Einleitung

Betrachtet man ein freies Teilchen in $\mathbb{R}^3$ mit Spin 1/2, so wird die Bewegung dieses Teilchens in der relativistischen Quantenmechanik formal durch die Differentialgleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sqrt{\mathrm{c}^2\hbar^2\Delta + \mathrm{m}^2\mathrm{c}^4}\,\psi$$

beschrieben. Dabei ist die auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ definierte Funktion $\psi = \psi(t,x,y,z)$ die Zustandsfunktion des Teilchens und Δ der Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^3$, d.h.

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\ .$$

Außerdem ist m die Ruhemasse des betrachteten Teilchens, $\hbar$ das Plancksche Wirkungsquantum und c die Lichtgeschwindigkeit.

Dies wirft die Frage nach einer Wurzel P des Laplace-Operators

$$\Delta = -\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\left(\partial x^k\right)^2}$$

auf $\mathbb{R}^n$ auf. Dabei wirkt Δ auf Funktionen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}^m$, wobei m noch geeignet zu wählen ist. Für $n=2$ kann solch eine Wurzel wie folgt konstruiert werden. Wir definieren einen Differentialoperator $P: C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}^2)\to C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}^2)$ durch

$$P\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = 2\mathrm{i}\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar z} \end{pmatrix}$$

für $f = f(x,y)$ und $g = g(x,y)$, wobei

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\ .$$

Wegen

$$P\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \\ \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

ist

$$P = \gamma_x\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_y\frac{\partial}{\partial y}$$

mit

$$\gamma_x = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet nun nach, dass

$$\gamma_x^2 = \gamma_y^2 = -E_2 \quad \text{und} \quad \gamma_x\gamma_y + \gamma_y\gamma_x = 0\ .$$

Dabei bezeichnet hier und im Folgenden E_n die $n\times n$-Einheitsmatrix. Folglich gilt

$$\begin{aligned} P^2 &= \left(\gamma_x\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \\ &= \gamma_x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_x\gamma_y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \gamma_y\gamma_x\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} + \gamma_y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ &= \gamma_x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\gamma_x\gamma_y + \gamma_y\gamma_x)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \gamma_y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ &= \Delta\ . \end{aligned}$$

Also ist P eine Wurzel aus Δ. Aus der Konstruktion folgt außerdem, dass der Kern von P aus allen Paaren (f, g) einer holomorphen Funktion f und einer antiholomorphen Funktion g besteht.

Sei jetzt $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Analog zum obigen Fall nehmen wir an, dass P ein Differentialoperator erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist. Es sei also

$$P = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

mit komplexen $m \times m$-Matrizen γ_k. Dann ist

$$P^2 = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 \frac{\partial^2}{\left(\partial x^k\right)^2} + \sum_{k<l} (\gamma_k \gamma_l + \gamma_l \gamma_k) \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \ .$$

Demzufolge gilt $P^2 = \Delta$ genau dann, wenn die Relationen

$$\gamma_k^2 = -E_m \ , \quad k = 1, \ldots, n \ ,$$

und

$$\gamma_k \gamma_l + \gamma_l \gamma_k = 0 \ , \quad k \neq l \ ,$$

erfüllt sind. Wie man leicht überprüft, leisten im Fall $n = 3$ die Matrizen

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

das Gewünschte. Bekanntlich sind $-\mathrm{i}\gamma_3, -\mathrm{i}\gamma_2, -\mathrm{i}\gamma_1$ die so genannten Pauli-Matrizen. Die Frage ist nun, wie man für allgemeines n Realisierungen der obigen Relationen findet. Dabei möchte man einerseits haben, dass m möglichst klein ist. Andererseits soll diese Realisierung unabhängig von der Wahl von Koordinaten, also von der Wahl eines Bezugssystems sein. Genauer möchte man Folgendes haben. Ist $x = \left(x^1, \ldots, x^n\right) \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{C}^m$, so definieren wir das Produkt $x \cdot v \in \mathbb{C}^m$ durch

$$x \cdot v = \sum_{k=1}^{n} x^k \gamma_k v \ .$$

Gesucht ist nun eine Darstellung von $\mathrm{SO}(n)$ über $\mathbb{C}^m$, d.h. ein Homomorphismus $\kappa : \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ mit

$$(Ax) \cdot \kappa(A) v = \kappa(A)(x \cdot v)$$

für alle $A \in \mathrm{SO}(n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{C}^m$. Das Problem ist, dass es solch einen Homomorphismus i.Allg. nicht gibt. Um trotzdem der zweiten Forderung genügen zu können, werden wir die Spin-Gruppe $\mathrm{Spin}(n)$ einführen und für diese eine geeignete Darstellung konstruieren.

1 Algebraische Grundlagen

1.1 Die Clifford-Algebra

Bezeichne $\langle \, , \, \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und sei $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.1.1 *Die* **Clifford-Algebra** $\mathcal{C}_n$ *ist die reelle, assoziative Algebra mit* 1*, die von* $\mathbb{R}^n$ *mit den Relationen*

$$xy + yx = -2\langle x, y \rangle \ (= -2\langle x, y \rangle \, 1) \ , \quad x, y \in \mathbb{R}^n \ ,$$

erzeugt wird.

Äquivalent können wir sagen, dass $\mathcal{C}_n$ die reelle, assoziative Algebra mit 1 ist, die von $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ mit den Relationen

$$\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l + \mathbf{e}_l\mathbf{e}_k = -2\delta_{kl}\ , \quad k, l = 1, \dots, n\ ,$$

erzeugt wird. Folglich bilden 1 und

$$\mathbf{e}_{k_1}\mathbf{e}_{k_2}\cdots\mathbf{e}_{k_m}\ , \quad 1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_m \le n\ ,$$

eine Basis von $\mathcal{C}_n$. Insbesondere ist

$$\dim \mathcal{C}_n = 2^n\ .$$

Desweiteren können wir $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ als lineare Unterräume von $\mathcal{C}_n$ verstehen.

Beispiel 1.1.2 Die Clifford-Algebra $\mathcal{C}_1$ ist zum Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen isomorph. Tatsächlich definiert

$$\mathbf{e}_1 \in \mathcal{C}_1 \mapsto \mathrm{i} \in \mathbb{C}$$

einen Algebrenisomorphismus. □

Beispiel 1.1.3 Die Clifford-Algebra $\mathcal{C}_2$ ist zum Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Quaternionen isomorph. Sind nämlich $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ die imaginären Einheiten von $\mathbb{H}$, so liefern die Zuordnungen

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \mathrm{i}\ , \quad \mathbf{e}_2 \mapsto \mathrm{j}\ , \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \mapsto \mathrm{k}$$

einen Algebrenisomorphismus von $\mathcal{C}_2$ auf $\mathbb{H}$. Analog ist $\mathcal{C}_2$ zu der Unteralgebra der Algebra $M(2, \mathbb{C})$ der komplexen 2×2-Matrizen isomorph, die von der Einheitsmatrix E_2 und allen $A \in M(2, \mathbb{C})$ mit

$$\mathrm{Tr}(A) = 0 \quad \text{und} \quad \bar{A}^{\mathrm{T}} = -A$$

erzeugt wird. Der entsprechende Isomorphismus ist hier durch

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die obigen Matrizen sind nämlich die Matrixdarstellung der Multiplikation mit $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ von links nach Identifizierung von $\mathbb{H}$ mit $\mathbb{C}^2$ längs

$$(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mapsto z_1 - \mathrm{j}z_2 \in \mathbb{H}\ .$$

