \{[(1, x)] : x \in \mathbb{R}\}$$

und Abbildungen $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{R}$ und $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_0([(0, x)]) = x \quad \text{und} \quad \varphi_1([(1, x)]) = x .$$

Dann ist $M = U_0 \cup U_1$, die Teilmengen U_0, U_1 sind offen und φ_0, φ_1 sind Homöomorphismen. Es existieren aber keine Mengen $U_{[(0,0)]} \in \mathcal{U}([(0, 0)])$ und $U_{[(1,0)]} \in \mathcal{U}([(1, 0)])$ mit $U_{[(0,0)]} \cap U_{[(1,0)]} = \emptyset$. $\square$

Die folgende Definition erweitert den Begriff der topologischen Mannigfaltigkeit.

Definition 1.2.9 *Eine* **n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit (mit Rand)** *ist ein topologischer Raum M mit folgenden Eigenschaften:*

(M1') *M ist ein T_2-Raum.*

(M2') *Zu jedem $x \in M$ existieren ein $U \in \mathcal{U}(x)$ und ein Homöomorphismus $\varphi : U \to V$ auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ oder des Halbraumes $H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_n \geq 0\}$.*

Der **Rand** *∂M von M ist dann die Menge derjenigen $x \in M$, für die keine Umgebung existiert, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.*

Beispiel 1.2.10 Jede topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand ist eine topologische Mannigfaltigkeit. □

Beispiel 1.2.11 Die abgeschlossenen Intervalle

$$M_1 = [a, b] \ , \quad a < b \ ,$$

und die halboffenen Intervalle

$$\begin{aligned} M_2 &= [a, b[\ , \quad a \in \mathbb{R} \ , \ b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \ , \quad \text{und} \\ M_3 &=]a, b] \ , \quad a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \ , \ b \in \mathbb{R} \ , \end{aligned}$$

sind topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand

$$\partial M_1 = \{a, b\} \ , \quad \partial M_2 = \{a\} \quad \text{und} \quad \partial M_3 = \{b\} \ .$$

□

Beispiel 1.2.12 Das Zylinderstück

$$M = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ und } x_3 \in [-1, 1]\big\}$$

ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand

$$\partial M = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ und } x_3 \in \{-1, 1\}\big\} \approx S^1 \dot{\cup} S^1 \ .$$

Dabei steht $\dot{\cup}$ für die disjunkte Vereinigung. □

Wir treffen jetzt noch folgende

Vereinbarung: Wie allgemein üblich, werden wir im weiteren von einer topologischen Mannigfaltigkeit M zusätzlich folgende Eigenschaft fordern:

(M3) M besitzt einen Atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ mit einer höchstens abzählbaren Indexmenge I.

1.3 Klassifikation der eindimensionalen Mannigfaltigkeiten

Definition 1.3.1 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt* **zusammenhängend**, *falls keine Mengen $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ mit*

$$U_1 \neq \emptyset \quad \textit{und} \quad U_2 \neq \emptyset$$

sowie

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset \quad \textit{und} \quad U_1 \cup U_2 = X$$

existieren. Ein $U \in \mathcal{O}$ heißt **Zusammenhangskomponente von** *X, falls $U \neq \emptyset$, $X \setminus U \in \mathcal{O}$ und U mit der von X induzierten Topologie zusammenhängend ist.*

Jeder topologische Raum ist folglich die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten. Er ist zusammenhängend, wenn er genau eine Zusammenhangskomponente besitzt.

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 1.3.2 *Ist M eine zusammenhängende eindimensionale topologische Mannigfaltigkeit, so ist M zu einer der folgenden Mannigfaltigkeiten homöomorph.*

	$\partial M = \emptyset$	$\partial M \neq \emptyset$
kompakt	S^1	$[0,1]$
nicht-kompakt	$\mathbb{R}$	$[0,\infty[$

Zunächst beweisen wir

Lemma 1.3.3 *Sei X ein zusammenhängender T_2-Raum und seien U und V offene Teilmengen von X, die homöomorph zu $\mathbb{R}$ sind und für die*

$$U \nsubseteq V\ , \quad V \nsubseteq U \quad \textit{und} \quad U \cup V = X$$

gilt. Dann ist X zu $\mathbb{R}$ oder S^1 homöomorph.

Beweis. Nach Voraussetzung existieren Homöomorphismen $\varphi : U \to \mathbb{R}$ und $\psi : V \to \mathbb{R}$. Da X zusammenhängend ist, ist $U \cap V \neq \emptyset$. Außerdem ist $\varphi(U \cap V)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Da jede zusammenhängende offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist, sind die Zusammenhangskomponenten von $\varphi(U \cap V)$ offene Intervalle in $\mathbb{R}$.

Wir wollen jetzt zeigen, dass $\varphi(U \cap V)$ keine Zusammenhangskomponente der Form $]a,b[$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ besitzt, d.h., keine Zusammenhangskomponente von $\varphi(U \cap V)$ ist ein endliches Intervall. Dazu nehmen wir an, dass ein Intervall $]a,b[$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ eine Zusammenhangskomponente von $\varphi(U \cap V)$ ist. Dann ist $\varphi^{-1}(]a,b[)$ eine offene Teilmenge von $U \cap V$, also auch von V. Außerdem gilt

$$\varphi^{-1}(\{a,b\}) \cap V = \emptyset\ .$$

Wäre nämlich $\varphi^{-1}(a) \in V$, so würde auch $\varphi^{-1}(a) \in U \cap V$, d.h. $a \in \varphi(U \cap V)$ gelten, was aber im Widerspruch dazu steht, dass $]a,b[$ eine Zusammenhangskomponente von $\varphi(U \cap V)$ ist. Analog führt man $\varphi^{-1}(b) \in V$ zum Widerspruch. Folglich ist

$$\varphi^{-1}(]a,b[) = \varphi^{-1}([a,b]) \cap V\ .$$

Daraus erhalten wir, dass $\varphi^{-1}(]a,b[)$ auch eine abgeschlossene Teilmenge von V ist. Wegen $V \approx \mathbb{R}$ ist V aber zusammenhängend. Also muss $\varphi^{-1}(]a,b[) = V$ gelten, was wiederum $V \subseteq U$ impliziert. Das ist aber ein Widerspruch zu der Voraussetzung $V \nsubseteq U$. Also ist tatsächlich keine Zusammenhangskomponente von $\varphi(U \cap V)$ ein endliches Intervall. Genauso sieht man, dass auch keine Zusammenhangskomponente von $\psi(U \cap V)$ ein endliches Intervall ist.

Wir können nun zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: $U \cap V$ ist zusammenhängend.

Dann sind auch $\varphi(U \cap V)$ und $\psi(U \cap V)$ zusammenhängend. Nach der Überlegung oben können wir folglich o.B.d.A. annehmen, dass

$$\varphi(U \cap V) =]{-\infty}, a[\quad \text{und} \quad \psi(U \cap V) =]b, \infty[$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Fall: $U \cap V$ ist nicht zusammenhängend.
In diesem Fall ist

$$\varphi(U \cap V) =]-\infty, a_1[\cup]a_2, \infty[\quad \text{und} \quad \psi(U \cap V) =]-\infty, b_1[\cup]b_2, \infty[$$

mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

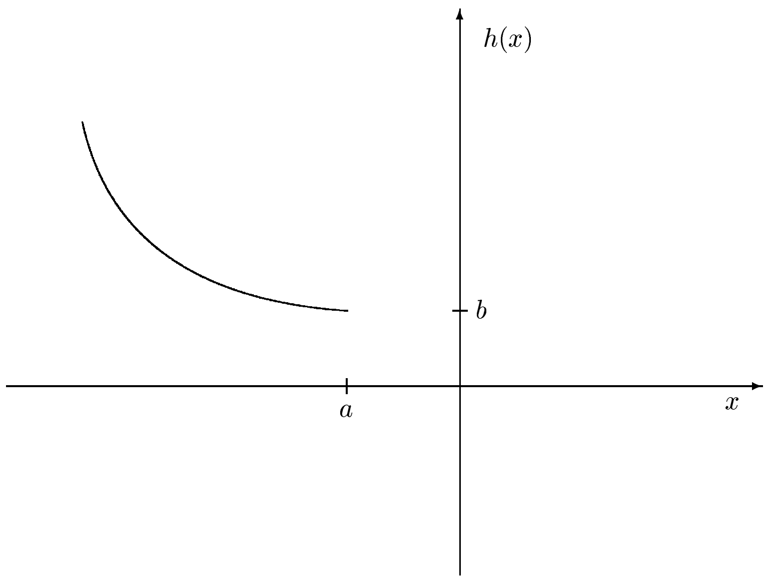
Zum 1. Fall: Wir betrachten

$$h = \psi \circ \varphi^{-1}|_{]-\infty, a[} :]-\infty, a[\to]b, \infty[\; .$$

Die Abbildung h ist bijektiv und stetig und folglich monoton. Wir wollen zeigen, dass h monoton wachsend ist. Dazu nehmen wir an, dass h monoton fallend ist, was

$$\lim_{x \to a-0} h(x) = b \tag{1.3.1}$$

impliziert. Wir haben also folgendes Bild.



Wir setzen

$$x_1 = \varphi^{-1}(a) \in U \subseteq X \quad \text{und} \quad x_2 = \psi^{-1}(b) \in V \subseteq X.$$

Dann ist $x_1 \neq x_2$, denn sonst wäre $x_1 \in U \cap V$ und somit $\varphi(x_1) = a \in \varphi(U \cap V)$. Da X ein T_2-Raum ist, existieren also ein $U_1 \in \mathcal{U}(x_1)$ und ein $U_2 \in \mathcal{U}(x_2)$ mit

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset \; . \tag{1.3.2}$$

Wegen (1.3.1) ist

$$h(\varphi(U_1) \cap]-\infty, a[) \cap \psi(U_2) \neq \emptyset \; .$$

Da

$$\begin{aligned} h(\varphi(U_1) \cap]-\infty, a[) &= h(\varphi(U_1) \cap \varphi(U \cap V)) \\ &= h \circ \varphi(U_1 \cap (U \cap V)) \\ &= \psi(U_1 \cap (U \cap V)) \; , \end{aligned}$$

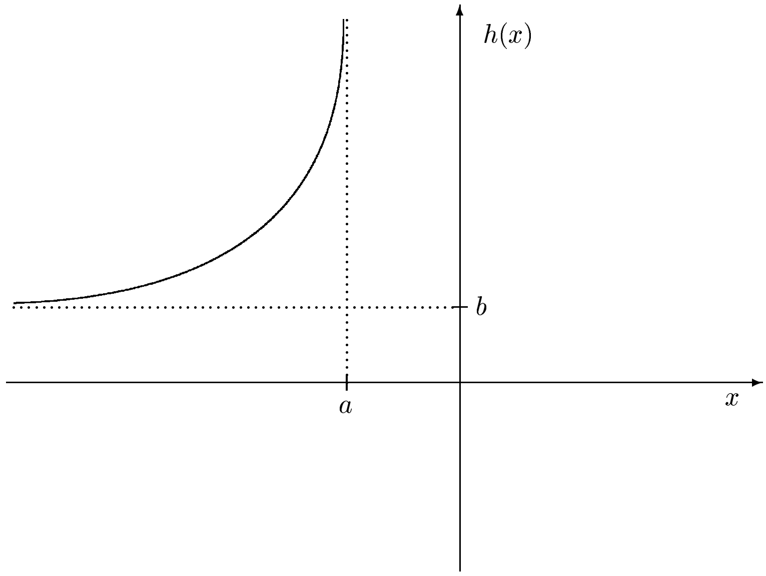
folgt

$$\psi(U_1 \cap (U \cap V)) \cap \psi(U_2) \neq \emptyset \ ,$$

d.h.

$$U_1 \cap (U \cap V) \cap U_2 \neq \emptyset \ .$$

Dann muss auch $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ gelten, was aber ein Widerspruch zu (1.3.2) ist. Also ist h tatsächlich monoton wachsend.



Wir fixieren jetzt ein $c \in \,]-\infty, a[$, setzen $c' = h(c)$ und wählen Homöomorphismen

$$g_1 : \,]-\infty, 0] \to \,]-\infty, c] \quad \text{und} \quad g_2 : [0, \infty[\, \to [c', \infty[\ .$$

Da dann

$$X = \varphi^{-1}([c, \infty[) \cup \psi^{-1}(]-\infty, c'])$$

und

$$\varphi^{-1}([c, \infty[) \cap \psi^{-1}(]-\infty, c']) = \left\{\varphi^{-1}(c)\right\} = \left\{\psi^{-1}(c')\right\} \ ,$$

definiert

$$f(x) = \begin{cases} \psi^{-1} \circ g_1(x) & \text{für } x \leq 0 \\ \varphi^{-1} \circ g_2(x) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

einen Homöomorphismus $f : \mathbb{R} \to X$.

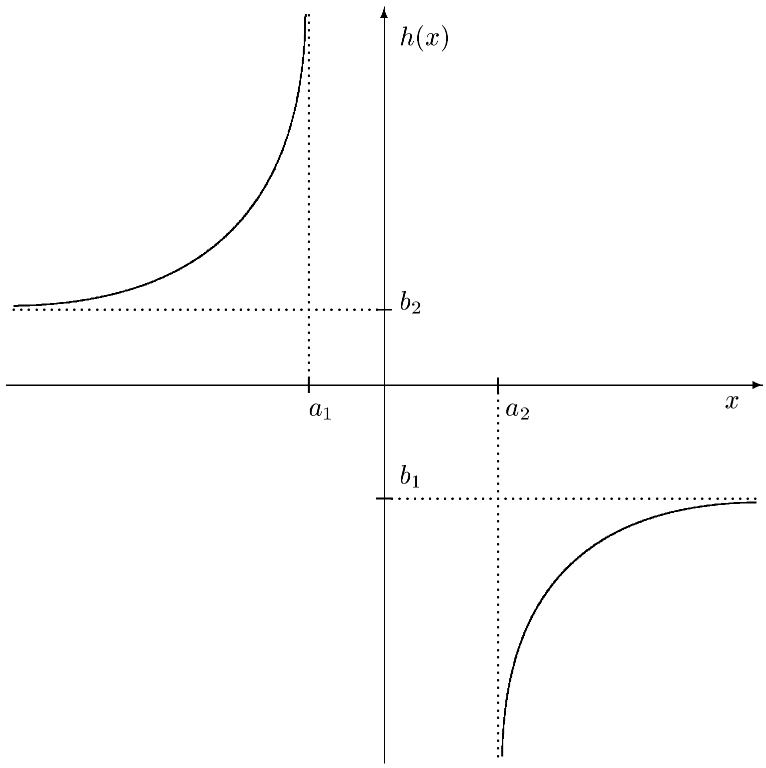
Zum 2. Fall: Wir betrachten wieder die Abbildung

$$h = \psi \circ \varphi^{-1}\big|_{\varphi(U \cap V)} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V) \ .$$

Dabei nehmen wir o.B.d.A. an, dass

$$h(]-\infty, a_1[) = \,]b_2, \infty[\quad \text{und} \quad h(]a_2, \infty[) = \,]-\infty, b_1[\ .$$

Wie im ersten Fall zeigt man, dass h monoton wachsend ist und somit den unten skizzierten Verlauf hat.



Für $c \in \,]-\infty, a_1[$, $d \in \,]a_2, \infty[$ und $c' = h(c)$, $d' = h(d)$ haben wir folglich

$$X = \varphi^{-1}([c,d]) \cup \psi^{-1}([d',c'])$$

und

$$\varphi^{-1}([c,d]) \cap \psi^{-1}([d',c']) = \left\{\varphi^{-1}(c), \varphi^{-1}(d)\right\} = \left\{\psi^{-1}(c'), \psi^{-1}(d')\right\} \ .$$

Wir definieren folgendermaßen einen Homöomorphismus $f : S^1 \to X$. Wir verstehen S^1 als den Quotienten $S^1 = [0,1]/(1 \sim 0)$, wählen monoton wachsende Homöomorphismen

$$g_1 : [0, 1/2] \to [c,d] \quad \text{und} \quad g_2 : [1/2, 1] \to [d', c']$$

und setzen

$$f([x]) = \begin{cases} \varphi^{-1} \circ g_1(x) & \text{für } x \in [0,1/2] \\ \psi^{-1} \circ g_2(x) & \text{für } x \in [1/2,1] \end{cases} ,$$

wobei $[x] \in S^1$ die Äquivalenzklasse von $x \in [0,1]$ bezeichnet. □

Jetzt können wir zeigen:

Satz 1.3.4 *Jede zusammenhängende und kompakte eindimensionale topologische Mannigfaltigkeit M ist zu S^1 oder $[0,1]$ homöomorph.*

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $\partial M = \emptyset$. Da M kompakt ist, existiert ein endlicher Atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,\ldots,k}$ von M. Diesen Atlas wählen wir derart, dass

$$\varphi_i(U_i) = \mathbb{R} \quad \text{und} \quad U_i \not\subseteq \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} U_j \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, k \ .$$

Sei $V_1 = U_1$. Da

$$V_1 \cup \bigcup_{i=2}^{k} U_i = M$$

und M zusammenhängend ist, gilt

$$V_1 \cap \bigcup_{i=2}^{k} U_i \neq \emptyset \ .$$

Also existiert ein $i_2 \in \{2, \ldots, k\}$ mit

$$V_1 \cap U_{i_2} \neq \emptyset \ .$$

Sei o.B.d.A. $i_2 = 2$. Nach Lemma 1.3.3 ist $V_2 = V_1 \cup U_2$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ oder S^1. Ist $V_2 \approx \mathbb{R}$, so wählen wir wie oben $i_3 \in \{3, \ldots, k\}$ mit

$$V_2 \cap U_{i_3} \neq \emptyset \ .$$

Wir nehmen o.B.d.A. $i_3 = 3$ an und setzen $V_3 = V_2 \cup U_3$. Wiederum ist V_3 zu $\mathbb{R}$ oder S^1 homöomorph. Ist $V_3 \approx \mathbb{R}$, so setzen wir das Verfahren fort. Da M kompakt ist, existiert ein $k_0 \leq k$ mit $V_{k_0} \approx S^1$. Andernfalls würde nämlich $M \approx \mathbb{R}$ folgen. V_{k_0} ist eine offene und als stetiges Bild einer kompakten Menge auch abgeschlossene Teilmenge von M. Da M zusammenhängend ist, gelangen wir zu

$$M = V_{k_0} \approx S^1 \ .$$

Jetzt setzen wir $\partial M \neq \emptyset$ voraus und betrachten das so genannte **Doppel $\mathcal{D}(M)$ von M**. Dieses ist wie folgt definiert. Sei $N = (M \times \{0\}) \cup (M \times \{1\})$ und sei die Äquivalenzrelation $\sim$ auf N dadurch gegeben, dass $(x, 0) \sim (y, 1)$ genau dann gilt, wenn $x = y$ und $x \in \partial M$. Dann ist $\mathcal{D}(M) = N/\!\sim$.

$\mathcal{D}(M)$ ist eine kompakte eindimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Außerdem gilt nach Konstruktion $\partial \mathcal{D}(M) = \emptyset$. Nach den Überlegungen oben ist somit $\mathcal{D}(M) \approx S^1$. Da M zu einer zusammenhängenden Teilmenge von $\mathcal{D}(M)$ homöomorph ist, folgt $M \approx [0, 1]$. □

Damit ist der erste Teil von Satz 1.3.2 bewiesen. Für den Beweis des zweiten Teils führen wir zunächst die folgende, leicht einzusehende Aussage an.

Lemma 1.3.5 *Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $\varphi : U \to \,]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$, ein Homöomorphismus. Dann existieren solche $a', b' \in \mathbb{R}$ mit $a' \leq a$ und $b \leq b'$ und ein solcher Homöomorphismus $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \,]a', b'[$, dass*

$$\tilde{\varphi}\big|_U = \varphi \ .$$

□

Folgerung 1.3.6 *Sei X ein topologischer Raum und seien V_i, $i \in \mathbb{N}$, offene Teilmengen von X mit*

$$V_i \approx \mathbb{R} \quad \textit{für} \quad i \in \mathbb{N}$$

sowie

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \ldots \quad \textit{und} \quad X = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \ .$$

Dann ist X homöomorph zu $\mathbb{R}$.

Beweis. Seien $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ mit $a_1 < b_1$ und sei $\varphi_1 : V_1 \to \,]a_1, b_1[$ ein Homöomorphismus. Nach Lemma 1.3.5 existieren $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ mit $a_2 \leq a_1$ und $b_1 \leq b_2$ und ein Homöomorphismus $\varphi_2 : V_2 \to \,]a_2, b_2[$ derart, dass

$$\varphi_2\big|_{V_1} = \varphi_1 \ .$$

Analog finden wir Homöomorphismen $\varphi_3 : V_3 \to]a_3, b_3[$, $\varphi_4 : V_4 \to]a_4, b_4[$, ... mit

$$\varphi_{i+1}\big|_{V_i} = \varphi_i \; .$$

Setzen wir also

$$a_\infty = \lim_{i\to\infty} a_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \quad \text{und} \quad b_\infty = \lim_{i\to\infty} b_i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \; ,$$

so ist durch

$$\varphi(x) = \varphi_i(x) \quad \text{für} \quad x \in V_i$$

ein Homöomorphismus $\varphi : X \to]a_\infty, b_\infty[$ gegeben. Da jedes offene Intervall in $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}$ homöomorph ist, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 1.3.7 *Jede zusammenhängende und nicht-kompakte eindimensionale topologische Mannigfaltigkeit M ist zu $\mathbb{R}$ oder $[0, \infty[$ homöomorph.*

Beweis. Gelte zunächst $\partial M = \emptyset$. Wir wählen einen Atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,2,\ldots}$ von M mit

$$\varphi_i(U_i) = \mathbb{R} \quad \text{und} \quad U_i \not\subseteq \bigcup_{j\neq i} U_j \qquad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots \; .$$

Wie im Beweis von Satz 1.3.4 bilden wir die Mengen V_i, $i = 1, 2, \ldots$, so dass bei entsprechender Umordnung $V_i = U_1 \cup \ldots \cup U_i$ gilt. Nach Lemma 1.3.3 ist $V_i \approx \mathbb{R}$ oder $V_i \approx S^1$. Angenommen, es existiert ein k_0 mit $V_{k_0} \approx S^1$. Wie im Beweis von Satz 1.3.4 können wir dann $M \approx S^1$ schließen, was aber der Voraussetzung widerspricht, dass M nicht-kompakt ist. Also haben wir eine Folge $V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \ldots$ von offenen Mengen $V_i \approx \mathbb{R}$ mit

$$M = \bigcup_i V_i \; .$$

Dies impliziert nach Folgerung 1.3.6, dass $M \approx \mathbb{R}$.

Ist $\partial M \neq \emptyset$, so bilden wir wieder das Doppel $\mathcal{D}(M)$ von M. Dies ist eine nicht-kompakte eindimensionale topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand und somit, wie eben gezeigt, homöomorph zu $\mathbb{R}$. Da M zu einer zusammenhängenden Teilmenge von $\mathcal{D}(M)$, also zu einem Intervall in $\mathbb{R}$ homöomorph ist, folgt $M \approx [0, \infty[$. $\square$

2 Zur Klassifikation der Flächen

2.1 Beispiele und zusammenhängende Summe

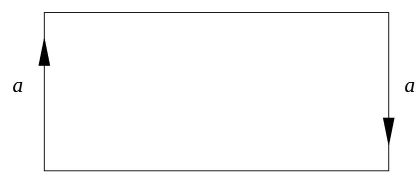
Vereinbarung: Unter einer **Fläche** verstehen wir eine zusammenhängende zweidimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Zunächst stellen wir einige Beispiele für Flächen zusammen.

Beispiel 2.1.1 Sei $N = [0,2] \times [0,1]$ und sei die Äquivalenzrelation $\sim$ auf N von

$$(0, x_2) \sim (2, 1 - x_2)$$

erzeugt.



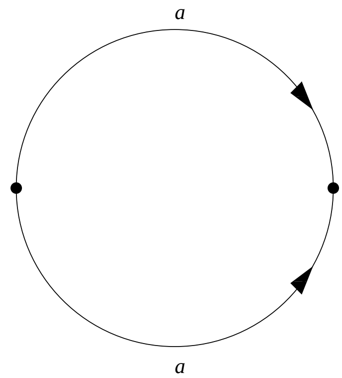
Dann ist $M = N/\sim$ eine kompakte Fläche mit Rand $\partial M \approx S^1$. Diese Fläche wird **Möbius-Band** genannt und ist das Standardbeispiel für eine nicht-orientierbare Fläche (vgl. Definition 2.1.7 unten). □

Die weiteren Beispiele sind Beispiele für so genannte **geschlossene** Flächen, d.h. für kompakte Flächen ohne Rand.

Beispiel 2.1.2 Auf der Kreisscheibe $D^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ betrachten wir die von

$$(x_1, x_2) \sim (x_1, -x_2) \quad \text{für} \quad x_1^2 + x_2^2 = 1$$

erzeugte Äquivalenzrelation.



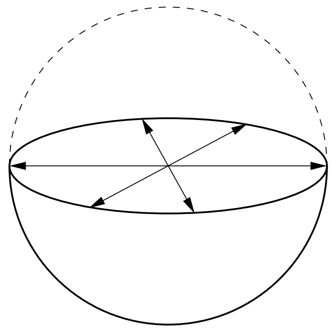
Dann ist $D^2/\sim$ homöomorph zu S^2. □

Beispiel 2.1.3 Wir geben zwei weitere Beschreibungen für den projektiven Raum $\mathbb{R}P^2$ (vgl. Beispiel 1.2.6) an.

(a) Wir betrachten $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ mit der durch

$$x \sim y \iff x = y \text{ oder } x = -y$$

definierten Äquivalenzrelation.

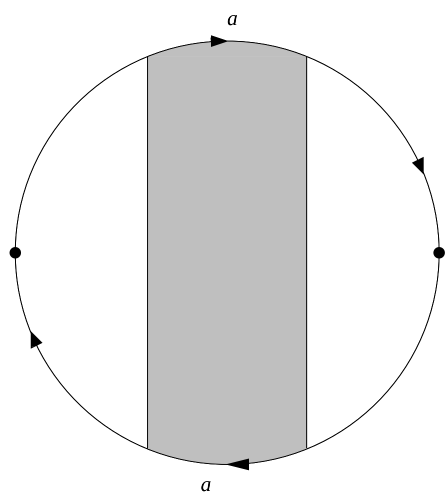


Dann ist $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \approx S^2/\sim$. Das heißt, identifizieren wir die antipodalen Punkte auf S^2, so erhalten wir einen zu $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ homöomorphen topologischen Raum.

(b) Es ist $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \approx D^2/\sim$, wobei $\sim$ die von

$$x \sim -x \quad \text{für} \quad |x| = 1$$

erzeugte Äquivalenzrelation auf D^2 ist.

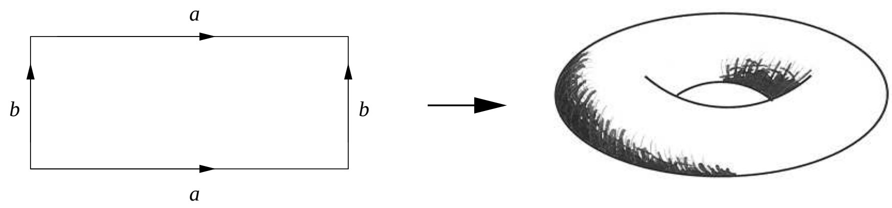


Wie das Bild illustriert, enthält $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ eine Teilmenge, die zum Möbius-Band homöomorph ist. $\square$

Beispiel 2.1.4 Sei wieder $N = [0,2] \times [0,1]$ und sei die Äquivalenzrelation $\sim$ auf N von

$$(x_1, 0) \sim (x_1, 1) \quad \text{und} \quad (0, x_2) \sim (2, x_2)$$

erzeugt. In diesem Fall erhält man als Quotienten $N/\sim$ den **Torus** T^2.

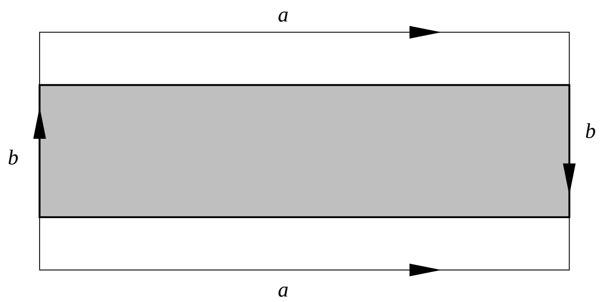


□

Beispiel 2.1.5 Betrachten wir auf $N = [0,2] \times [0,1]$ die von

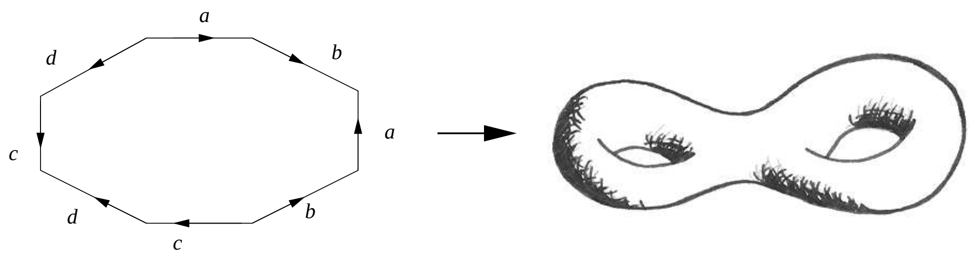
$$(x_1, 0) \sim (x_1, 1) \quad \text{und} \quad (0, x_2) \sim (2, 1 - x_2)$$

erzeugte Äquivalenzrelation $\sim$, so ist der Quotient $N/\sim$ die **Kleinsche Flasche** K^2.



Diese enthält wieder eine zum Möbius-Band homöomorphe Teilmenge. □

Beispiel 2.1.6 Verklebt man die Kanten eines Achtecks wie unten angegeben, so erhält man die "Brezelfläche" (vgl. auch Beispiel 2.1.10).



□

In den Beispielen 2.1.2 bis 2.1.6 haben wir bisher noch nichts dazu gesagt, ob die beschriebenen Flächen orientierbar sind oder nicht. Dazu müssen wir zuerst "Orientierbarkeit" definieren. Im zweidimensionalen Fall kann man folgendermaßen verfahren.

Definition 2.1.7 *Eine Fläche heißt* **nicht-orientierbar***, falls sie eine Menge enthält, die homöomorph zum Möbius-Band ist. Andernfalls heißt sie* **orientierbar***.*

Der reell-projektive Raum $\mathbb{RP}^2$ und die Kleinsche Flasche K^2 sind demnach nicht-orientierbar, während die Sphäre S^2, der Torus T^2 und die Brezelfläche orientierbar sind.