□

Beispiel 1.1.4 Die Clifford-Algebra $\mathcal{C}_3$ ist zu $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ isomorph, wobei die Multiplikation in $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ durch

$$(p_1, q_1) \cdot (p_2, q_2) = (p_1q_1, p_2q_2)$$

definiert ist. Ein entsprechender Algebrenisomorphismus ist durch

$$\mathbf{e}_1 \mapsto (\mathrm{i}, \mathrm{i})\ , \quad \mathbf{e}_2 \mapsto (\mathrm{j}, \mathrm{j})\ , \quad \mathbf{e}_3 \mapsto (\mathrm{k}, -\mathrm{k})$$

bestimmt. □

Bemerkung 1.1.5 Man kann weiter zeigen, dass

$$\mathcal{C}_4 \cong M(2, \mathbb{H})\ , \ \mathcal{C}_5 \cong M(4, \mathbb{C})\ , \ \mathcal{C}_6 \cong M(8, \mathbb{R})\ , \ \mathcal{C}_7 \cong M(8, \mathbb{R}) \oplus M(8, \mathbb{R})\ , \ \mathcal{C}_8 \cong M(16, \mathbb{R})\ .$$

□

Allgemein haben wir

Satz 1.1.6 *Sei $\mathcal{C}_n^{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung $\mathcal{C}_n^{\mathbb{C}}$ der Clifford-Algebra $\mathcal{C}_n$.*

(i) *Ist $n = 2m$ gerade, so ist $\mathcal{C}_n^{\mathbb{C}}$ isomorph zu*

$$M(2^m, \mathbb{C}) \cong \underbrace{M(2, \mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes M(2, \mathbb{C})}_{m} .$$

(ii) *Ist $n = 2m + 1$ ungerade, so ist $\mathcal{C}_n^{\mathbb{C}}$ isomorph zu*

$$M(2^m, \mathbb{C}) \oplus M(2^m, \mathbb{C}) \cong \underbrace{(M(2, \mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes M(2, \mathbb{C}))}_{m} \oplus \underbrace{(M(2, \mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes M(2, \mathbb{C}))}_{m} .$$

Beweis: Sei

$$E := E_2 , \quad U := \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} , \quad V := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad T := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ist $n = 2m$, so definieren wir $\phi_n : \mathcal{C}_n^{\mathbb{C}} \to M(2^m, \mathbb{C})$ durch

$$\begin{aligned} \phi_n(\mathbf{e}_{2j-1}) &:= \underbrace{T \otimes \cdots \otimes T}_{j-1} \otimes U \otimes \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{m-j} , \\ \phi_n(\mathbf{e}_{2j}) &:= \underbrace{T \otimes \cdots \otimes T}_{j-1} \otimes V \otimes \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{m-j} \end{aligned}$$

für $j = 1, \ldots, m$. Da

$$U^2 = V^2 = -E , \quad T^2 = E \quad \text{und} \quad UV = \mathrm{i}\, T ,$$

erfüllen die Matrizen $\phi_n(\mathbf{e}_k)$ die gleichen Relationen wie die Erzeugenden $\mathbf{e}_k$ von $\mathcal{C}_n$. Außerdem wird $M(2^m, \mathbb{C})$ von $\phi_n(\mathbf{e}_1), \ldots, \phi_n(\mathbf{e}_n)$ multiplikativ erzeugt und es gilt

$$\dim \mathcal{C}_n^2 = \dim M(2^m, \mathbb{C}) .$$

Folglich ist ϕ_n ein Isomorphismus.

Ist nun $n = 2m + 1$, so definieren wir $\phi_n : \mathcal{C}_n^{\mathbb{C}} \to M(2^m, \mathbb{C}) \oplus M(2^m, \mathbb{C})$ durch

$$\begin{aligned} \phi_n(\mathbf{e}_j) &:= (\phi_{2m}(\mathbf{e}_j), \phi_{2m}(\mathbf{e}_j)) , \quad j = 1, \ldots, 2m , \\ \phi_n(\mathbf{e}_n) &:= (\mathrm{i}\, T \otimes \cdots \otimes T, -\mathrm{i}\, T \otimes \cdots \otimes T) . \end{aligned}$$

Analog zum ersten Fall verifiziert man, dass auch hier ϕ_n ein Isomorphismus ist. □

Beispiel 1.1.7 Es ist

$$\phi_2(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \phi_2(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Damit ist ϕ_2 die Komplexifizierung des in Beispiel 1.1.3 angegebenen Isomorphismus. Analog erhält man aus

$$\begin{aligned} \phi_3(\mathbf{e}_1) &= \left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \right), \\ \phi_3(\mathbf{e}_2) &= \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right), \\ \phi_3(\mathbf{e}_3) &= \left(\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

und der in Beispiel 1.1.3 beschriebenen Identifikation von $\mathbb{H}$ mit einer Unteralgebra von $M(2, \mathbb{C})$, dass ϕ_3 die Komplexifizierung des Isomorphismus aus Beispiel 1.1.4 ist. □

Ist $n = 2m$ oder $n = 2m+1$, so setzen wir

$$\Delta_n := \mathbb{C}^{2^m} \cong \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{m} .$$

Die Elemente von Δ_n werden **komplexe n-Spinoren** genannt. Außerdem sei $\kappa_n : \mathcal{C}_n^{\mathbb{C}} \to \mathrm{End}(\Delta_n)$ der im Beweis von Satz 1.1.6 angegebene Isomorphismus ϕ_n, falls n gerade ist, und $\mathrm{pr}_1 \circ \phi_n$, falls n ungerade ist. Dabei ist pr_1 die Projektion auf die erste Komponente. Der Algebrenhomomorphimus κ_n heißt die **Spin-Darstellung von $\mathcal{C}_n^{\mathbb{C}}$**.

Seien $\alpha : \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}_n$ und $\beta : \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}_n$ die durch

$$\alpha(\mathbf{e}_{k_1}\mathbf{e}_{k_2}\cdots\mathbf{e}_{k_m}) := (-1)^m \mathbf{e}_{k_1}\mathbf{e}_{k_2}\cdots\mathbf{e}_{k_m} \quad \text{und} \quad \beta(\mathbf{e}_{k_1}\mathbf{e}_{k_2}\cdots\mathbf{e}_{k_m}) := \mathbf{e}_{k_m}\mathbf{e}_{k_{m-1}}\cdots\mathbf{e}_{k_1}$$

definierten linearen Abbildungen. Wie man leicht sieht, gilt

Lemma 1.1.8 (i) *Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\alpha(x) = -x$ und $\beta(x) = x$.*

(ii) *Für alle $u, v \in \mathcal{C}_n$ gilt $\alpha(uv) = \alpha(u)\alpha(v)$ und $\beta(uv) = \beta(v)\beta(u)$.*

(ii) *$\alpha^2 = \beta^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_n}$ und $\alpha\beta = \beta\alpha$.* □

Wir setzen

$$\mathcal{C}_n^0 = \{v \in \mathcal{C}_n : \alpha(v) = v\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_n^1 = \{v \in \mathcal{C}_n : \alpha(v) = -v\}$$

Lemma 1.1.9 (i) *$\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_n^0 \oplus \mathcal{C}_n^1$.*

(ii) *$\mathcal{C}_n^0 \cdot \mathcal{C}_n^0 \subset \mathcal{C}_n^0$, $\mathcal{C}_n^0 \cdot \mathcal{C}_n^1 \subset \mathcal{C}_n^1$, $\mathcal{C}_n^1 \cdot \mathcal{C}_n^0 \subset \mathcal{C}_n^1$ und $\mathcal{C}_n^1 \cdot \mathcal{C}_n^1 \subset \mathcal{C}_n^0$. Insbesondere ist $\mathcal{C}_n^0$ eine Unteralgebra von $\mathcal{C}_n$.* □

Lemma 1.1.9 besagt, dass die Clifford-Algebra $\mathcal{C}_n$ eine **$\mathbb{Z}_2$-graduierte** Algebra ist.

Lemma 1.1.10 *Sei $u \in \mathcal{C}_n^0$. Dann gilt*

$$uv = vu \quad \textit{für alle} \quad v \in \mathcal{C}_n \tag{1.1.1}$$

genau dann, wenn $u \in \mathbb{R}$.

Beweis: Offensichtlich ist (1.1.1) äquivalent zu

$$\mathbf{e}_j u \mathbf{e}_j = -u \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n . \tag{1.1.2}$$

Mit

$$u = \sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \in \{0,1\} \\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n \in 2\mathbb{N}_0}} u_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \mathbf{e}_1^{\varepsilon_1}\cdots\mathbf{e}_n^{\varepsilon_n}$$

ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_j u \mathbf{e}_j &= \sum u_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_1^{\varepsilon_1}\cdots\mathbf{e}_n^{\varepsilon_n} \mathbf{e}_j \\
&= \sum (-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{j-1}+\varepsilon_{j+1}+\cdots+\varepsilon_n} u_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \mathbf{e}_1^{\varepsilon_1}\cdots\mathbf{e}_n^{\varepsilon_n} \mathbf{e}_j^2 \\
&= -\sum (-1)^{\varepsilon_j} u_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \mathbf{e}_1^{\varepsilon_1}\cdots\mathbf{e}_n^{\varepsilon_n} .
\end{aligned}$$

Folglich gilt (1.1.2) genau dann, wenn

$$u_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} = (-1)^{\varepsilon_j} u_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n ,$$

d.h. wenn $u_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} = 0$ für $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Die letzte Bedingung bedeutet aber gerade, dass $u \in \mathbb{R}$. □

1.2 Die Pin- und die Spin-Gruppe

Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n \subset \mathcal{C}_n$ gilt

$$x^2 = xx = -\langle x, x\rangle = -\|x\|^2 \; .$$

Ist folglich $x \neq 0$, so ist x in $\mathcal{C}_n$ invertierbar und

$$x^{-1} = -\frac{x}{\|x\|} \; .$$

Bezeichne S^{n-1} wie üblich die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} \; .$$

Seien $x_1, \dots, x_m \in S^{n-1}$ und sei $u = x_1 \cdots x_m \in \mathcal{C}_n$. Dann ist u invertierbar und

$$u^{-1} = \alpha(\beta(u)) = (-1)^m x_m \cdots x_1 \; .$$

Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} u\alpha(\beta(u)) &= (-1)^m x_1 \cdots x_m x_m \cdots x_1 \\ &= (-1)^m \left(-\|x_m\|^2\right) x_1 \cdots x_{m-1} x_{m-1} \cdots x_1 \\ &\ \vdots \\ &= (-1)^m (-1)^m = 1 \; . \end{aligned}$$

Folglich bilden alle $u \subset \mathcal{C}_n$ der Form

$$u = x_1 \cdots x_m$$

mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $x_1, \dots, x_m \in S^{n-1}$ eine Untergruppe der Gruppe $\mathcal{C}_n^*$ der invertierbaren Elemente von $\mathcal{C}_n$. Diese Untergruppe wird mit $\mathrm{Pin}(n)$ bezeichnet und die **Pin-Gruppe** genannt. Offensichlich ist $\mathrm{Spin}(n) := \mathrm{Pin}(n) \cap \mathcal{C}_n^0$ eine Untergruppe von $\mathrm{Pin}(n)$. Sie heißt die **Spin-Gruppe**. Die Spin-Gruppe $\mathrm{Spin}(n)$ besteht also aus allen $x_1 \cdots x_m \in \mathrm{Pin}(n)$, für die m gerade ist.

Wir wollen jetzt einen Homomorphismus $\rho : \mathrm{Pin}(n) \to \mathrm{O}(n)$ definieren. Zunächst zeigen wir

Lemma 1.2.1 *Für alle $x_1, \dots, x_m, y \in \mathbb{R}^n$ ist $x_1 \cdots x_m y \beta(x_1 \cdots x_m) \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$xyx = (-yx - 2\langle x, y\rangle)x = -yx^2 - 2\langle x, y\rangle x = \|x\|^2 y - 2\langle x, y\rangle x \in \mathbb{R}^n \; .$$

Da

$$x_1 \cdots x_m y \beta(x_1 \cdots x_m) = x_1 \cdots x_m y x_m \cdots x_1 \; ,$$

folgt mittels Induktion die Behauptung. □

Sei $u \in \mathrm{Pin}(n)$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Nach Lemma 1.2.1 ist dann auch $uy\beta(u) \in \mathbb{R}^n$. Somit definiert

$$\rho(u)(y) = uy\beta(u)$$

eine Abbildung $\rho(u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Offensichtlich ist diese Abbildung linear. Außerdem haben wir

Satz 1.2.2 (i) *Für alle $u \in \mathrm{Pin}(n)$ ist $\rho(u) \in \mathrm{O}(n)$.*

(ii) *Die Abbildung $\rho : u \in \mathrm{Pin}(n) \mapsto \rho(u) \in \mathrm{O}(n)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.*

(iii) *Es ist $\rho^{-1}(\mathrm{SO}(n)) = \mathrm{Spin}(n)$.*

Beweis: (i) Sei $u \in \mathrm{Pin}(n)$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Mit $\beta(u) = \pm u^{-1}$ schließen wir

$$\begin{aligned}\langle \rho(u)(y), \rho(u)(y) \rangle &= -(\rho(u)(y))(\rho(u)(y)) \\ &= -uy\beta(u)uy\beta(u) \\ &= -uyu^{-1}uyu^{-1} = -uyyu^{-1} = \langle y, y \rangle \, uu^{-1} = \langle y, y \rangle \ .\end{aligned}$$