Wir kommen jetzt zur Konstruktion der zusammenhängenden Summe. Seien M_1 und M_2 zwei Flächen. Wir wählen Teilmengen $D_1 \subseteq M_1$ und $D_2 \subseteq M_2$ derart, dass D_1 und D_2 zur abgeschlossenen Kreisscheibe $D^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ homöomorph sind. Außerdem fixieren wir Homöomorphismen $h_1 : D_1 \to D^2$ und $h_2 : D_2 \to D^2$. Sei D_i°, $i = 1, 2$, das Innere von D_i, d.h.

$$D_i^\circ = h_i^{-1}\left(D^{2,\circ}\right) \ ,$$

wobei

$$D^{2,\circ} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\right\} \ .$$

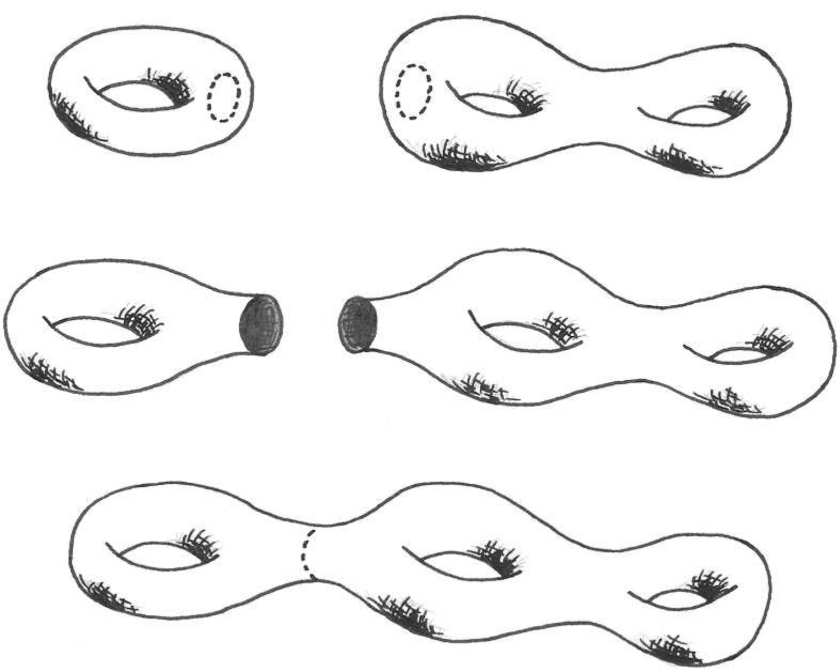
Wir versehen die disjunkte Vereinigung $(M_1 \setminus D_1^\circ) \dot\cup (M_2 \setminus D_2^\circ)$ mit der von

$$x \sim y \quad \text{für } x \in \partial D_1,\ y \in \partial D_2 \text{ und } h_1(x) = h_2(y)$$

erzeugten Äquivalenzrelation und setzen

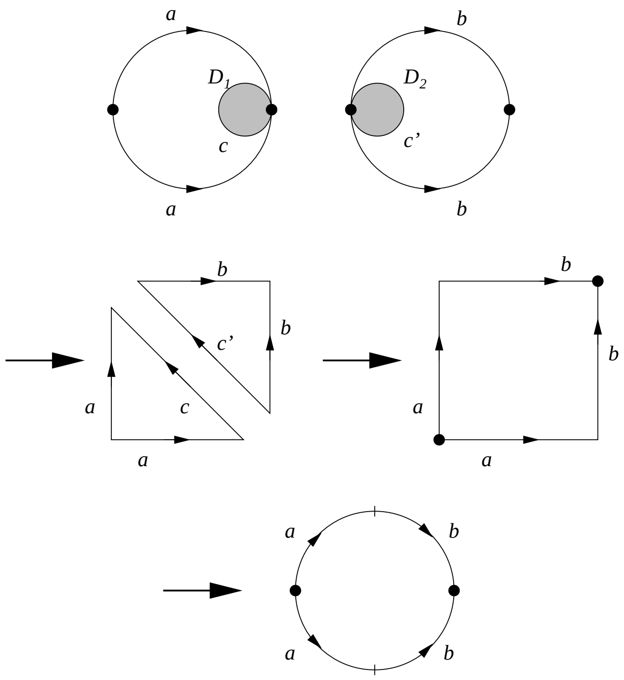
$$M_1 \sharp M_2 = \left((M_1 \setminus D_1^\circ) \dot\cup (M_2 \setminus D_2^\circ)\right) / \sim \ .$$

Man erhält $M_1 \sharp M_2$ also, indem man aus M_1 und M_2 offene Kreisgebiete D_1° und D_2° herausschneidet und dann die Randkreise ∂D_1 und ∂D_2 miteinander verklebt (vgl. Bildfolge unten). Wie man leicht verifizieren kann, ist $M_1 \sharp M_2$ wieder eine Fläche.



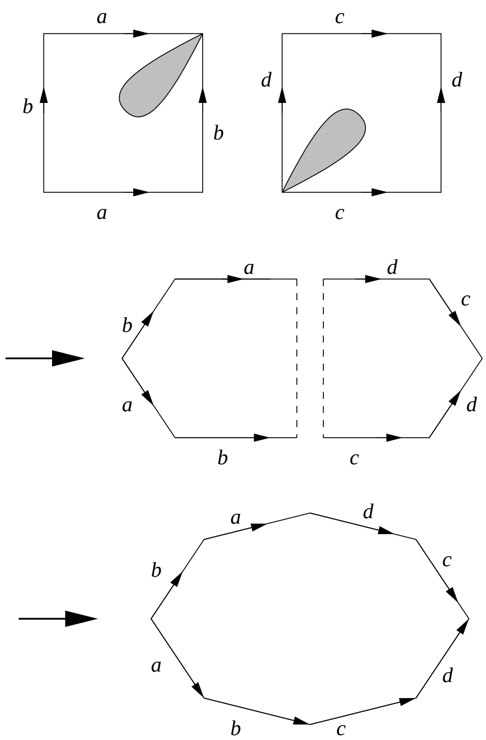
Definition 2.1.8 *Die Fläche $M_1 \sharp M_2$ heißt* **zusammenhängende Summe von M_1 und M_2**.

Beispiel 2.1.9 Die zusammenhängende Summe $S^2 \sharp S^2$ von zwei disjunkten Kopien von S^2 ist zu S^2 homöomorph. Um dies einzusehen, nutzen wir die in Beispiel 2.1.2 angegebene Beschreibung von S^2. Für die Konstruktion von $S^2 \sharp S^2$ erhalten wir dann folgendes Bild, wobei $c = \partial D_1$ und $c' = \partial D_2$.



□

Beispiel 2.1.10 Die Brezelfläche ist homöomorph zu $T^2 \sharp T^2$. Dies kann man folgendermaßen beweisen (vgl. Beispiele 2.1.4 und 2.1.6).



□

Das Hauptziel dieses Kapitels ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 2.1.11 *Jede geschlossene Fläche ist zu* $S^2 \sharp m T^2$ *für ein* $m = 0, 1, \ldots$ *oder zu* $n\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ *für ein* $n = 1, 2, \ldots$ *homöomorph. Dabei ist*

$$S^2 \sharp m T^2 = S^2 \sharp \underbrace{T^2 \sharp T^2 \sharp \ldots \sharp T^2}_{m} \quad \textit{und} \quad n\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = \underbrace{\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \sharp \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \sharp \ldots \sharp \mathbb{R}\mathrm{P}^2}_{n} .$$

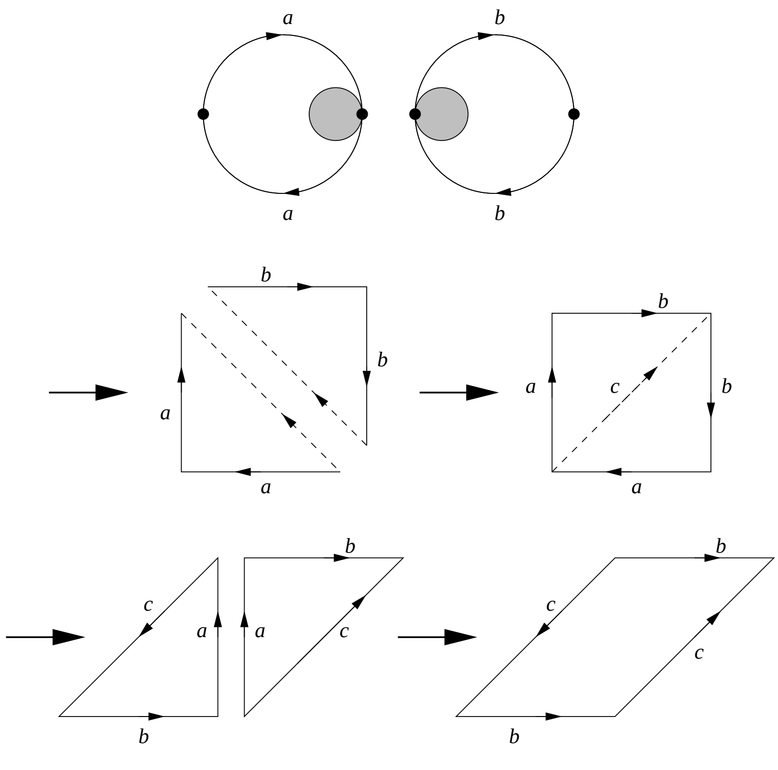
Diesen Satz können wir mit Hilfe der folgenden Überlegung umformulieren.

Satz 2.1.12 *Es gilt:*

(i) $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \sharp \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \approx K^2$,

(ii) $T^2 \sharp \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \sharp \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \sharp \mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

Beweis. Wir beweisen hier nur die Aussage (i) und zwar wie folgt (vgl. Beispiele 2.1.3(b) und 2.1.5).



□

Folgerung 2.1.13 *Für* $n = 1, 2, \ldots$ *gilt*

$$n\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \approx \begin{cases} \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \sharp k T^2 & , \textit{falls } n = 2k+1 \\ K^2 \sharp k T^2 & , \textit{falls } n = 2k+2 \end{cases} .$$

Beweis. Diese Aussage kann man mit vollständiger Induktion beweisen. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial, für $n = 2$ ist es Satz 2.1.12(i). Für den Induktionsschritt schließt man mit Hilfe von Satz 2.1.12(ii), dass

$$\begin{aligned} n\mathbb{RP}^2 &\approx \big((n-3)\mathbb{RP}^2\big) \sharp \mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2 \\ &\approx \big((n-3)\mathbb{RP}^2\big) \sharp \mathbb{RP}^2 \sharp T^2 \\ &\approx \big((n-2)\mathbb{RP}^2\big) \sharp T^2 \end{aligned}$$

für $n \geq 3$. □

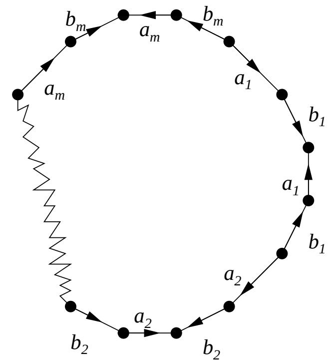
Damit ist Satz 2.1.11 äquivalent zu

Satz 2.1.14 *Jede geschlossene Fläche ist zu $S^2 \sharp mT^2$, $\mathbb{RP}^2 \sharp mT^2$ oder $K^2 \sharp mT^2$ für ein $m = 0, 1, \ldots$ homöomorph.*

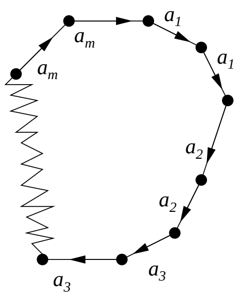
Wir wollen jetzt noch "kanonische Formen" der Realisierung der Flächen S^2, mT^2 und $m\mathbb{RP}^2$ fixieren. Für S^2 soll dieses die in Beispiel 2.1.2 angegebene Form sein. Als kanonische Form von mT^2 und $m\mathbb{RP}^2$ wählen wir die Darstellungen des folgenden Satzes.

Satz 2.1.15 *Für $m = 1, 2, \ldots$ gilt:*

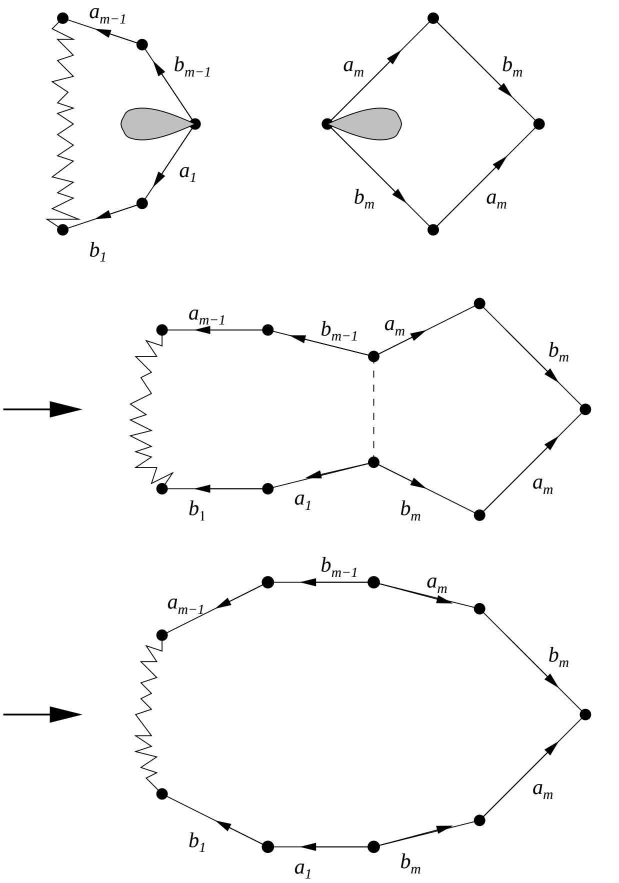
(i) *mT^2 ist homöomorph zu einem $4m$-Eck, bei dem die Kanten in der im Bild beschriebenen Art und Weise identifiziert sind.*



(ii) *$m\mathbb{RP}^2$ ist homöomorph zu einem $2m$-Eck, bei dem die Kanten folgendermaßen identifiziert sind.*



Beweis. (i) Wir beweisen das mittels Induktion über m. Für $m = 1$ ist die Behauptung trivial und für $m = 2$ haben wir die Behauptung bereits gezeigt (siehe Beispiel 2.1.10). Ist die Behauptung für $m - 1$ richtig, so erhalten wir die Behauptung für m wie folgt.



(ii) Der Beweis verläuft analog zu (i). □

Aus Satz 2.1.15 folgt, dass für die Realisierung von mT^2 und $m\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ nur die Beschreibung der Identifikation auf dem Rand wesentlich ist. Diese Identifikation kann auch folgendermaßen angegeben werden: Wir fixieren auf dem Rand des Polygons einen Durchlaufsinn (z.B. im Uhrzeigersinn). Dann schreiben wir die Kanten, startend von einem fixierten Eckpunkt, hintereinander auf und versehen die Bezeichnung einer Kante mit dem Exponent -1, falls die Richtung dieser Kante entgegengesetzt zum fixierten Durchlaufsinn ist.

Wenn wir diese Beschreibung nutzen, erhalten wir

Folgerung 2.1.16 (i) *S^2 ist homöomorph zum 2-Eck mit der Identifikation*

$$aa^{-1}$$

auf dem Rand.

(ii) *mT^2, $m = 1, 2, \ldots$, ist homöomorph zum $4m$-Eck mit der Identifikation*

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots a_m b_m a_m^{-1} b_m^{-1}$$

auf dem Rand.

(iii) *$m\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, $m = 1, 2, \ldots$, ist homöomorph zum $2m$-Eck mit der Identifikation*

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_m a_m$$

auf dem Rand. □

2.2 Triangulation von kompakten Flächen

Im folgenden sei M eine Fläche.

Definition 2.2.1 *Eine* **Triangulation von** M *ist eine Familie* $\{(T_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Jedes* T_i *ist eine abgeschlossene Teilmenge von* M *und*

$$\bigcup_{i \in I} T_i = M \ .$$

(2) *Für jedes* $i \in I$ *ist* $\varphi_i : T_i' \to T_i$ *ein Homöomorphismus von einem Dreieck* $T_i' \subseteq \mathbb{R}^2$ *auf* T_i.

(3) *Ist* $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ *für* $i \neq j$, *so gilt genau einer der folgenden beiden Fälle.*

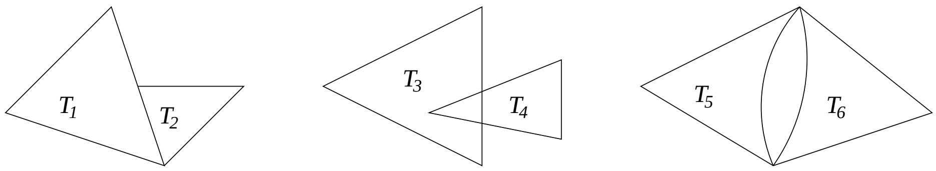
 (a) $\varphi_i^{-1}(T_i \cap T_j) = \{x_i\}$ *und* $\varphi_j^{-1}(T_i \cap T_j) = \{x_j\}$, *wobei* x_i *eine Ecke von* T_i' *und* x_j *eine Ecke von* T_j' *ist.*

 (b) $\varphi_i^{-1}(T_i \cap T_j)$ *ist eine Kante von* T_i' *und* $\varphi_j^{-1}(T_i \cap T_j)$ *ist eine Kante von* T_j'.