(ii) Sei auch $v \in \mathrm{Pin}(n)$. Nach Lemma 1.1.8 gilt dann

$$\rho(uv)(y) = uvy\beta(uv) = uvy\beta(v)\beta(u) = \rho(u)(vy\beta(v)) = \rho(u)(\rho(v)(y)) \ .$$

(iii) Sei $x \in S^{n-1}$. Nach dem Beweis von Lemma 1.2.1 ist dann

$$\rho(x)(y) = y - 2\langle x, y \rangle x \ .$$

Das bedeutet, dass $\rho(x)$ die Spiegelung an dem zu x orthogonalen Unterraum ist. Insbesondere ist

$$\det(\rho(x)) = -1 \ .$$

Für $u = x_1 \cdots x_m$ gilt somit

$$\det(\rho(u)) = \det(\rho(x_1) \cdots \rho(x_m)) = (-1)^m \ .$$

Also ist dann und nur dann $\det(\rho(u)) = 1$, wenn m gerade ist, d.h. wenn $u \in \mathrm{Spin}(n)$. □

Als endlich-dimensionaler Vektorraum besitzt die Clifford-Algebra $\mathcal{C}_n$ eine kanonische differenzierbare Struktur. Damit können wir z.B. auch fragen, ob ρ stetig ist.

Satz 1.2.3 (i) *Der Gruppenhomomorphismus* $\rho : \mathrm{Pin}(n) \to \mathrm{O}(n)$ *ist stetig und surjektiv und* $\mathrm{Ker}\, \rho = \{\pm 1\}$.

(ii) *Ist* $n \geq 2$, *so ist* $\mathrm{Spin}(n)$ *zusammenhängend.*

Beweis: (i) Da die Multiplikation in $\mathcal{C}_n$ bilinear ist, ist sie auch differenzierbar. Dies impliziert, dass ρ stetig ist. Die Surjektivität von ρ folgt aus dem Beweis von Satz 1.2.2(iii) und dem Fakt, dass jede orthogonale Abbildung die Verknüpfung von Spiegelungen ist. Sei $u \in \mathrm{Ker}\, \rho$. Nach Satz 1.2.2(iii) ist dann $u \in \mathrm{Spin}(n)$. Damit ist

$$\rho(u)(x) = x \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

zu

$$uv = vu \quad \text{für alle} \quad v \in \mathcal{C}_n$$

äquivalent. Da u als Element von $\mathrm{Spin}(n)$ in $\mathcal{C}_n^0$ liegt, folgt mit Lemma 1.1.10, dass $u \in \mathbb{R} \cap \mathrm{Spin}(n) = \{\pm 1\}$. Die umgekehrte Inklusion $\{\pm 1\} \subset \mathrm{Ker}\, \rho$ ist offensichtlich.

(ii) Sei $n \geq 2$. Auf Grund von (i) und Satz 1.2.2(iii) genügt es zu zeigen, dass es einen Weg $c : [0, 1] \to \mathrm{Spin}(n)$ mit $c(0) = 1$ und $c(0) = -1$ gibt. Offensichtlich leistet

$$\begin{aligned}c(t) &= \left(\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \mathbf{e}_1 - \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \mathbf{e}_2 \right) \left(\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \mathbf{e}_1 + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \mathbf{e}_2 \right) \\ &= \cos(\pi t) + \sin(\pi t)\, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

das Gewünschte. □

Bemerkung 1.2.4 (i) Satz 1.2.3 impliziert, dass die Abbildung $\rho : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ für $n \geq 2$ eine zweifache Überlagerung ist. Somit existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathrm{Spin}(n)$ von 1 derart, dass die Abbildung $\rho\big|_U : U \to \rho(U)$ ein Homöomorphismus auf eine offene Umgebung $\rho(U) \subset \mathrm{SO}(n)$ von E_n ist.

(ii) Die Gruppen Pin(1) und Spin(1) werden als Untergruppen von $\mathcal{C}_1^*$ von den Elementen $\pm\mathbf{e}_1$ bzw. $\pm\mathbf{e}_1^2$ erzeugt. Also ist

$$\mathrm{Pin}(1) = \{\pm\mathbf{e}_1, \pm 1\} \quad \text{und} \quad \mathrm{Spin}(1) = \{\pm 1\} \; .$$

□

Beispiel 1.2.5 Wir erläutern die Situation für $n = 2$ und benutzen dafür die in Beispiel 1.1.3 angegebene Identifikation von $\mathcal{C}_2$ mit $\mathbb{H}$. Damit ist

$$\mathcal{C}_2^0 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\,\mathrm{k} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_2^1 = \mathbb{R}\,\mathbf{e}_1 \oplus \mathbb{R}\,\mathbf{e}_2 = \mathbb{R}\,\mathrm{i} \oplus \mathbb{R}\,\mathrm{j}$$

und folglich

$$S^1 = \left\{p \in \mathcal{C}_2^1 : |p| = 1\right\} \; .$$

Dies impliziert, dass

$$\mathrm{Pin}(2) = \left\{p \in \mathcal{C}_2^0 \cup \mathcal{C}_2^1 : |p| = 1\right\}$$

und

$$\mathrm{Spin}(2) = \left\{p \in \mathcal{C}_2^0 : |p| = 1\right\} = \{\cos(s) + \sin(s)\,\mathrm{k} : s \in \mathbb{R}\} \; .$$

Insbesondere ist Spin(2) vermöge

$$\cos(s) + \sin(s)\,\mathrm{k} \in \mathrm{Spin}(2) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$$

isomorph zu SO(2). Sei $u = \cos(s) + \sin(s)\,\mathrm{k} \in \mathrm{Spin}(2)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \rho(u)(\mathrm{i}) &= u\mathrm{i}u^{-1} \\ &= \left(\cos^2(s) - \sin^2(s)\right)\mathrm{i} + 2\cos(s)\sin(s)\,\mathrm{j} \\ &= \cos(2s)\,\mathrm{i} + \sin(2s)\,\mathrm{j} \end{aligned}$$

und analog

$$\rho(u)(\mathrm{j}) = -\sin(2s)\,\mathrm{i} + \cos(2s)\,\mathrm{j} \; .$$

In der Basis $\{\mathrm{i}, \mathrm{j}\}$ von $\mathcal{C}_n^1$ gilt also

$$\rho(u) = \begin{pmatrix} \cos(2s) & -\sin(2s) \\ \sin(2s) & \cos(2s) \end{pmatrix} \; .$$

□

1.3 Die Lie-Algebra der Spin-Gruppe

Definition 1.3.1 *Eine reelle (bzw. komplexe)* **Lie-Algebra** *ist ein Paar* $(\mathfrak{a}, [\;,\;])$ *bestehend aus einem reellen (bzw. komplexen) Vektorraum* $\mathfrak{a}$ *und einer bilinearen Abbildung*

$$[\;,\;] : (X, Y) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \mapsto [X, Y] \in \mathfrak{a}$$

mit den folgenden beiden Eigenschaften.

(1) $[\;,\;]$ *ist schiefsymmetrisch, d.h.* $[X, Y] = -[Y, X]$ *für alle* $X, Y \in \mathfrak{a}$.

(2) $[\;,\;]$ *erfüllt die Jacobi-Identität, d.h.*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{a}$.

Sei $\mathcal{A}$ eine endlich-dimensionale reelle oder komplexe, assoziative Algebra mit 1 und sei $\mathcal{A}^*$ die Gruppe der invertierbaren Elemente von $\mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{A}^*$ eine offene Teilmenge von $\mathcal{A}$. Damit ist $\mathcal{A}^*$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und für jedes $a \in \mathcal{A}^*$ stimmt der Tangentialraum $T_a\mathcal{A}^*$ an $\mathcal{A}^*$ im Punkt a mit $\mathcal{A}$ überein. Wir verleihen $\mathcal{A}$ durch

$$[a, b] := ab - ba \quad \text{für} \quad a, b \in \mathcal{A}$$

die Struktur einer Lie-Algebra.

Definition 1.3.2 *Eine Teilmenge $G \subset \mathcal{A}^*$ heißt* **Liesche Untergruppe** *von $\mathcal{A}^*$ $:\Longleftrightarrow$ G ist sowohl eine Untergruppe als auch eine Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{A}^*$. Die* **Dimension** $\dim G$ *von G ist dann die Dimension der Untermannigfaltigkeit G.*

Lemma 1.3.3 *Sei G eine Liesche Untergruppe von $\mathcal{A}^*$. Für alle $a, b \in T_1G$ ist dann auch $[a, b] \in T_1G$.*

Beweis: Seien $a, b \in T_1G$. Dann existieren Kurven c_a und c_b in G mit $c_a(0) = c_b(0) = 1$, $\dot{c}_a(0) = a$ und $\dot{c}_b(0) = b$. Da G eine Gruppe ist, ist $c_a(t)c_b(s)c_a(t)^{-1} \in G$ für alle s, t. Außerdem ist $c_a(t)c_b(0)c_a(t)^{-1} = 1$ für alle t. Folglich ist

$$c_a(t)\, b\, c_a(t)^{-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} c_a(t)c_b(s)c_a(t)^{-1}\bigg|_{s=0} \in T_1G$$

für alle t. Hiermit sehen wir, dass

$$[a, b] = ab - ba = \dot{c}_a(0)b - b\dot{c}_a(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c_a(t)\, b\, c_a(t)^{-1}\bigg|_{t=0} \in T_1G\ .$$

$\square$

Ist G eine Liesche Untergruppe von $\mathcal{A}^*$, so ist $\mathfrak{g} := T_1G$ nach Lemma 1.3.3 eine Lie-Unteralgebra von $\mathcal{A}$. Diese Unteralgebra wird die **Lie-Algebra von** G genannt.

Beispiel 1.3.4 Der Raum $M(n, \mathbb{R})$ der reellen $n \times n$-Matrizen ist eine reelle, assoziative Algebra mit 1. Die Gruppe $M(n, \mathbb{R})^*$ der invertierbaren Elemente von $M(n, \mathbb{R})$ ist $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Die Gruppe

$$\mathrm{SO}(n) = \left\{A \in M(n, \mathbb{R}) : AA^{\mathrm{T}} = E_n \text{ und } \det A = 1\right\}$$

ist eine Liesche Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Die Lie-Algebra von $\mathrm{SO}(n)$ ist

$$\mathfrak{so}(n) = \left\{X \in M(n, \mathbb{R}) : X + X^{\mathrm{T}} = 0\right\}\ .$$

Folglich ist $\dim \mathrm{SO}(n) = n(n-1)/2$. $\square$

Beispiel 1.3.5 Der Raum $M(n, \mathbb{C})$ der komplexen $n \times n$-Matrizen ist eine komplexe, assoziative Algebra mit 1. Hier ist $M(n, \mathbb{C})^* = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Die Gruppe

$$\mathrm{SU}(n) = \left\{A \in M(n, \mathbb{C}) : A\bar{A}^{\mathrm{T}} = E_n \text{ und } \det A = 1\right\}$$

ist eine Liesche Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Deren Lie-Algebra ist

$$\mathfrak{su}(n) = \left\{X \in M(n, \mathbb{C}) : X + \bar{X}^{\mathrm{T}} = 0 \text{ und } \mathrm{Tr}(X) = 0\right\}$$

und demzufolge ist $\dim \mathrm{SU}(n) = n^2 - 1$. Man beachte, dass $\mathfrak{su}(n)$ nur eine reelle Lie-Algebra ist. $\square$

Die folgenden beiden Sätze implizieren, dass $\mathrm{Spin}(n)$ eine Liesche Untergruppe von $\mathcal{C}_n^*$ ist.

Satz 1.3.6 *Ist G eine Untergruppe von $\mathcal{A}^*$ und ist G abgeschlossen in $\mathcal{A}^*$, so ist G eine Liesche Untergruppe von $\mathcal{A}^*$.*

Beweis: Einen Beweis dieses Satzes findet man z.B. in [2]. □

Satz 1.3.7 *Für $v \in \mathcal{C}_n$ gilt $v \in \mathrm{Spin}(n)$ genau dann, wenn v die folgenden drei Eigenschaften besitzt.*

(1) $v \in \mathcal{C}_n^0$.

(2) $v\beta(v) = 1$.

(3) *Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ ist $vy\beta(v) \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis: Sei G die Menge aller $v \in \mathcal{C}_n$, die die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen. Dann ist G offensichtlich eine Gruppe und $\mathrm{Spin}(n) \subset G$. Wir setzen

$$\tilde{\rho}(v)(y) = vyv^{-1} \quad \text{für} \quad v \in G \text{ und } y \in \mathbb{R}^n \ .$$

Indem man wie im Beweis von Satz 1.2.2 verfährt, sieht man, dass dies einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{\rho} : G \to \mathrm{SO}(n)$ definiert. Da $\tilde{\rho}\big|_{\mathrm{Spin}(n)} = \rho$, ist $\tilde{\rho}\big|_{\mathrm{Spin}(n)}$ surjektiv. Außerdem ist $\mathrm{Ker}\,\tilde{\rho} \subset \mathrm{Spin}(n)$. Ist nämlich $v \in \mathrm{Ker}\,\tilde{\rho}$, so gilt

$$v\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j v \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n \ .$$

Dies liefert mit Lemma 1.1.10, dass $v \in \mathbb{R}$. Wegen (2) gilt $v^2 = 1$ und somit ist $v = \pm 1 \in \mathrm{Spin}(n)$. Wendet man nun Lemma 1.3.8 an, so erhält man $\mathrm{Spin}(n) = G$. □

Lemma 1.3.8 *Sei H eine Untergruppe der Gruppe G und sei $\tau : G \to K$ eine Gruppenhomomorphismus mit den folgenden beiden Eigenschaften.*

(1) *Die Einschränkung $\tau\big|_H : H \to K$ von τ auf H ist surjektiv.*

(2) $\mathrm{Ker}\,\tau \subset H$.

Dann ist $H = G$.