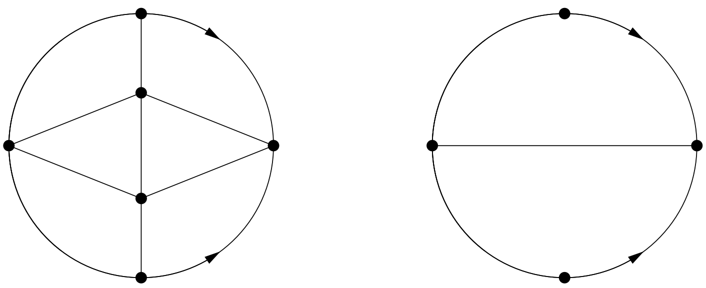
Eine Triangulation $\{(T_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ *heißt* **endlich**, *falls die Indexmenge* I *endlich ist.*

Bezeichnung 2.2.2 *Ist* $\{(T_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ *eine Triangulation, so nennen wir die* T_i *auch Dreiecke und die Bilder von Kanten und Ecken von* T_i' *unter* φ_i *auch Kanten und Ecken.*

Im nächsten Bild sind typische Beispiele für Situationen dargestellt, die bei Triangulationen nicht zugelassen sind.

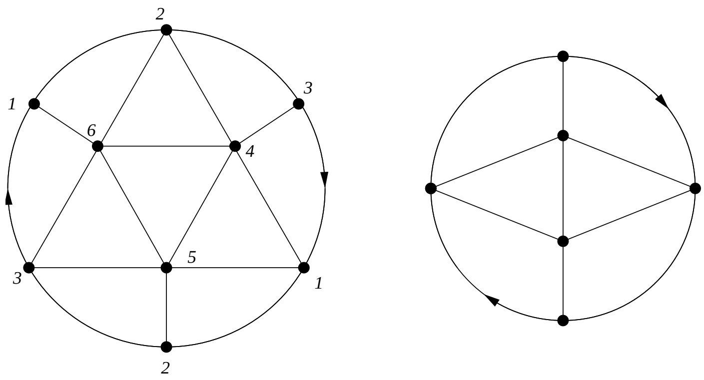


Beispiel 2.2.3 Das linke Bild beschreibt eine Triangulation von S^2, das rechte dagegen nicht.



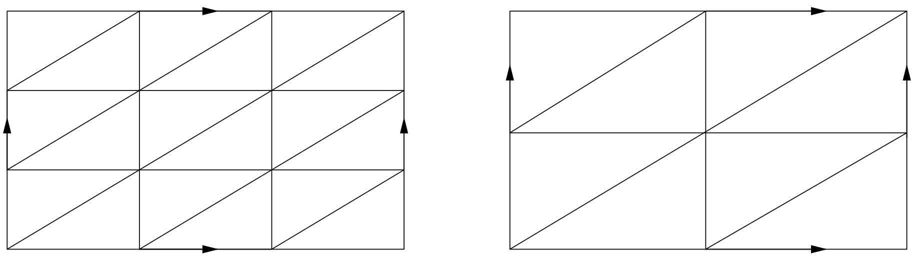
□

Beispiel 2.2.4 Im linken Bild sehen wir eine Triangulation vom projektiven Raum $\mathbb{RP}^2$, während das rechte Bild keine Triangulation ist.



□

Beispiel 2.2.5 Links ist eine Triangulation vom Torus T^2 dargestellt. Die im rechten Bild angegebene "Zerlegung" von T^2 ist keine Triangulation.



□

Den folgenden Satz geben wir ohne Beweis an.

Satz 2.2.6 (i) *Jede Fläche besitzt eine Triangulation (man sagt: "ist triangulierbar").*

(ii) *Jede Triangulation einer kompakten Fläche ist endlich.* □

Bemerkung 2.2.7 (i) Der erste Beweis von Satz 2.2.6(i) wurde 1925 von T. Rado publiziert.

(ii) Die Triangulierbarkeit von dreidimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten wurde 1952 von E. Moise bewiesen.

(iii) Ob topologische Mannigfaltigkeiten höherer Dimension stets triangulierbar sind, ist bisher unbekannt. □

Den folgenden Satz werden wir beim Beweis von Satz 2.1.11 wesentlich benutzen.

Satz 2.2.8 *Sei* $\{(T_i, \varphi_i)\}_{i=1,\dots,n}$ *eine Triangulation einer geschlossenen Fläche* M. *Dann gilt:*

(i) Jede Kante $L \subseteq M$ *ist Kante von genau zwei Dreiecken* T_i *und* T_j.

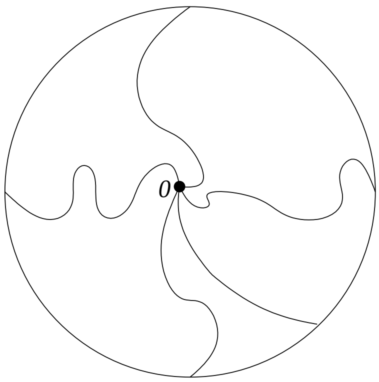
(ii) Sei $x \in M$ *eine Ecke. Dann können wir die Dreiecke, die* x *als Ecke besitzen, derart als endliche Folge*

$$T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_k}$$

anordnen, dass T_{i_j} *und* $T_{i_{j+1}}$ *für* $1 \leq j \leq k$ *eine gemeinsame Kante haben. Dabei ist* $T_{i_{k+1}} = T_{i_1}$ *gesetzt.*

Beweis. (i) Sei $L \subseteq M$ eine Kante und sei $y \in L$ ein innerer Punkt von L in der Relativtopologie von L. Wäre L Kante nur eines Dreiecks T_i, so wäre $y \in \partial M$, was aber $\partial M = \emptyset$ widersprechen würde. Also muss L Kante von mindestens 2 Dreiecken sein. Dass L nicht Kante von mehr als zwei Dreiecken sein kann, folgt daraus, dass y eine zur offenen Kreisscheibe $D^{2,\circ}$ homöomorphe Umgebung $U \subseteq M$ besitzt.

(ii) Wir betrachten ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \approx D^{2,\circ}$ und einen Homöomorphismus $\psi : U \to D^{2,\circ}$ mit $\psi(x) = 0$. Ist U genügend klein, so hat die Triangulation unter ψ folgendes Bild.



□

2.3 Beweis von Satz 2.1.11

Sei M eine geschlossene Fläche. Wir werden zeigen, dass M homöomorph zu einem Polygon ist, bei dem die Kanten paarweise in einer der in Folgerung 2.1.16 angegebenen Arten identifiziert sind. Zuerst beweisen wir

Lemma 2.3.1 *Für jede Triangulation von* M *existiert eine solche Anordnung* $T_1, \dots, T_n$ *seiner Dreiecke, dass* T_i *für* $i = 2, \dots, n$ *mit mindestens einem der Dreiecke* $T_1, \dots, T_{i-1}$ *eine gemeinsame Kante* e_i *besitzt.*

Beweis. Sei eine beliebige Triangulation von M gegeben. Wir fixieren ein Dreieck T_1. Dann wählen wir T_2 derart, dass T_1 und T_2 eine gemeinsame Kante haben. Als nächstes wählen wir ein Dreieck T_3, das entweder mit T_1 oder mit T_2 eine gemeinsame Kante besitzt. Analog wählen wir $T_4, T_5, \dots$. Da die Triangulation nach Satz 2.2.6(ii) endlich ist, muss dieser Prozess bei einem T_k abbrechen.

Angenommen, $\{T_1, \dots, T_k\}$ enthält nicht alle Dreiecke der Triangulation. Seien $T_{k+1}, \dots, T_n$ die restlichen Dreiecke. Dann besitzt kein Dreieck aus der Menge $\{T_1, \dots, T_k\}$ mit irgendeinem Dreieck aus der Menge $\{T_{k+1}, \dots, T_n\}$ eine gemeinsame Kante. Außerdem existieren kein $i \in \{1, \dots, k\}$ und kein $j \in \{k+1, \ldots, n\}$ derart, dass T_i und T_j eine gemeinsame Ecke besitzen. Sonst würde nämlich mit Satz 2.2.8(ii) folgen, dass auch ein solches $i' \in \{1, \ldots, k\}$ und ein solches $j' \in \{k+1, \ldots, n\}$ existieren, dass $T_{i'}$ und $T_{j'}$ eine gemeinsame Kante besitzen.

Wir erhalten somit, dass

$$\bigcup_{i=1}^{k} T_i \cap \bigcup_{j=k+1}^{n} T_j = \emptyset \; .$$

Das heißt, wir haben zwei nichtleere, abgeschlossene Teilmengen von M, die disjunkt sind. Da dies im Widerspruch dazu steht, dass M zusammenhängend ist, ist das Lemma bewiesen. $\square$

Sei jetzt $\{(T_i, \varphi_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ eine Triangulation von M. Wir setzen o.B.d.A. voraus, dass $T_1, \ldots, T_n$ eine Anordnung gemäß Lemma 2.3.1 ist und dass $e_2, \ldots, e_n$ eine entsprechende Wahl von Kanten ist. Dies nutzen wir zur Konstruktion eines Polygons, welches nach paarweiser Identifikation der Kanten homöomorph zu M ist.

Sei wieder T_i' das zum Homöomorphismus $\varphi_i : T_i' \to T_i$ gehörende gewöhnliche Dreieck in der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass

$$T_i' \cap T_j' = \emptyset \quad \text{für} \quad i \neq j \; .$$

Sei

$$T' = \bigcup_{i=1}^{n} T_i' \; .$$

Dies ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Wir definieren $\varphi : T' \to M$ durch

$$\varphi\big|_{T_i'} = \varphi_i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n \; .$$

Offensichtlich ist φ stetig und surjektiv.

Lemma 2.3.2 *Die Topologie von M ist die von φ induzierte Quotiententopologie.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $V \subseteq M$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $\varphi^{-1}(V) \subseteq T'$ abgeschlossen ist.

Sei $V \subseteq M$ abgeschlossen. Da φ stetig ist, ist dann auch $\varphi^{-1}(V) \subseteq T'$ abgeschlossen.

Sei umgekehrt $\varphi^{-1}(V) \subseteq T'$ abgeschlossen. Da T' kompakt ist, ist auch $\varphi^{-1}(V)$ kompakt. Wegen der Stetigkeit von φ und $V = \varphi\left(\varphi^{-1}(V)\right)$ folgt, dass V kompakt und insbesondere eine abgeschlossene Teilmenge von M ist. $\square$

Auf T' betrachten wir die von

$$x \sim y \quad \text{für} \quad \varphi(x) = \varphi(y) \in \bigcup_{i=2}^{n} e_i$$

erzeugte Äquivalenzrelation und setzen

$$D = T'/\!\sim \; .$$

Anschaulich entsteht also D aus T' durch Zusammenkleben der Dreiecke mit gemeinsamer Kante e_i entlang e_i.

Da nur solche Elemente von T' identifiziert werden, die unter φ das gleiche Bild haben, existiert eine Abbildung $\psi : D \to M$ mit

$$\psi \circ \pi = \varphi \; .$$

Dabei ist $\pi : T' \to D$ die kanonische Projektion.

Lemma 2.3.3 *Die Abbildung ψ ist stetig.*

Beweis. Sei $V \subseteq M$ abgeschlossen. Da φ stetig ist, ist $\varphi^{-1}(V) \subseteq T'$ abgeschlossen. Weil $\varphi^{-1}(V) = \pi^{-1}\left(\psi^{-1}(V)\right)$ und weil D die von π induzierte Quotiententopologie trägt, bedeutet das, dass $\psi^{-1}(V) \subseteq D$ abgeschlossen ist. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

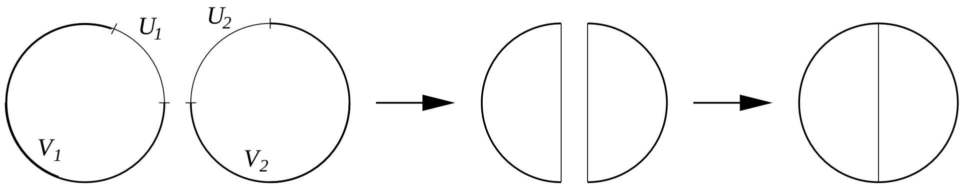
Wie bei φ zeigt man, dass die Topologie von M die von ψ induzierte Quotiententopologie ist.

Lemma 2.3.4 *D ist zur abgeschlossenen Kreisscheibe D^2 homöomorph.*

Beweis. Wir überlegen uns zuerst folgendes. Seien V_1 und V_2 homöomorph zu D^2 und gelte $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Außerdem seien Mengen $U_i \subseteq \partial V_i$ und Homöomorphismen $h_i : U_i \to [0,1]$, $i = 1,2$, gegeben. Auf $V_1 \cup V_2$ betrachten wir die von

$$x \sim y \quad \text{für} \quad x \in U_1,\, y \in U_2 \text{ und } h_1(x) = h_2(y)$$

erzeugte Äquivalenzrelation. Wie das nächste Bild illustriert, ist dann $(V_1 \cup V_2)/\!\sim$ homöomorph zu D^2.



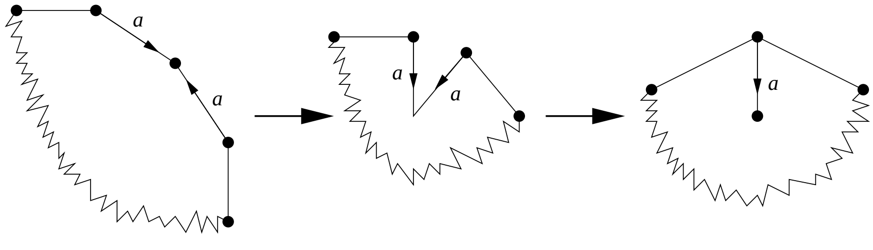
Beachtet man nun, dass $T_i' \approx D^2$ für $i = 1, \ldots, n$, und klebt man D schrittweise aus diesen Dreiecken zusammen, so folgt mit der obigen Überlegung die Behauptung. □

Offensichtlich erhält man die Fläche M aus dem Polygon D, indem man bestimmte Paare von Kanten auf dem Rand von D miteinander identifiziert. Wichtig ist jetzt also nur noch die Identifikation auf dem Rand. Diese Identifikation können wir in der vor Folgerung 2.1.16 angegebenen Art und Weise beschreiben, z.B.

$$aa^{-1}fbb^{-1}f^{-1}e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}e \ .$$

Unser Ziel ist nun, das Polygon D schrittweise derart zu transformieren, dass die Randidentifikation eine der in Folgerung 2.1.16 angegebenen Formen annimmt. Dafür setzen wir o.B.d.A. voraus, dass M weder zu S^2 noch zu $\mathbb{RP}^2$ homöomorph ist. Dann besteht der Rand von D aus mindestens 4 Kanten.

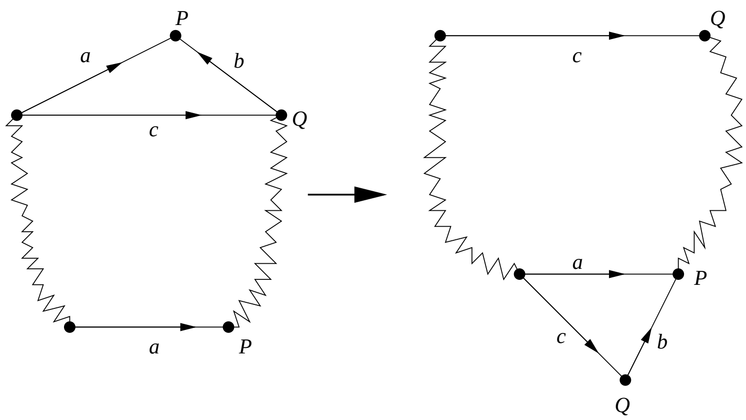
1. Schritt: Tritt in der Beschreibung der Randidentifikation eine Zeichenkette der Form aa^{-1} auf, so kann diese wie folgt eliminiert werden.



Wir können somit o.B.d.A. annehmen, dass in der Randidentifikation von D Ausdrücke der Form aa^{-1} nicht enthalten sind.

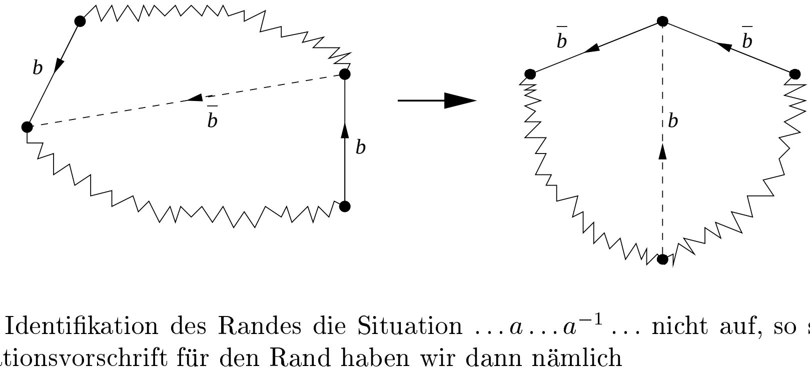
2. Schritt: Im nächsten Schritt transformieren wir D zu einem Polygon, bei dem alle Ecken mit einem einzigen Punkt identifiziert werden.