Beweis: Zu zeigen ist $G \subset H$. Sei $g \in G$. Auf Grund von (1) existiert ein $h \in H$ mit $\tau(g) = \tau(h)$. Dann gilt $\tau\left(gh^{-1}\right) = \tau(g)\tau(h)^{-1} = 1$, d.h. $gh^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\tau$. Wegen (2) folgt $gh^{-1} \in H$. Damit ist auch $g = \left(gh^{-1}\right) h \in H$. □

Folgerung 1.3.9 $\mathrm{Spin}(n)$ *ist eine Liesche Untergruppe von $\mathcal{C}_n^*$.*

Beweis: Mit Hilfe von Satz 1.3.7 sieht man, dass $\mathrm{Spin}(n)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{C}_n^*$ ist. Da $\mathrm{Spin}(n)$ nach Definition außerdem eine Untergruppe von $\mathcal{C}_n^*$ ist, folgt mit Satz 1.3.6 die Behauptung. □

Als Nächstes bestimmen wir die Lie-Algebra $\mathfrak{spin}(n)$ von $\mathrm{Spin}(n)$. Sei $\mathfrak{a}(n)$ der von $\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$, $1 \le k < l \le n$, aufgespannte Unterraum von $\mathcal{C}_n$. Im ersten Schritt zeigen wir

Lemma 1.3.10 *Der Unterraum $\mathfrak{a}(n)$ stimmt mit den von allen Produkten xy von Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle x, y\rangle = 0$ aufgespannten Unterraum von $\mathcal{C}_n$ überein.*

Beweis: Sei
$$\tilde{\mathfrak{a}}(n) := \operatorname{span}\{xy : x, y \in \mathbb{R}^n \text{ und } \langle x, y\rangle = 0\} \ .$$
Offensichtlich gilt $\mathfrak{a}(n) \subset \tilde{\mathfrak{a}}(n)$. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und gelte $\langle x, y\rangle = 0$. Dann ist
$$\begin{aligned} xy &= \sum_{k,l=1}^{n} x^k y^l \, \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \\ &= \sum_{k=1}^{n} x^k y^k \, \mathbf{e}_k^2 + \sum_{k<l} x^k y^l \, \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l + \sum_{k<l} x^l y^k \, \mathbf{e}_l \mathbf{e}_k \\ &= -\langle x, y\rangle + \sum_{k<l} \left(x^k y^l - x^l y^k\right) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \\ &= \sum_{k<l} \left(x^k y^l - x^l y^k\right) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \ . \end{aligned}$$
Also ist $xy \in \mathfrak{a}(n)$ und es folgt $\tilde{\mathfrak{a}}(n) \subset \mathfrak{a}(n)$. □

Satz 1.3.11 *Die Lie-Algebra* $\mathfrak{spin}(n)$ *der Spin-Gruppe* $\operatorname{Spin}(n)$ *ist* $\mathfrak{a}(n)$.

Beweis: Sei $c(t)$ eine glatte Kurve in $\operatorname{Spin}(n)$ mit $c(0) = 1$. Dann ist
$$c(t) = c_1(t) \cdots c_m(t)$$
mit glatten Kurven $c_1(t), \ldots, c_m(t)$ in S^{n-1}. Damit ist
$$\dot{c}(0) = \dot{c}_1(0)c_2(0) \cdots c_m(0) + c_1(0)\dot{c}_2(0)c_3(0) \cdots c_m(0) + \ldots + c_1(0) \cdots c_{m-1}(0)\dot{c}_m(0) \ .$$
Wir zeigen, dass jeder Summand auf der rechten Seite in $\mathfrak{a}(n)$ liegt. Wegen $c(0) = 1$ und $c_1(t) \in S^{n-1}$ ist
$$c_2(0) \cdots c_m(0) = c_1(0)^{-1} = -c_1(0) \quad \text{und} \quad \langle \dot{c}_1(0), c_1(0)\rangle = 0 \ .$$
Also haben wir für den ersten Summanden nach Lemma 1.3.10
$$\dot{c}_1(0)c_2(0) \cdots c_m(0) = -\dot{c}_1(0)c_1(0) \in \mathfrak{a}(n) \ .$$
Weiter sehen wir
$$\begin{aligned} c_1(0)\dot{c}_2(0)c_3(0) \cdots c_m(0) &= c_1(0)\dot{c}_2(0)c_2(0)^{-1}c_1(0)^{-1} \\ &= -c_1(0)\dot{c}_2(0)c_2(0)c_1(0)^{-1} \\ &= -\left(c_1(0)\dot{c}_2(0)c_1(0)^{-1}\right)\left(c_1(0)c_2(0)c_1(0)^{-1}\right) \ . \end{aligned}$$
Da mit den Vektoren $\dot{c}_2(0)$ und $c_2(0)$ auch die Vektoren $c_1(0)\dot{c}_2(0)c_1(0)^{-1}$ und $c_1(0)c_2(0)c_1(0)^{-1}$ zueinander orthogonal sind, liegt folglich auch der zweite Summand in $\mathfrak{a}(n)$. Für die anderen Summanden geht man analog vor. Damit ist die Inklusion $\mathfrak{spin}(n) \subset \mathfrak{a}(n)$ bewiesen.

Andererseits ist
$$\begin{aligned} c(t) &= \left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathbf{e}_k - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\mathbf{e}_l\right)\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathbf{e}_k + \cos\left(\frac{t}{2}\right)\mathbf{e}_l\right) \\ &= \cos(t) + \sin(t)\, \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \end{aligned}$$
für $k \neq l$ eine Kurve in $\operatorname{Spin}(n)$ mit $c(0) = 1$ und $\dot{c}(0) = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l$. Demzufolge gilt auch $\mathfrak{a}(n) \subset \mathfrak{spin}(n)$. □

Sei $\mathcal{A}$ wieder eine endlich-dimensionale assoziative Algebra mit 1. Die **Exponentialabbildung** $\exp : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ist durch
$$\exp(a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$
definiert. Die folgenden Eigenschaften der Exponentialabbildung können leicht nachgerechnet werden.

Lemma 1.3.12 *Sei $a \in \mathcal{A}$.*

(i) *Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ ist $\exp(sa + ta) = \exp(sa)\exp(ta)$. Insbesondere ist $\exp(a)\exp(-a) = 1$ und somit $\exp(a) \in \mathcal{A}^*$.*

(ii) *Für alle $b \in \mathcal{A}^*$ ist $\exp\left(bab^{-1}\right) = b\exp(a)b^{-1}$.*

(iii) *Es gilt*
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(ta) = \exp(ta)a \; .$$
Insbesondere ist
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(ta)\bigg|_{t=0} = a \; .$$

□

Sei G eine Liesche Untergruppe von $\mathcal{A}^*$ und sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G.