Wir nennen zwei Ecken von D äquivalent, falls sie bei der Randidentifikation in einen Punkt übergehen. Hat D noch nicht die gewünschte Gestalt, d.h. D besitzt mindestens zwei verschiedene Äquivalenzklassen von Ecken, so existieren zwei benachbarte Ecken P und Q, die nicht äquivalent sind (siehe Bild unten). Nach Voraussetzung kann die Seite a nicht mit der Seite b identifiziert werden. Folglich können wir wie nachfolgend angegeben verfahren.



Es ensteht ein neues Polygon D' mit einem Element weniger in der Äquivalenzklasse von P und einem Element mehr in der Äquivalenzklasse von Q. Wir wiederholen den 1. Schritt. Dabei kann höchstens P innerer Punkt des neugebildeten Polygons D'' werden. In diesem Fall würde sich die Anzahl der Elemente in den Äquivalenzklassen von P und Q jeweils um 1 vermindern. Sind noch nicht alle Ecken von D'' äquivalent, so wiederholen wir die obige Konstruktion geeignet. Offensichtlich erhalten wir nach endlich vielen Wiederholungen das gewünschte Resultat.

3. Schritt: Wir transformieren $\ldots b \ldots b \ldots$ wie folgt zu $\ldots \bar{b}\bar{b} \ldots$.



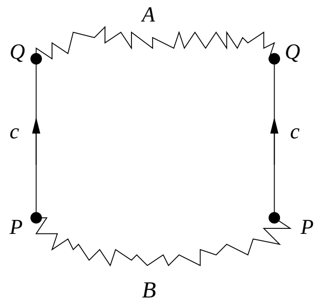
Tritt bei der Identifikation des Randes die Situation $\ldots a \ldots a^{-1} \ldots$ nicht auf, so sind wir fertig. Als Identifikationsvorschrift für den Rand haben wir dann nämlich

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_n a_n \ ,$$

woraus $M \approx n\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ folgt. Im anderen Fall können wir das folgende Lemma benutzen, wobei wir voraussetzen, dass der 1. bis 3. Schritt bereits durchgeführt sind.

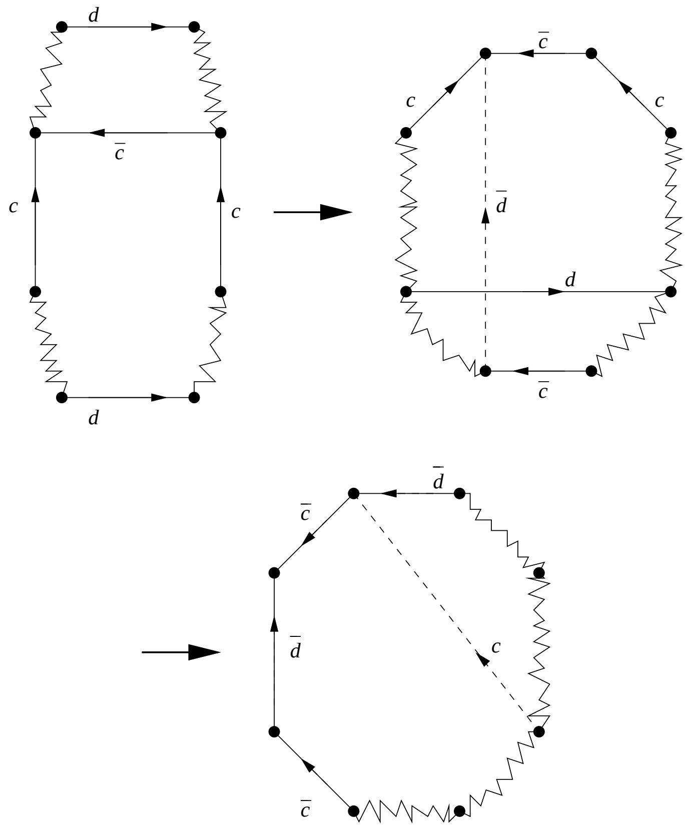
Lemma 2.3.5 *Enthält die Beschreibung der Randidentifikation $\ldots c \ldots c^{-1} \ldots$, so enthält sie auch $\ldots c \ldots d \ldots c^{-1} \ldots d^{-1} \ldots$ für ein weiteres Paar von Kanten d.*

Beweis. Angenommen, solch ein Paar von Kanten d existiert nicht. Dann haben wir folgendes Bild.



Dabei sind A und B Folgen von Kanten. Jede Kante in A muss mit einer Kante in A identifiziert werden und genauso für B. Dann können aber P und Q nicht äquivalent sein, was der Voraussetzung widerspricht, dass der 2. Schritt durchgeführt ist. $\square$

4. Schritt: Wir transformieren $\ldots c \ldots d \ldots c^{-1} \ldots d^{-1} \ldots$ in $\ldots \bar{c}\bar{d}\bar{c}^{-1}\bar{d}^{-1} \ldots$.



Ist nach dem 4. Schritt in der Beschreibung der Identifikation auf dem Rand kein Paar aa enthalten, so hat die Randidentifikation die Gestalt

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

und folglich gilt $M \approx nT^2$. Andernfalls benutzen wir, dass (vgl. Satz 2.1.12(ii))

$$T^2 \sharp \mathbb{RP}^2 \approx \mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2 \ .$$

Demnach kann $\ldots aba^{-1}b^{-1}cc \ldots$ durch $\ldots \bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{c}\bar{c} \ldots$ ersetzt werden. Enthält also die Beschreibung der Randidentifikation nach dem 4. Schritt ein Paar aa, so kann man das Polygon so transformieren, dass die Identifikation auf dem Rand durch

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_n a_n$$

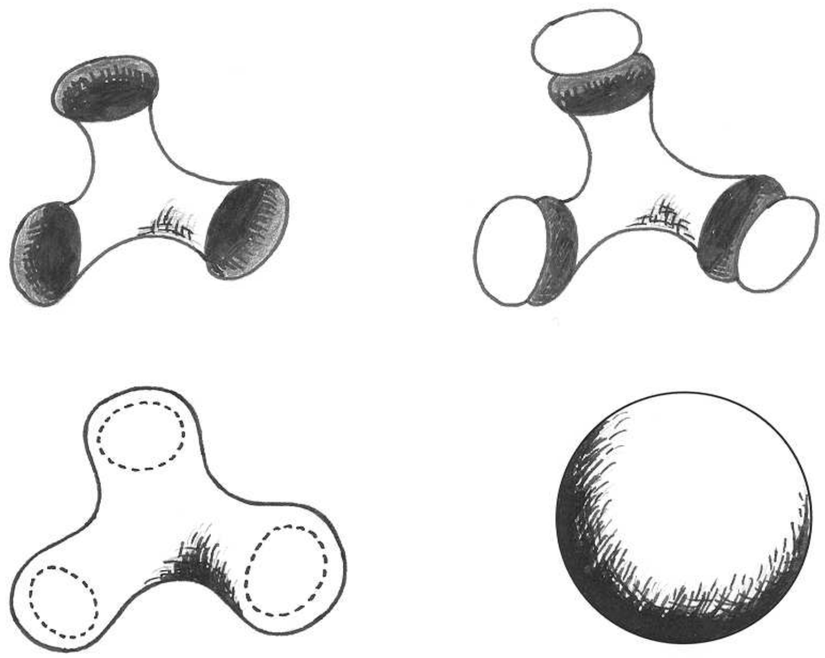
gegeben ist. Damit gilt wieder $M \approx n\mathbb{RP}^2$, womit der Beweis von Satz 2.1.11 beendet ist.

2.4 Zur Klassifikation kompakter Flächen mit Rand

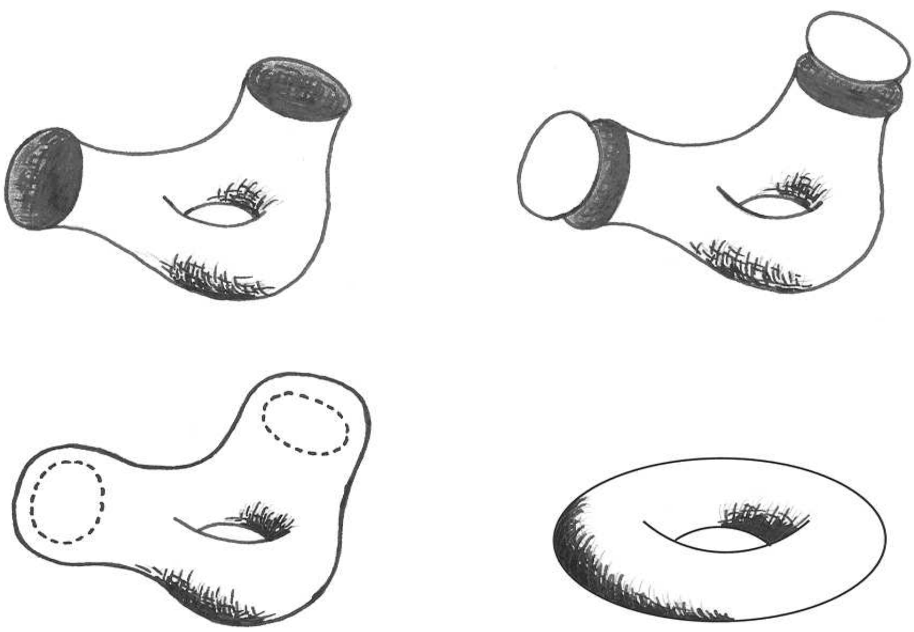
Sei M eine kompakte Fläche mit Rand, d.h. eine zusammenhängende und kompakte zweidimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit $\partial M \neq \emptyset$. Man kann zeigen, dass dann ∂M (bezüglich der Relativtopologie) eine kompakte eindimensionale topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand ist. Nach Satz 1.3.2 ist somit jede Zusammenhangskomponente von ∂M homöomorph zu S^1.

Sei M^* diejenige Fläche, die aus M entsteht, indem man an jede Randkomponente von M, d.h. jede Zusammenhangskomponente von ∂M längs S^1 eine Kreisscheibe anklebt. Dann ist M^* eine geschlossene Fläche.

Die nächste Bildfolge beschreibt diese Konstruktion für eine Fläche M mit drei Randkomponenten, bei der M^* zur Sphäre S^2 homöomorph ist.



Unten ist ein Beispiel angegeben, bei dem M zwei Randkomponenten besitzt und M^* zum Torus T^2 homöomorph ist.



Die Klassifikation der kompakten Flächen mit Rand kann mit folgendem Satz auf die Klassifikation der geschlossenen Flächen zurückgeführt werden.

Satz 2.4.1 *Seien M_1 und M_2 zwei kompakte Flächen mit Rand und habe M_1 die gleiche Anzahl von Randkomponenten wie M_2. Dann sind M_1 und M_2 genau dann homöomorph, wenn M_1^* und M_2^* homöomorph sind.* □

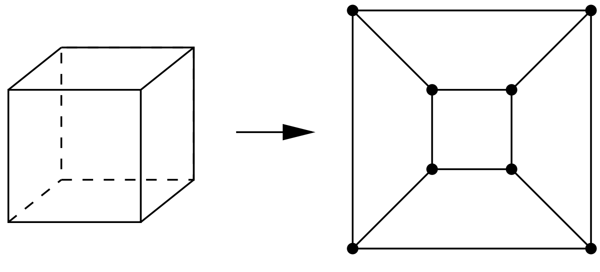
2.5 Die Euler-Charakteristik einer geschlossenen Fläche

Wir erinnern zunächst an folgenden Fakt.

Satz 2.5.1 (Eulersche Polyederformel) *Sei P ein konvexes Polyeder und bezeichne* **e** *die Anzahl der Ecken,* **k** *die Anzahl der Kanten und* **s** *die Anzahl der Seiten von P. Dann ist*

$$\mathbf{e} - \mathbf{k} + \mathbf{s} = 2\,.$$

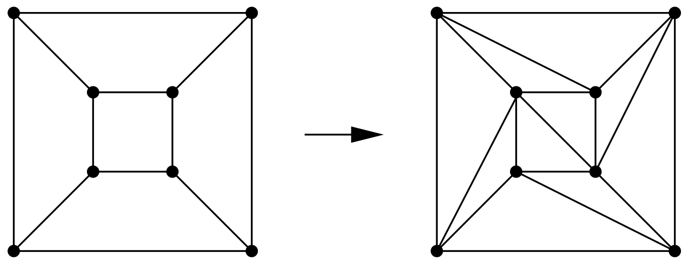
Beweis. Sei F die Oberfläche von P, d.h. $F = \partial P$, und sei S eine Seite von P. Wir entfernen von F das Innere von S. Das so entstehende Gebilde ist eine aus Polygonen zusammengesetzte Fläche F' mit Rand $\partial F' = \partial S$. Da P konvex ist, können wir F' durch eine geeignete Zentralprojektion flach in der Ebene ausbreiten. Wie im Bild unten für den Würfel skizziert, erhalten wir auf diese Weise ein ebenes Netz $\mathcal{N}$, auch **Schlegel-Diagramm** von P genannt, mit **e** Knotenpunkten und **k** Kanten, die $\mathbf{a} = \mathbf{s} - 1$ Polygone einschließen.



Wir setzen

$$\mathbf{x} = \mathbf{e} - \mathbf{k} + \mathbf{s} = \mathbf{e} - \mathbf{k} + \mathbf{a} + 1\ .$$

Um zu zeigen, dass $\mathbf{x} = 2$, ändern wir $\mathcal{N}$ wie folgt ab. Zunächst zerlegen wir jedes der Polygone von $\mathcal{N}$ durch Diagonalen in Dreiecke. Da sich beim Einfügen einer Diagonalen sowohl $\mathbf{k}$ als auch $\mathbf{a}$ um 1 erhöhen, bleibt $\mathbf{x}$ dabei unverändert.

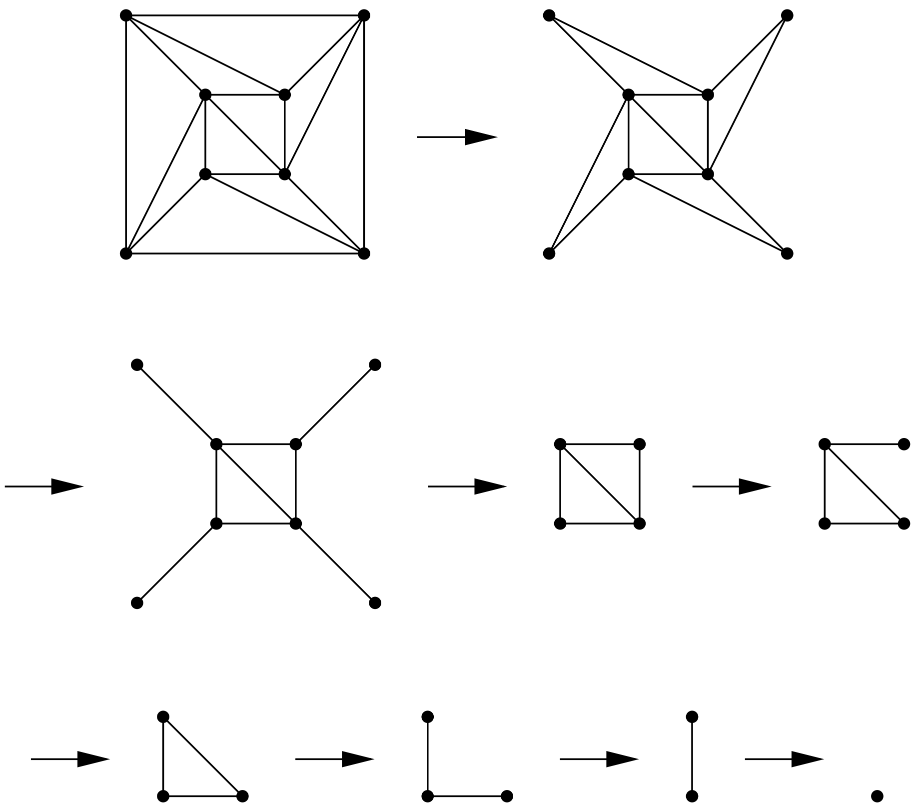


Dann führen wir einen der folgenden Schritte aus.