Satz 1.3.13 *Ist $a \in \mathfrak{g}$, so ist $\exp(a) \in G$*

Beweis: Sei $a \in \mathfrak{g}$. Wie man leicht sieht, definiert $X(g) := ga$ ein glattes Vektorfeld X auf G. Sei $c : I \to G$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems
$$\dot{c}(t) = X(c(t)) \quad \text{und} \quad c(0) = 1 \; .$$
Dann ist c auch eine Kurve in $\mathfrak{a}$ und es gilt
$$\dot{c}(t) = c(t)a \quad \text{und} \quad c(0) = 1 \; .$$
Mit Lemma 1.3.12(iii) folgt
$$c(t) = \exp(ta) \quad \text{für alle} \quad t \in I \; .$$
Ist $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $1/m \in I$, so haben wir also
$$\exp\left(\frac{1}{m}\,a\right) = c\left(\frac{1}{m}\right) \in G$$
und damit wegen Lemma 1.3.12(i) auch
$$\exp(a) = \exp\left(\frac{1}{m}\,a\right)^m \in G \; .$$

□

Beispiel 1.3.14 Für die Erzeuger $\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$, $k < l$, von $\mathfrak{spin}(n)$ gilt $(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l)^2 = -1$. Folglich ist
$$\exp(t\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l) = \cos(t) + \sin(t)\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l \; .$$

□

Sei $\mathcal{B}$ eine weitere endlich-dimensionale assoziative Algebra mit 1, sei H eine Liesche Untergruppe von $\mathcal{B}^*$ und sei $\mathfrak{h}$ die Lie-Algebra von H. Ist $\lambda : G \to H$ ein glatter Gruppenhomomorphismus, so sei $\lambda_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ das Differential von λ im Punkt 1. Demnach ist
$$\lambda_*(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(\exp(ta))\bigg|_{t=0} \quad \text{für} \quad a \in \mathfrak{g} \; .$$

Satz 1.3.15 *Für alle $a \in \mathfrak{g}$ gilt $\exp(\lambda_*(a)) = \lambda(\exp(a))$.*

Beweis: Für die Kurven $c_1(t) = \exp(\lambda_*(ta))$ und $c_2(t) = \lambda(\exp(ta))$ gilt $c_1(0) = c_2(0) = 1$,

$$\dot{c}_1(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(t\lambda_*(a)) = \exp(t\lambda_*(a))\lambda_*(a) = c_1(t)\lambda_*(a)$$

und

$$\dot{c}_2(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\lambda(\exp((t+s)a))\Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\lambda(\exp(ta))\lambda(\exp(sa))\Big|_{s=0} = c_2(t)\lambda_*(a) \ .$$

Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen impliziert, dass $c_1(t) = c_2(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $c_1(1) = c_2(1)$, d.h. $\exp(\lambda_*(a)) = \lambda(\exp(a))$. □

Satz 1.3.16 *Die Abbildung $\lambda_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ist ein Lie-Algebrenhomomorphismus. Das heißt, für alle $a, b \in \mathfrak{g}$ gilt*

$$\lambda_*([a,b]) = [\lambda_*(a), \lambda_*(b)] \ .$$

Beweis: Seien $a, b \in \mathfrak{g}$. Nach dem Beweis von Lemma 1.3.3 ist

$$[a,b] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \exp(ta)\exp(sb)\exp(-ta)\Big|_{s,t=0} \ .$$

Damit und mit Satz 1.3.15 sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
\lambda_*([a,b]) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\exp(ta)\exp(sb)\exp(-ta)\Big|_{s=0}\right)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\lambda(\exp(ta)\exp(sb)\exp(-ta))\Big|_{s,t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\exp(t\lambda_*(a))\exp(s\lambda_*(b))\exp(-t\lambda_*(a))\Big|_{s,t=0} \\
&= [\lambda_*(a), \lambda_*(b)] \ .
\end{aligned}$$

□

Satz 1.3.17 *Für alle $v \in \mathfrak{spin}(n)$ und alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\rho_*(v)(y) = vy - yv \ .$$

Insbesondere ist $vy - yv \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Für $v \in \mathfrak{spin}(n)$ und $y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\rho_*(v)(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(\exp(tv))(y)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tv)y\exp(-tv)\Big|_{t=0} = vy - yv \ .$$

□

Sei $\hat{E}_{kl}$ die $n \times n$-Matrix, deren einziger von 0 verschiedener Eintrag eine 1 in der k-ten Zeile und l-ten Spalte ist, und sei

$$E_{kl} := \hat{E}_{lk} - \hat{E}_{kl} \in \mathfrak{so}(n) \ .$$

Damit gilt

$$\hat{E}_{kl}\mathbf{e}_j = \delta_{jl}\mathbf{e}_k \quad \text{und} \quad E_{kl}\mathbf{e}_j = \delta_{jk}\mathbf{e}_l - \delta_{jl}\mathbf{e}_k \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n \ .$$

Folgerung 1.3.18 *Für $1 \leq k < l \leq n$ ist*

$$\rho_*(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l) = 2\,E_{kl} \ .$$

Beweis: Sei $k < l$. Nach Satz 1.3.17 ist

$$\begin{aligned}
\rho_*(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l)(\mathbf{e}_j) &= \mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l \\
&= \mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k\mathbf{e}_j\mathbf{e}_l + 2\delta_{jk}\mathbf{e}_l \\
&= -2\delta_{jl}\mathbf{e}_k + 2\delta_{jk}\mathbf{e}_l \ .
\end{aligned}$$

Das ergibt die Behauptung. □

1.4 Die Spin-Darstellung

Sei G eine Liesche Untergruppe von $\mathcal{A}^*$.

Definition 1.4.1 *Eine reelle (bzw. komplexe)* **Darstellung** *von G ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus $\tau : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{V})$, wobei $\mathcal{V}$ ein endlich-dimensionaler reeller (bzw. komplexer) Vektorraum ist. Man sagt dann auch, dass τ eine Darstellung von G* **über** *$\mathcal{V}$ ist.*

Bemerkung 1.4.2 Ist H eine Liesche Untergruppe von $\mathcal{B}^*$ und ist $\lambda : G \to H$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, so ist λ bereits glatt (vgl. [4], Satz I.10.6). Insbesondere ist jede Darstellung τ von G auch glatt. □

Definition 1.4.3 *Sei $\tau : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ eine Darstellung von G.*

(i) *Die Darstellung τ heißt* **treu** $:\Longleftrightarrow$ *τ ist injektiv.*

(ii) *Ein Unterraum $\mathcal{W}$ von $\mathcal{V}$ heißt* **τ-invariant** $:\Longleftrightarrow$ *Für alle $g \in G$ ist $\tau(g)(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}$.*

(iii) *τ heißt* **irreduzibel** $:\Longleftrightarrow$ *Die einzigen τ-invarianten Unterräume von $\mathcal{V}$ sind die trivialen Unterräume $\{0\}$ und $\mathcal{V}$.*

Wir betrachten die Spin-Darstellung $\kappa_n : \mathcal{C}_n^{\mathbb{C}} \to \mathrm{End}(\Delta_n)$ von $\mathcal{C}_n^{\mathbb{C}}$ und definieren die **Spin-Darstellung** κ von $\mathrm{Spin}(n)$ als die Einschränkung von κ_n auf $\mathrm{Spin}(n)$,

$$\kappa := \kappa_n\big|_{\mathrm{Spin}(n)} : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{GL}(\Delta_n) .$$