Schritt A: Wir entfernen eine außen liegende Kante von $\mathcal{N}$, welche gleichzeitig Kante eines Dreiecks ist. Da sich sowohl $\mathbf{k}$ als auch $\mathbf{a}$ um 1 vermindern, ändert sich $\mathbf{x}$ nicht.

Schritt B: Wir entfernen einen außen liegenden Knotenpunkt von $\mathcal{N}$, welcher kein Eckpunkt eines Dreiecks ist, und die mit diesem Knotenpunkt inzidierende Kante. Hierbei nehmen $\mathbf{e}$ und $\mathbf{k}$ um 1 ab. Also bleibt $\mathbf{x}$ wieder unverändert.

Indem wir dies so lange wie möglich wiederholen, erreichen wir schließlich, dass das Netz nur noch aus einem Knotenpunkt besteht, also $\mathbf{e} = 1$ und $\mathbf{k} = \mathbf{a} = 0$ gilt.

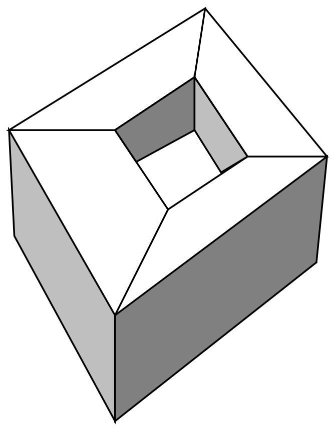


Da sich aus $\mathbf{e} = 1$ und $\mathbf{k} = \mathbf{a} = 0$ trivialerweise

$$\mathbf{x} = \mathbf{e} - \mathbf{k} + \mathbf{a} + 1 = 2$$

ergibt, ist damit der Satz bewiesen. □

Bemerkung 2.5.2 Ohne die Voraussetzung, dass P konvex ist, wird Satz 2.5.1 falsch. Man betrachte z.B. das folgende Polyeder, dessen Oberfläche zu T^2 homöomorph ist.

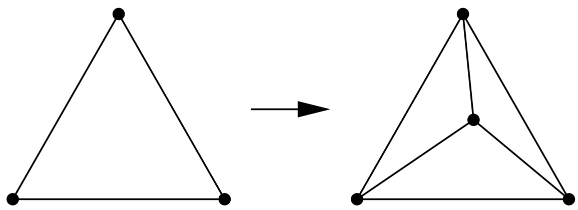


Hier ist $\mathbf{e} = 16$, $\mathbf{k} = 32$, $\mathbf{s} = 16$ und somit $\mathbf{e} - \mathbf{k} + \mathbf{s} = 0$. □

Sei jetzt M eine geschlossene Fläche. Wir wählen eine Triangulation $\mathcal{T}$ von M und setzen

$$\chi(M) = \mathbf{e} - \mathbf{k} + \mathbf{s} \ ,$$

wobei $\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathcal{T})$ die Anzahl der Ecken, $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathcal{T})$ die Anzahl der Kanten und $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathcal{T})$ die Anzahl der Dreiecke der Triangulation $\mathcal{T}$ bezeichnet. Verfeinert man $\mathcal{T}$, indem man Dreiecke wie unten angegeben zerlegt, so bleibt, wie man leicht sieht, $\chi(M)$ unverändert.

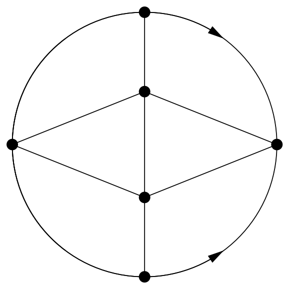


Diesen Fakt benutzt man zum Beweis von

Satz 2.5.3 *Die ganze Zahl $\chi(M)$ hängt nicht von der Wahl der Triangulation von M ab.* □

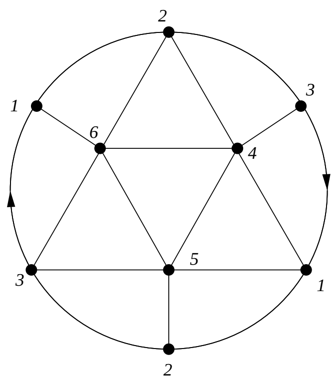
Definition 2.5.4 *Die Zahl $\chi(M)$ heißt die* **Euler-Charkteristik von** M.

Beispiel 2.5.5 Wir betrachten die Triangulation der Sphäre S^2 aus Beispiel 2.2.3.



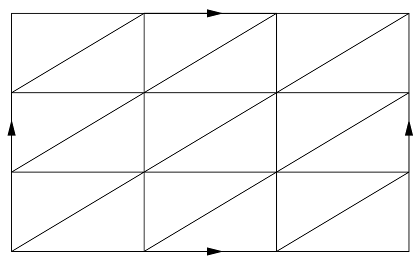
Hier ist $\mathbf{e} = 5$, $\mathbf{k} = 9$ und $\mathbf{s} = 6$. Folglich ist $\chi\left(S^2\right) = 2$. Da die Oberfläche jedes konvexen Polyeders zu S^2 homöomorph ist, korreliert dieses Resultat mit der Eulerschen Polyederformel. □

Beispiel 2.5.6 Für die unten abgebildete Triangulation des projektiven Raumes $\mathbb{RP}^2$ aus Beispiel 2.2.4 gilt $\mathbf{e} = 6$, $\mathbf{k} = 15$ und $\mathbf{s} = 10$.



Demnach ist $\chi\left(\mathbb{RP}^2\right) = 1$. □

Beispiel 2.5.7 Die Euler-Charakteristik vom Torus T^2 berechnen wir anhand der Triangulation aus Beispiel 2.2.5.



In diesem Fall haben wir $\mathbf{e} = 9$, $\mathbf{k} = 27$ und $\mathbf{s} = 18$, woraus sich $\chi\left(T^2\right) = 0$ ergibt. □

Zur Berechnung der Euler-Charakteristik einer beliebigen geschlossenen Fläche benutzen wir

Satz 2.5.8 *Seien M_1 und M_2 zwei geschlossene Flächen. Dann gilt*

$$\chi(M_1 \sharp M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2 \ .$$

Beweis. Sei $\mathcal{T}_i$ eine Triangulation von M_i und sei T_i ein Dreieck von $\mathcal{T}_i$, $i = 1, 2$. Da T_1 und T_2 zur abgeschlossenen Kreisscheibe D^2 homöomorph sind, ist

$$M_1 \sharp M_2 = \left((M_1 \setminus T_1^\circ) \,\dot\cup\, (M_2 \setminus T_2^\circ) \right) / \!\sim \ ,$$

wobei T_i° das Innere von T_i ist und die Äquivalenzrelation $\sim$ der Identifikation von ∂T_1 und ∂T_2 entspricht. Da wir dabei annehmen können, dass die Ecken von T_1 mit den Ecken von T_2 identifiziert werden, erhalten wir aus den Triangulationen $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ eine Triangulation $\mathcal{T}$ von $M_1 \sharp M_2$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathcal{T}) &= \mathbf{e}(\mathcal{T}_1) + \mathbf{e}(\mathcal{T}_2) - 3 \ , \\ \mathbf{k}(\mathcal{T}) &= \mathbf{k}(\mathcal{T}_1) + \mathbf{k}(\mathcal{T}_2) - 3 \quad \text{und} \\ \mathbf{s}(\mathcal{T}) &= \mathbf{s}(\mathcal{T}_1) + \mathbf{s}(\mathcal{T}_2) - 2 \ . \end{aligned}$$

Das liefert die Behauptung. □

Folgerung 2.5.9 *Es gilt*

$$\chi\left(S^2 \sharp m T^2\right) = 2 - 2m \quad \textit{für} \quad m = 0, 1, \ldots$$

und

$$\chi\left(n \mathbb{R}\mathrm{P}^2\right) = 2 - n \quad \textit{für} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Beweis. Nach den Beispielen 2.5.5 und 2.5.6 ist

$$\chi\left(S^2\right) = 2 \quad \text{und} \quad \chi\left(\mathbb{R}\mathrm{P}^2\right) = 1 \ .$$

Außerdem haben wir nach Satz 2.5.8 und Beispiel 2.5.7

$$\begin{aligned} \chi\left(S^2 \sharp (m+1) T^2\right) &= \chi\left(S^2 \sharp m T^2\right) + \chi\left(T^2\right) - 2 \\ &= \chi\left(S^2 \sharp m T^2\right) - 2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \chi\left((n+1) \mathbb{R}\mathrm{P}^2\right) &= \chi\left(n \mathbb{R}\mathrm{P}^2\right) + \chi\left(\mathbb{R}\mathrm{P}^2\right) - 2 \\ &= \chi\left(\mathbb{R}\mathrm{P}^2\right) - 1 \end{aligned}$$

für $m = 0, 1, \ldots$ und $n = 1, 2, \ldots$. Mit vollständiger Induktion folgt die Behauptung. □

Aufgrund von Satz 2.1.11 haben wir mit Folgerung 2.5.9 die Euler-Charakteristik jeder geschlossenen Fläche bestimmt.

Definition 2.5.10 *Sei M eine geschlossene Fläche. Ist M homöomorph zu $S^2 \sharp m T^2$ für ein $m = 0, 1, \ldots$, so heißt M* **orientierbare Fläche vom Geschlecht** *m. Ist M homöomorph zu $n \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ für ein $n = 1, 2, \ldots$, so heißt M* **nicht-orientierbare Fläche vom Geschlecht** *n.*

Folgerung 2.5.9 besagt mit dieser Definition:

Folgerung 2.5.11 *Ist M eine orientierbare (bzw. nicht-orientierbare) Fläche vom Geschlecht g, so gilt $\chi(M) = 2 - 2g$ (bzw. $\chi(M) = 2 - g$).* □

3 Die Fundamentalgruppe geschlossener Flächen

3.1 Homotopie von Wegen und die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes

Im folgenden bezeichne X einen topologischen Raum.

Definition 3.1.1 *Ein* **Weg in** X **von** x **nach** y *ist eine stetige Abbildung* $\sigma : [0,1] \to X$ *mit* $\sigma(0) = x$ *und* $\sigma(1) = y$. *Ein Weg* σ *heißt* **geschlossen**, *falls* $\sigma(0) = \sigma(1)$.

Definition 3.1.2 *Zwei Wege* σ_0 *und* σ_1 *in* X *heißen* **homotop bezüglich** $\{0,1\}$ *(in Zeichen:* $\sigma_0 \sim \sigma_1 \text{ rel}\{0,1\}$*), falls eine stetige Abbildung* $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ *mit*

$$H(t,0) = \sigma_0(t) \quad \textit{und} \quad H(t,1) = \sigma_1(t) \quad \textit{für alle} \quad t \in [0,1]$$

und

$$H(0,s) = \sigma_0(0) \quad \textit{und} \quad H(1,s) = \sigma_0(1) \quad \textit{für alle} \quad s \in [0,1]$$

existiert. Die Abbildung H *heißt dann* **Homotopie** *zwischen* σ_0 *und* σ_1.

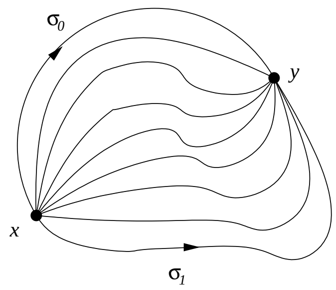
Bemerkung 3.1.3 (i) Aus $\sigma_0 \sim \sigma_1 \text{ rel}\{0,1\}$ folgt $\sigma_0(0) = \sigma_1(0)$ und $\sigma_0(1) = \sigma_1(1)$. Ist nämlich H eine Homotopie zwischen σ_0 und σ_1, so gilt

$$\sigma_0(0) = H(0,1) = \sigma_1(0) \quad \text{und} \quad \sigma_0(1) = H(1,1) = \sigma_1(1)\ .$$

(ii) Seien σ_0 und σ_1 Wege in X von x nach y und sei H eine Homotopie zwischen σ_0 und σ_1. Dann bilden die Abbildungen

$$H_s : [0,1] \to X\ , \quad H_s(t) = H(t,s)\ ,$$

eine stetige Familie $\{H_s\}_{s\in[0,1]}$ von Wegen von x nach y mit $H_0 = \sigma_0$ und $H_1 = \sigma_1$.

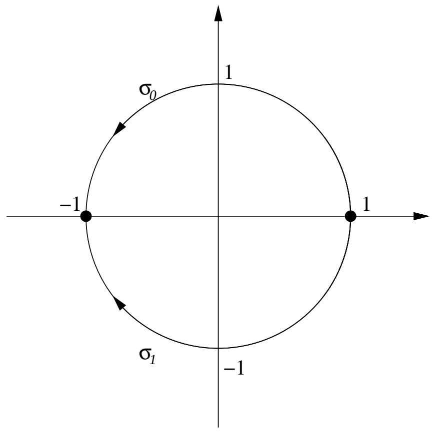


□

Beispiel 3.1.4 Seien die Wege σ_0 und σ_1 in $\mathbb{R}^2$ durch

$$\sigma_0(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t)) \quad \text{und} \quad \sigma_1(t) = (\cos(\pi t), -\sin(\pi t)) \quad \text{für} \quad t \in [0,1]$$

gegeben.



Dann gilt $\sigma_0 \sim \sigma_1 \operatorname{rel}\{0,1\}$, denn

$$H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \ , \quad H(t,s) = (\cos(t\pi), (1-2s)\sin(t\pi)) \ ,$$

ist eine Homotopie zwischen σ_0 und σ_1. □

Beispiel 3.1.5 Wir betrachten wieder σ_0 und σ_1 aus Beispiel 3.1.4, aber diesmal als Wege in $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1/2\}$. Dann sind σ_0 und σ_1 nicht homotop bezüglich $\{0,1\}$. □

Satz 3.1.6 *Die Relation* $\sim \operatorname{rel}\{0,1\}$ *auf der Menge aller Wege in* X *ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Für jeden Weg σ in X gilt $\sigma \sim \sigma \operatorname{rel}\{0,1\}$, denn

$$(t,s) \in [0,1] \times [0,1] \mapsto \sigma(t) \in X$$

ist eine Homotopie zwischen σ und σ. Gilt $\sigma_0 \sim \sigma_1 \operatorname{rel}\{0,1\}$, so gilt auch $\sigma_1 \sim \sigma_0 \operatorname{rel}\{0,1\}$. Ist nämlich H eine Homotopie zwischen σ_0 und σ_1, so ist

$$(t,s) \in [0,1] \times [0,1] \mapsto H(t, 1-s) \in X$$

eine Homotopie zwischen σ_1 und σ_0. Ist schließlich H_1 eine Homotopie zwischen σ_0 und σ_1 und H_2 eine Homotopie zwischen σ_1 und σ_2, so ist durch

$$H_3(t,s) = \begin{cases} H_1(t,2s) & \text{für } (t,s) \in [0,1] \times [0,1/2] \\ H_2(t,2s-1) & \text{für } (t,s) \in [0,1] \times [1/2,1] \end{cases}$$

eine Homotopie H_3 zwischen σ_0 und σ_2 gegeben. Also folgt aus $\sigma_0 \sim \sigma_1 \operatorname{rel}\{0,1\}$ und $\sigma_1 \sim \sigma_2 \operatorname{rel}\{0,1\}$ die Beziehung $\sigma_0 \sim \sigma_2 \operatorname{rel}\{0,1\}$. □

Die Äquivalenzklasse eines Weges σ bezüglich $\sim \operatorname{rel}\{0,1\}$ bezeichnen wir mit $[\sigma]$.

Definition 3.1.7 *Seien* σ *und* τ *Wege in* X *mit* $\sigma(1) = \tau(0)$. *Das* **Produkt der Wege** σ **und** τ *ist der durch*

$$\sigma * \tau(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & \textit{für } t \in [0,1/2] \\ \tau(2t-1) & \textit{für } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

definierte Weg $\sigma * \tau$ *in* X.

Lemma 3.1.8 *Seien $\sigma_0, \sigma_1, \tau_0, \tau_1$ Wege in X mit $\sigma_0(1) = \tau_0(0)$ und $\sigma_1(1) = \tau_1(0)$. Gilt dann $\sigma_0 \sim \sigma_1 \operatorname{rel}\{0,1\}$ und $\tau_0 \sim \tau_1 \operatorname{rel}\{0,1\}$, so gilt auch $\sigma_0 * \tau_0 \sim \sigma_1 * \tau_1 \operatorname{rel}\{0,1\}$.*

Beweis. Ist H eine Homotopie zwischen σ_0 und σ_1 und ist F eine Homotopie zwischen τ_0 und τ_1, so definiert

$$(t,s) \mapsto \begin{cases} H(2t,s) & \text{für } (t,s) \in [0,1/2] \times [0,1] \\ F(2t-1,s) & \text{für } (t,s) \in [1/2,1] \times [0,1] \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen $\sigma_0 * \tau_0$ und $\sigma_1 * \tau_1$. □

Lemma 3.1.8 rechtfertigt folgende Definition.

Definition 3.1.9 *Sind σ und τ Wege in X mit $\sigma(1) = \tau(0)$, so setzen wir*

$$[\sigma] \cdot [\tau] = [\sigma * \tau] .$$

Lemma 3.1.10 *Seien ρ, σ und τ Wege in X mit $\rho(1) = \sigma(0)$ und $\sigma(1) = \tau(0)$. Dann gilt*

$$(\rho * \sigma) * \tau \sim \rho * (\sigma * \tau) \ \operatorname{rel}\{0,1\} .$$

Beweis. Sei $\alpha_s : [0,1] \to [0,1]$ für $s \in [0,1]$ durch

$$\alpha_s(t) = \begin{cases} 2t/(1+s) & \text{für } t \in [0,(1+s)/4] \\ t + (1-s)/4 & \text{für } t \in [(1+s)/4, (2+s)/4] \\ (t+1-s)/(2-s) & \text{für } t \in [(2+s)/4, 1] \end{cases}$$

definiert. Wie man leicht verifiziert, ist dann

$$(t,s) \in [0,1] \times [0,1] \mapsto \rho * (\sigma * \tau)\,(\alpha_s(t)) \in X$$

eine Homotopie zwischen $(\rho * \sigma) * \tau$ und $\rho * (\sigma * \tau)$. □

Ist $x \in X$, so sei ε_x der durch

$$\varepsilon_x(t) = x \quad \text{für alle} \quad t \in [0,1]$$

gegebene Weg in X.

Lemma 3.1.11 *Sei σ ein Weg in X von x nach y. Dann gilt*

$$\varepsilon_x * \sigma \sim \sigma \ \operatorname{rel}\{0,1\} \qquad \textit{und} \qquad \sigma * \varepsilon_y \sim \sigma \ \operatorname{rel}\{0,1\} .$$

Beweis. Sei $\beta_s : [0,1] \to [0,1]$ für $s \in [0,1]$ durch

$$\beta_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \in [0,(1-s)/2] \\ (2t-1+s)/(1+s) & \text{für } t \in [(1-s)/2, 1] \end{cases}$$

gegeben. Dann ist

$$(t,s) \in [0,1] \times [0,1] \mapsto \sigma\,(\beta_s(t))$$

eine Homotopie zwischen $\varepsilon_x * \sigma$ und σ. Analog konstruiert man eine Homotopie zwischen $\sigma * \varepsilon_y$ und σ. □

Durch

$$\bar{\sigma}(t) = \sigma(1-t) \quad \text{für} \quad t \in [0,1]$$

ordnen wir jedem Weg σ einen Weg $\bar{\sigma}$ zu.

Lemma 3.1.12 *Sind σ_0 und σ_1 zwei Wege in X und gilt $\sigma_0 \sim \sigma_1 \operatorname{rel}\{0,1\}$, so gilt auch $\bar{\sigma}_0 \sim \bar{\sigma}_1 \operatorname{rel}\{0,1\}$.*

Beweis. Ist H eine Homotopie zwischen σ_0 und σ_1, so ist

$$(t,s) \in [0,1] \times [0,1] \mapsto H(1-t,s) \in X$$

eine Homotopie zwischen $\bar{\sigma}_0$ und $\bar{\sigma}_1$. □

Lemma 3.1.13 *Sei σ ein Weg in X von x nach y. Dann gilt*

$$\sigma * \bar{\sigma} \sim \varepsilon_x \operatorname{rel}\{0,1\} \qquad \textit{und} \qquad \bar{\sigma} * \sigma \sim \varepsilon_y \operatorname{rel}\{0,1\} .$$

Beweis. Die Abbildung

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X \ , \quad H(t,s) = \begin{cases} \sigma(2t(1-s)) & \text{für } (t,s) \in [0,1/2] \times [0,1] \\ \sigma(2(1-t)(1-s)) & \text{für } (t,s) \in [1/2,1] \times [0,1] \end{cases} ,$$

ist eine Homotopie zwischen $\sigma * \bar{\sigma}$ und ε_x. In ähnlicher Weise gibt man eine Homotopie zwischen $\bar{\sigma} * \sigma$ und ε_y an. □

Sei $x \in X$ und sei $\Omega(X,x)$ die Menge aller geschlossenen Wege σ in X mit $\sigma(0) = \sigma(1) = x$. Desweiteren sei $\pi_1(X,x)$ die Menge aller Äquivalenzklassen von Wegen $\sigma \in \Omega(X,x)$ bezüglich $\sim \operatorname{rel}\{0,1\}$. Wir versehen $\pi_1(X,x)$ mit dem in Definition 3.1.9 eingeführten Produkt. Dann haben wir:

Satz 3.1.14 *$\pi_1(X,x)$ ist eine Gruppe.*

Beweis. Lemma 3.1.10 impliziert die Assoziativität der Multiplikation in $\pi_1(X,x)$. Aus Lemma 3.1.11 folgt, dass $[\varepsilon_x]$ das Einselement von $\pi_1(X,x)$ ist. Aus Lemma 3.1.12 und Lemma 3.1.13 erhalten wir, dass das inverse Element zu $[\sigma] \in \pi_1(X,x)$ durch

$$[\sigma]^{-1} = [\bar{\sigma}]$$

gegeben ist. □

Definition 3.1.15 *Die Gruppe $\pi_1(X,x)$ heißt die* **Fundamentalgruppe von X im Punkt** *x.*

Satz 3.1.16 *Seien $x, y \in X$. Existiert ein Weg τ in X von x nach y, so sind die Gruppen $\pi_1(X,x)$ und $\pi_1(X,y)$ isomorph.*

Beweis. Sei τ ein Weg in X von x nach y. Wir definieren $\Phi : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$ durch

$$\Phi([\sigma]) = [\bar{\tau} * \sigma * \tau] .$$

Nach Lemma 3.1.8 ist Φ korrekt definiert. Mit Lemma 3.1.11 und Lemma 3.1.13 können wir schließen, dass

$$\begin{aligned} \Phi([\sigma_1] \cdot [\sigma_2]) &= \Phi([\sigma_1 * \sigma_2]) \\ &= [\bar{\tau} * \sigma_1 * \sigma_2 * \tau] \\ &= [\bar{\tau} * \sigma_1 * \tau * \bar{\tau} * \sigma_2 * \tau] \\ &= [\bar{\tau} * \sigma_1 * \tau] \cdot [\bar{\tau} * \sigma_2 * \tau] \\ &= \Phi([\sigma_1]) \cdot \Phi([\sigma_2]) . \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass Φ ein Gruppenhomomorphismus ist. Dieser Homomorphismus ist injektiv, denn aus $\Phi([\sigma]) = [\varepsilon_y]$, d.h. $\bar{\tau} * \sigma * \tau \sim \varepsilon_y$ rel$\{0,1\}$, folgt

$$\sigma \sim \tau * \bar{\tau} * \sigma * \tau * \bar{\tau} \sim \tau * \varepsilon_y * \bar{\tau} \sim \tau * \bar{\tau} \sim \varepsilon_x \ \text{ rel}\{0,1\}\ ,$$

d.h. $[\sigma] = [\varepsilon_x]$. Der Homomorphismus Φ ist auch surjektiv. Ist nämlich $[\rho] \in \pi_1(X, y)$, so ist $[\tau * \rho * \bar{\tau}] \in \pi_1(X, x)$ und es gilt

$$\Phi([\tau * \rho * \bar{\tau}]) = [\bar{\tau} * \tau * \rho * \bar{\tau} * \tau] = [\rho]\ .$$

□

Definition 3.1.17 *Ein topologischer Raum X heißt* **wegzusammenhängend***, falls für alle $x, y \in X$ ein Weg σ in X von x nach y existiert.*

Eine unmittelbare Konsequenz aus Satz 3.1.16 ist

Folgerung 3.1.18 *Ist X wegzusammenhängend, so sind die Gruppen $\pi_1(X, x)$ und $\pi_1(X, y)$ für alle $x, y \in X$ isomorph.* □

Die Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden topologischen Raumes X ist also bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Statt $\pi_1(X, x)$ schreiben wir dann einfach $\pi_1(X)$.

Wir wollen jetzt noch zeigen, dass die Fundamentalgruppe eine topologische Invariante ist. Seien X und Y topologische Räume, sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und sei $x \in X$. Wir definieren $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ durch

$$f_*([\sigma]) = [f \circ \sigma]\ .$$

Die Definition von f_* ist korrekt. Sind nämlich σ_0 und σ_1 Wege in X und ist H eine Homotopie zwischen σ_0 und σ_1, so ist $f \circ H$ eine Homotopie zwischen $f \circ \sigma_0$ und $f \circ \sigma_1$.

Lemma 3.1.19 *f_* ist ein Gruppenhomomorphismus.*

Beweis. Für $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega(X, x)$ gilt

$$\begin{aligned}
f_*([\sigma_1] \cdot [\sigma_2]) &= f_*([\sigma_1 * \sigma_2]) \\
&= [f \circ (\sigma_1 * \sigma_2)] \\
&= [(f \circ \sigma_1) * (f \circ \sigma_2)] \\
&= [f \circ \sigma_1] \cdot [f \circ \sigma_2] \\
&= f_*([\sigma_1]) \cdot f_*([\sigma_2])\ .
\end{aligned}$$

□

Definition 3.1.20 *Wir nennen f_* den* **von f induzierten Homomorphismus***.*

Satz 3.1.21 (i) *Seien X, Y, Z topologische Räume und seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen. Dann genügen $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$, $g_* : \pi_1(Y, f(x)) \to \pi_1(Z, g \circ f(x))$ und $(g \circ f)_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Z, g \circ f(x))$ für jedes $x \in X$ der Beziehung*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*\ .$$

(ii) *Für jeden topologischen Raum X stimmt der von der identischen Abbildung* $\mathrm{id}_X : X \to X$ *induzierte Homomorphismus* $(\mathrm{id}_X)_*$ *mit der identischen Abbildung* $\mathrm{id}_{\pi_1(X,x)} : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,x)$ *überein.*

Beweis. Für $\sigma \in \Omega(X,x)$ gilt

$$(g \circ f)_*([\sigma]) = [g \circ f \circ \sigma] = g_*([f \circ \sigma]) = g_*(f_*([\sigma]))$$

und

$$(\mathrm{id}_X)_*([\sigma]) = [\mathrm{id}_X \circ \sigma] = [\sigma] \, .$$

□

Folgerung 3.1.22 *Seien X und Y wegzusammenhängende topologische Räume. Sind X und Y homöomorph, so sind die Fundamentalgruppen $\pi_1(X)$ und $\pi_1(Y)$ isomorph.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus und sei $x \in X$. Für die Homomorphismen

$$f_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y, f(x)) \quad \text{und} \quad \left(f^{-1}\right)_* : \pi_1(Y, f(x)) \to \pi_1(X,x)$$

haben wir aufgrund von Satz 3.1.21

$$f_* \circ \left(f^{-1}\right)_* = \left(f \circ f^{-1}\right)_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Y,f(x))}$$

und

$$\left(f^{-1}\right)_* \circ f_* = \left(f^{-1} \circ f\right)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x)} \, .$$

Folglich ist f_* ein Isomorphismus. □

3.2 Beispiele für Fundamentalgruppen

Lemma 3.2.1 *Enthält X genau ein Element, so ist $\pi_1(X)$ trivial.*

Beweis. Ist $X = \{x\}$, so ist der konstante Weg ε_x der einzige Weg in X. □

Für die Bestimmung weiterer Fundamentalgruppen nutzen wir

Satz 3.2.2 *Sei X ein topologischer Raum, sei $A \subseteq X$ und sei $h : X \times [0,1] \to X$ eine stetige Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:*

(D1) $h(x,0) = x$ *für alle* $x \in X$,

(D2) $h(x,1) \in A$ *für alle* $x \in X$,

(D3) $h(x,s) = x$ *für alle* $x \in A$ *und alle* $s \in [0,1]$.

Dann sind die Fundamentalgruppen $\pi_1(X,x_0)$ und $\pi_1(A,x_0)$ für jedes $x_0 \in A$ isomorph.

Beweis. Sei $x_0 \in A$. Wir nutzen (D2) und definieren $f : X \to A$ durch

$$f(x) = h(x,1) \, .$$

Da h stetig ist, ist auch f stetig. Wir beweisen, dass der von f induzierte Homomorphismus $f_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(A,x_0)$ bijektiv ist.

Sei $\tau \in \Omega(A, x_0)$. Dann ist auch $\tau \in \Omega(X, x_0)$ und wegen (D3) gilt

$$f \circ \tau = \tau \ .$$

Folglich ist

$$f_*([\tau]) = [f \circ \tau] = [\tau] \ .$$

Dies liefert die Surjektivität von f_*.

Sei $\sigma \in \Omega(X, x_0)$. Dann gilt

$$\sigma \sim f \circ \sigma \ \ \mathrm{rel}\{0,1\} \ ,$$

denn wegen (D1) und (D3) ist

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X \ , \quad H(t,s) = h(\sigma(t), s) \ ,$$

eine Homotopie zwischen σ und $f \circ \sigma$. Aus $f_*([\sigma]) = 1$, d.h. $f \circ \sigma \sim \varepsilon_{x_0}$ rel$\{0,1\}$ folgt somit

$$\sigma \sim f \circ \sigma \sim \varepsilon_{x_0} \ \ \mathrm{rel}\{0,1\} \ ,$$

also $[\sigma] = 1$. Damit haben wir auch die Injektivität von f_* gezeigt. □

Definition 3.2.3 *Eine Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt* **sternförmig**, *falls es ein solches $x_0 \in V$ gibt, dass*

$$sx_0 + (1-s)x \in V \quad \textit{für alle} \quad s \in [0,1] \quad \textit{und alle} \quad x \in V \ . \tag{3.2.1}$$

Satz 3.2.4 *Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig, so ist $\pi_1(V)$ trivial. Insbesondere ist die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^n$ trivial.*

Beweis. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig und sei $x_0 \in V$ derart, dass (3.2.1) gilt. Wir definieren $h : V \times [0,1] \to V$ durch

$$h(x,s) = sx_0 + (1-s)x \ .$$

Die Abbildung h ist stetig und erfüllt (D1)-(D3) für $X = V$ und $A = \{x_0\}$. Damit folgt die Behauptung aus Lemma 3.2.1 und Satz 3.2.2. □

Satz 3.2.5 *Die Fundamentalgruppe von S^1 ist $\mathbb{Z}$.*

Beweis. Ist $\sigma \in \Omega\left(S^1, (0,1)\right)$, so sei $\tilde{\sigma} : [0,1] \to \mathbb{R}$ der eindeutig bestimmte Weg mit

$$\sigma(t) = \left(\cos\left(2\pi\tilde{\sigma}(t)\right), \sin\left(2\pi\tilde{\sigma}(t)\right)\right) \quad \text{für alle} \quad t \in [0,1]$$

und

$$\tilde{\sigma}(0) = 0 \ .$$

Wegen $\sigma(1) = (1,0)$, ist $\tilde{\sigma}(1) \in \mathbb{Z}$. Wir definieren $\tilde{\Psi} : \Omega\left(S^1, (0,1)\right) \to \mathbb{Z}$ durch

$$\tilde{\Psi}(\sigma) = \tilde{\sigma}(1) \ .$$

Seien $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega\left(S^1, (0,1)\right)$. Dann ist

$$\widetilde{\sigma_1 * \sigma_2} = \tilde{\sigma}_1 * (\tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}_1(1))$$

und somit

$$\tilde{\Psi}(\sigma_1 * \sigma_2) = \tilde{\Psi}(\sigma_1) + \tilde{\Psi}(\sigma_2) \ .$$

Außerdem gilt

$$\sigma_1 \sim \sigma_2 \ \ \mathrm{rel}\{0,1\} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\Psi}(\sigma_1) = \tilde{\Psi}(\sigma_2)\ .$$

Dies leitet man aus der Tatsache ab, dass zu jeder stetigen Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to S^1$ eine stetige Abbildung $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$H(t,s) = \left(\cos\left(2\pi \tilde{H}(t,s)\right), \sin\left(2\pi \tilde{H}(t,s)\right)\right) \quad \text{für alle} \quad (t,s) \in [0,1] \times [0,1]$$

und

$$\tilde{H}(t,0) = 0 \quad \text{für alle} \quad t \in [0,1]$$

existiert. Folglich ist durch

$$\Psi([\sigma]) = \tilde{\Psi}(\sigma) \quad \text{für} \quad \sigma \in \Omega\left(S^1, (0,1)\right)$$

ein Gruppenhomomorphismus $\Psi : \pi_1\left(S^1, (0,1)\right) \to \mathbb{Z}$ definiert.

Ist $\sigma_n \in \Omega\left(S^1, (0,1)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, durch

$$\sigma_n(t) = (\cos(2\pi n t), \sin(2\pi n t)) \quad \text{für} \quad t \in [0,1]$$

gegeben, so ist $\Psi([\sigma_n]) = n$. Also ist Ψ surjektiv.

Der Homomorphismus Ψ ist auch injektiv. Gilt nämlich $\Psi([\sigma]) = 0$ für ein $\sigma \in \Omega\left(S^1, (0,1)\right)$, so ist $\tilde{\sigma}(1) = \tilde{\sigma}(0) = 0$. Damit ist

$$H : [0,1] \times [0,1] \to S^1\ , \quad H(t,s) = (\cos(2\pi(1-s)\tilde{\sigma}(t)), \sin(2\pi(1-s)\tilde{\sigma}(t)))\ ,$$

eine Homotopie zwischen σ und $\varepsilon_{(1,0)}$. □

Folgerung 3.2.6 *Die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist $\mathbb{Z}$.*

Beweis. Die Abbildung

$$h : \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\right) \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\ , \quad h(x,s) = |x|^{-s} x\ ,$$

ist stetig und genügt den Bedingungen (D1)-(D3) für $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $A = S^1$. Damit ist die Behauptung eine Konsequenz der Sätze 3.2.2 und 3.2.5. □

3.3 Frei erzeugte Gruppen und Relationen

Wir betrachten eine Menge S, deren Elemente wir als nichtkommutierende Symbole verstehen.

Definition 3.3.1 *Ein* **Wort im Alphabet** *S ist ein Ausdruck*

$$W = x_1^{\varepsilon(1)} x_2^{\varepsilon(2)} \ldots x_k^{\varepsilon(k)}\ ,$$

wobei $x_i \in S$ und $\varepsilon(i) = \pm 1$.

Sei E das leere Wort, d.h. das Wort, das aus keinem Symbol besteht. Die Menge aller Wörter im Alphabet S, einschließlich E, bezeichnen wir mit $\mathcal{W}(S)$. Außerdem setzen wir

$$W^{-1} = x_k^{-\varepsilon(k)} \ldots x_1^{-\varepsilon(1)} \quad \text{für} \quad W = x_1^{\varepsilon(1)} \ldots x_k^{\varepsilon(k)} \in \mathcal{W}(S)\ .$$

Wir definieren auf folgende Weise eine Äuivalenzrelation $\sim$ auf $\mathcal{W}(S)$.

Definition 3.3.2 *Zwei Wörter $W_1, W_2 \in \mathcal{W}(S)$ sind genau dann zueinander äquivalent (in Zeichen: $W_1 \sim W_2$), wenn W_1 durch Herausnehmen bzw. Hinzufügen von endlich vielen Ausdrücken der Gestalt xx^{-1} oder $x^{-1}x$, $x \in S$, in W_2 überführt werden kann.*

Wir setzen

$$\mathcal{G}(S) = \mathcal{W}(S)/\sim$$

und bezeichnen mit $[W]$ die Äquivalenzklasse von W in $\mathcal{G}(S)$.

Satz 3.3.3 *Durch*

$$[W_1] \cdot [W_2] = [W_1 W_2] \quad \textit{für} \quad W_1, W_2 \in \mathcal{W}(S)$$

wird auf $\mathcal{G}(S)$ eine Gruppenoperation definiert.

Beweis. Offensichtlich ist die Operation korrekt definiert und assoziativ. Als Einselement dieser Operation haben wir $[E]$, denn

$$[W] \cdot [E] = [WE] = [W] \quad \text{und} \quad [E] \cdot [W] = [EW] = [W] \quad \text{für alle} \quad W \in \mathcal{W}(S)\,.$$

Schließlich ist das inverse Element $[W]^{-1}$ von $[W]$ durch

$$[W]^{-1} = \left[W^{-1}\right]$$

gegeben. Ist nämlich $W = x_1^{\varepsilon(1)} \dots x_k^{\varepsilon(k)}$, so ist

$$\begin{aligned}
\left[WW^{-1}\right] &= \left[x_1^{\varepsilon(1)} \dots x_k^{\varepsilon(k)} x_k^{-\varepsilon(k)} \dots x_1^{-\varepsilon(1)}\right] \\
&= \left[x_1^{\varepsilon(1)} \dots x_{k-1}^{\varepsilon(k-1)} x_{k-1}^{-\varepsilon(k-1)} \dots x_1^{-\varepsilon(1)}\right] \\
&\;\;\vdots \\
&= \left[x_1^{\varepsilon(1)} x_1^{-\varepsilon(1)}\right] \\
&= [E]\,.
\end{aligned}$$

□

Definition 3.3.4 *Die Gruppe $(\mathcal{G}(S), \cdot)$ heißt die* **von S frei erzeugte Gruppe**.

Beispiel 3.3.5 (i) Ist $S = \emptyset$, so ist $\mathcal{G}(S)$ die triviale Gruppe, d.h. die Gruppe, die nur aus dem Einselement besteht.

(ii) Für die einelementige Menge $S = \{x\}$ ist $\mathcal{G}(S)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$. □

Sei jetzt $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W}(S)$. Wir definieren folgendermaßen eine Äquivalenzrelation $\sim_{\mathcal{R}}$ auf $\mathcal{W}(S)$.

Definition 3.3.6 *Zwei Wörter $W_1, W_2 \in \mathcal{W}(S)$ sind genau dann bezüglich $\mathcal{R}$ zueinander äquivalent (in Zeichen: $W_1 \sim_{\mathcal{R}} W_2$), wenn W_1 durch Herausnehmen bzw. Hinzufügen von endlich vielen Ausdrücken der Form xx^{-1} oder $x^{-1}x$, $x \in S$, sowie W oder W^{-1}, $W \in \mathcal{R}$, in W_2 überführt werden kann.*

Sei

$$\mathcal{G}(S;\mathcal{R}) = \mathcal{W}(S)/\sim_{\mathcal{R}}$$

und bezeichne $[W]_{\mathcal{R}}$ die Äquivalenzklasse von W in $\mathcal{G}(S;\mathcal{R})$.

Satz 3.3.7 *Auf $\mathcal{G}(S;\mathcal{R})$ ist durch*

$$[W_1]_\mathcal{R} \cdot [W_2]_\mathcal{R} = [W_1 W_2]_\mathcal{R} \quad \textit{für} \quad W_1, W_2 \in \mathcal{W}(S)$$

eine Gruppenoperation definiert.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 3.3.3 sieht man, dass $[E]_\mathcal{R}$ das Einselement ist und dass

$$[W]_\mathcal{R}^{-1} = \left[W^{-1}\right]_\mathcal{R} \quad \text{für} \quad W \in \mathcal{W}(S) \; .$$

□

Definition 3.3.8 *Die Gruppe $(\mathcal{G}(S;\mathcal{R}), \cdot)$ heißt die* **von S erzeugte Gruppe mit den Relationen $\mathcal{R}$**.

Beispiel 3.3.9 Ist $S = \{a, b\}$ und $\mathcal{R} = \{aba^{-1}b^{-1}\}$, so ist $\mathcal{G}(S;\mathcal{R})$ isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. □

Bemerkung 3.3.10 Jede Gruppe G lässt sich auf diese Weise darstellen. Ist nämlich $S_G = G$ und

$$\mathcal{R}_G = \left\{g^{-1}g_1g_2 \in \mathcal{W}(S_G) : g, g_1, g_2 \in G \text{ mit } g = g_1g_2\right\} \; ,$$

so ist $\mathcal{G}(S_G;\mathcal{R}_G)$ isomorph zu G. □

3.4 Berechnung der Fundamentalgruppe geschlossener Flächen

Zur Bestimmung von Fundamentalgruppen benutzt man häufig den folgenden Satz, den wir ohne Beweis angeben.

Satz 3.4.1 (Seifert-van Kampen-Theorem) *Sei X ein topologischer Raum und seien U_1, U_2 zwei offene Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften.*

(1) $X = U_1 \cup U_2$.

(2) $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

(3) *U_1, U_2 und $U_1 \cap U_2$ sind wegzusammenhängend.*

Sei $x_0 \in U_1 \cap U_2$ und gelte $\pi_1(U_i, x_0) = \mathcal{G}(S_i;\mathcal{R}_i)$, $i = 1, 2$, sowie $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = \mathcal{G}(S;\mathcal{R})$. Ferner seien $\varphi_i : U_1 \cap U_2 \to U_i$ die Inklusionen und $(\varphi_i)_* : \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \to \pi_1(U_i, x_0)$ die von φ_i induzierten Homomorphismen. Dann ist $\pi_1(X, x_0)$ isomorph zu $\mathcal{G}(S_1 \cup S_2; \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_S)$, wobei

$$\mathcal{R}_S = \left\{(\varphi_1)_*(s)((\varphi_2)_*(s))^{-1} \in \mathcal{W}(S_1 \cup S_2) : s \in S\right\} \; .$$

□

Wir berechnen die Fundamentalgruppe der Sphäre S^2 und des projektiven Raumes $\mathbb{RP}^2$.

Satz 3.4.2 *Die Fundamentalgruppe $\pi_1\left(S^2\right)$ ist trivial.*

Beweis. Als Teilmengen U_1, U_2 von

$$S^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\right\}$$

wählen wir

$$U_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_3 < 1/2\right\}$$

und

$$U_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_3 > -1/2\right\} \ .$$

Offensichtlich erfüllen U_1, U_2 die Bedingungen (1)-(3) aus Satz 3.4.1 für $X = S^2$. Außerdem ist

$$U_i \approx \mathbb{R}^2 \ , \quad i = 1, 2 \ .$$

Dies impliziert

$$\pi_1(U_i) = \pi_1\left(\mathbb{R}^2\right) = \{1\} = \mathcal{G}(\emptyset) \ , \quad i = 1, 2 \ .$$

Hieraus folgt mit Satz 3.4.1, dass

$$\pi_1\left(S^2\right) = \mathcal{G}(\emptyset) = \{1\} \ .$$

□

Satz 3.4.3 *Die Fundamentalgruppe des projektiven Raumes* $\mathbb{RP}^2$ *ist* $\mathbb{Z}_2$*.*

Beweis. Sei wieder $D^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\right\}$, $D^{2,\circ} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\right\}$ und $S^1 = D^2 \setminus D^{2,\circ}$. Wir verstehen $\mathbb{RP}^2$ als $D^2/\sim$, wobei $\sim$ die von

$$x \sim -x \quad \text{für} \quad x \in S^1$$

erzeugte Äquivalenzrelation auf D^2 ist (vgl. Beispiel 2.1.3(b)). Sei $p : D^2 \to \mathbb{RP}^2$ die kanonische Projektion, sei $y_0 = p(1,0)$ und $y_1 = p(1/2, 0)$ und seien $\sigma_0 \in \Omega\left(\mathbb{RP}^2, y_0\right)$ und $\sigma_1 \in \Omega\left(\mathbb{RP}^2, y_1\right)$ durch

$$\sigma_0(t) = p(\cos(\pi t), \sin(\pi t)) \quad \text{und} \quad \sigma_1(t) = p\left(\frac{\cos(2\pi t)}{2}, \frac{\sin(2\pi t)}{2}\right) \quad \text{für} \quad t \in [0,1]$$

gegeben. Ferner sei τ ein Weg in $\mathbb{RP}^2$ von y_0 nach y_1.

Wir wollen Satz 3.4.1 auf

$$U_1 = p\left(D^{2,\circ}\right) \quad \text{und} \quad U_2 = p\left(D^2 \setminus \{0\}\right)$$

anwenden. Wegen $U_1 \approx D^{2,\circ} \approx \mathbb{R}^2$ ist

$$\pi_1(U_1, y_1) = \{1\} = \mathcal{G}(\emptyset) \ . \tag{3.4.1}$$

Die durch

$$h(p(x), s) = p\left(|x|^{-s} x\right) \quad \text{für} \quad x \in D^2 \quad \text{und} \quad s \in [0,1]$$

definierte Abbildung $h : U_2 \times [0,1] \to U_2$ ist stetig und genügt den Eigenschaften (D1)-(D3) aus Satz 3.2.2 für $X = U_2$ und $A = p\left(S^1\right)$. Folglich ist

$$\pi_1(U_2, y_0) = \pi_1\left(p\left(S^1\right), y_0\right) \ . \tag{3.4.2}$$

Für die Fundamentalgruppe von $p\left(S^1\right) \approx S^1$ haben wir

$$\pi_1\left(p\left(S^1\right), y_0\right) = \mathcal{G}(\{[\sigma_0]\}) \ . \tag{3.4.3}$$

Aus (3.4.2) und (3.4.3) erhalten wir mit Satz 3.1.16, dass

$$\pi_1(U_2, y_1) = \mathcal{G}(\{[\bar{\tau} * \sigma_0 * \tau]\}) \ . \tag{3.4.4}$$

Analog zum Beweis von Folgerung 3.2.6 leitet man

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, y_1) = \mathcal{G}(\{[\sigma_1]\}) \tag{3.4.5}$$

ab. Schließlich gilt für die Inklusionen $\varphi_1 : U_1 \cap U_2 \to U_1$ und $\varphi_2 : U_1 \cap U_2 \to U_2$

$$(\varphi_1)_*([\sigma_1]) = 1 \quad \text{und} \quad (\varphi_2)_*([\sigma_1]) = [\bar{\tau} * \sigma_0 * \sigma_0 * \tau] = [\bar{\tau} * \sigma_0 * \tau]^2 \ . \tag{3.4.6}$$

Aus (3.4.1), (3.4.4), (3.4.5) und (3.4.6) folgt mit Satz 3.4.1

$$\pi_1\left(\mathbb{R}\mathrm{P}^2, y_1\right) = \mathcal{G}\left(\{[\bar{\tau} * \sigma_0 * \tau]\}; \left\{[\bar{\tau} * \sigma_0 * \tau]^2\right\}\right)$$

bzw.

$$\pi_1\left(\mathbb{R}\mathrm{P}^2, y_0\right) = \mathcal{G}\left(\{[\sigma_0]\}; \left\{[\sigma_0]^2\right\}\right) = \mathbb{Z}_2 \ .$$

□

Indem man ähnlich wie im Beweis von Satz 3.4.3 vorgeht, erhält man aus Satz 2.1.15

Satz 3.4.4 *Für $m = 1, 2, \ldots$ gilt:*

(i) $\pi_1\left(mT^2\right) = \mathcal{G}\left(\{a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m\}; \left\{a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_m b_m a_m^{-1} b_m^{-1}\right\}\right)$,

(ii) $\pi_1\left(m\mathbb{R}\mathrm{P}^2\right) = \mathcal{G}\left(\{a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m\}; \{a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_m a_m\}\right)$. □

Literatur

[1] G.E. Bredon: *Topology and geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 139. New York: Springer-Verlag (1993)

[2] C. Kosniowski: *A first course in algebraic topology.* Cambridge etc.: Cambridge University Press (1980)

[3] W.S. Massey: *A basic course in algebraic topology.* Graduate Texts in Mathematics, 127. New York etc.: Springer-Verlag (1991)

[4] H. Seifert und W. Threlfall: *Lehrbuch der Topologie.* Leipzig und Berlin: B. G. Teubner (1934)