Satz 1.4.4 *Die Spin-Darstellung κ ist eine treue Darstellung.*

Beweis: Dass κ eine Darstellung ist, folgt aus der Tatsache, dass κ_n ein Algebrenhomomorphismus ist. Ist n gerade, so ist κ_n sogar ein Isomorphismus und damit ist κ trivialerweise treu. Sei im Weiteren $n = 2m + 1$. Dann ist $\Delta_n = \Delta_{2m}$. Wir betrachten $\mathcal{C}_{2m}$ als Unteralgebra von $\mathcal{C}_n$ und dementsprechend $\mathrm{Spin}(2m)$ als Untergruppe von $\mathrm{Spin}(n)$. Bezeichne H den Kern der Spin-Darstellung $\kappa : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{GL}(\Delta_n)$. Wir müssen zeigen, dass H trivial ist. Als Kern eines Gruppenhomomorphismus ist H ein Normalteiler von $\mathrm{Spin}(n)$. Da $\rho : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ surjektiv ist, ist $\rho(H)$ ein Normalteiler von $\mathrm{SO}(n)$. Auf Grund von

$$\kappa_n(v) = \kappa_{2m}(v) \quad \text{für alle} \quad v \in \mathcal{C}_{2m}$$

und der Tatsache, dass κ_{2m} ein Isomorphismus ist, haben wir

$$H \cap \mathrm{Spin}(2m) = \{1\} . \tag{1.4.1}$$

Weiter ist $\rho(\mathrm{Spin}(2m)) = \mathrm{SO}(2m)$, wobei wir $\mathrm{SO}(2m)$ mittels der Einbettung

$$A \in \mathrm{SO}(2m) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(n)$$

als Untergruppe von $\mathrm{SO}(n)$ verstehen. Ist nun $B \in \rho(H) \cap \mathrm{SO}(2m)$, so existieren ein $u \in H$ und ein $w \in \mathrm{Spin}(2m)$ mit $\rho(u) = \rho(w) = B$. Da dann $u = \pm w$ und da mit w auch $-w$ in $\mathrm{Spin}(2m)$ liegt, gilt $u \in H \cap \mathrm{Spin}(2m)$. Folglich ist

$$\rho(H) \cap \mathrm{SO}(2m) = \{E_n\} .$$

Sei jetzt $C \in \rho(H)$. Da n ungerade ist, besitzt C einen reellen Eigenwert. Folglich existiert ein $D \in \mathrm{SO}(n)$ mit

$$DCD^{-1} \in \mathrm{SO}(2m) .$$

Weil $\rho(H)$ ein Normalteiler ist, gilt dann $DCD^{-1} \in \rho(H) \cap \mathrm{SO}(2m)$. Demzufolge ist $DCD^{-1} = E_n$ und damit $C = E_n$. Also ist $\rho(H) = \{E_n\}$. Das impliziert $H = \{1\}$ oder $H = \{\pm 1\}$. Wegen (1.4.1) und $-1 \in \mathrm{Spin}(2m)$ ist der zweite Fall jedoch nicht möglich. □

Wir wollen jetzt zeigen, dass für gerades n die Darstellung $\kappa : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{GL}(\Delta_n)$ in zwei irreduzible Darstellungen aufspaltet. Sei also $n = 2m$. Dann ist $\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n \in \mathrm{Spin}(n)$ und es gilt

$$\mathbf{e}_j \mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n = -\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n \mathbf{e}_j \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n \ . \tag{1.4.2}$$

Folglich liegt $\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n$ im Zentrum von $\mathcal{C}_n^0$. Außerdem ist

$$(\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n)^2 = (-1)^m \ .$$

Wir setzen $\phi := (-\mathrm{i})^m \kappa(\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n) : \Delta_n \to \Delta_n$. Dann haben wir

$$\phi^2 = (-1)^m \kappa\left((\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n)^2\right) = \mathrm{id}_{\Delta_n} \tag{1.4.3}$$

und

$$\phi \circ \kappa(u) = (-\mathrm{i})^m \kappa(\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n u) = (-\mathrm{i})^m \kappa(u \mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n) = \kappa(u) \circ \phi \tag{1.4.4}$$

für alle $u \in \mathrm{Spin}(n)$. Wegen (1.4.3) ist

$$\Delta_n = \Delta_n^+ \oplus \Delta_n^- \ ,$$

wobei

$$\Delta_n^{\pm} := \{\mathsf{w} \in \Delta_n : \phi(\mathsf{w}) = \pm \mathsf{w}\} \ .$$

Nach (1.4.4) sind die Räume Δ_n^+ und Δ_n^- außerdem κ-invariant. Folglich sind durch

$$\kappa^{\pm}(u) := \kappa(u)\big|_{\Delta_n^{\pm}} \quad \text{für} \quad u \in \mathrm{Spin}(n)$$

Darstellungen $\kappa^+ : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{GL}(\Delta_n^+)$ und $\kappa^- : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{GL}(\Delta_n^-)$ von $\mathrm{Spin}(n)$ definiert.

Definition 1.4.5 *Die Elemente aus Δ_n^+ (bzw. Δ_n^-) heißen* **positive** *(bzw.* **negative***)* **Weyl-Spinoren***.*

Satz 1.4.6 *Die Darstellungen κ^+ und κ^- sind irreduzibel.*

Beweis: Wir wollen hier nur den Fall $n = 4$ diskutieren. Für den allgemeinen Fall verweisen wir auf [1].

Sei

$$\mathbf{a}(1) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{a}(-1) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und sei $\mathsf{w}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := \mathbf{a}(\varepsilon_1) \otimes \mathbf{a}(\varepsilon_2)$ für $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$. Dann ist $\{\mathbf{a}(1), \mathbf{a}(-1)\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$ und somit $\{\mathsf{w}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Seien E, U, V, T wie im Beweis von Satz 1.1.6. Dann ist

$$\kappa_4(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4) = (U \otimes E) \cdot (V \otimes E) \cdot (T \otimes U) \cdot (T \otimes V) = UVT^2 \otimes UV = \mathrm{i}\, T \otimes \mathrm{i}\, T = -T \otimes T$$

und somit $\phi = T \otimes T$. Außerdem ist

$$T\mathbf{a}(\varepsilon) = \varepsilon \mathbf{a}(\varepsilon) \quad \text{für} \quad \varepsilon = \pm 1 \ .$$

Folglich ist

$$\phi(\mathsf{w}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) = \varepsilon_1 \varepsilon_2\, \mathsf{w}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \ .$$

Damit ist $\{\mathsf{w}(1,1), \mathsf{w}(-1,-1)\}$ eine Basis von Δ_4^+ und $\{\mathsf{w}(1,-1), \mathsf{w}(-1,1)\}$ eine Basis von Δ_4^-.

Sei jetzt

$$\mathsf{w} = z_1\,\mathsf{w}(1,1) + z_2\,\mathsf{w}(-1,-1) \quad \text{mit} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

ein nichttriviales Element von Δ_4^+ und sei $\mathcal{W}$ die lineare Hülle von $\{\kappa(u)\mathsf{w} : u \in \mathrm{Spin}(4)\}$. Für die Irreduzibilität von κ^+ müssen wir zeigen, dass $\mathcal{W} = \Delta_4^+$. Zunächst bemerken wir, dass

$$(1 + \mathrm{i}\,\kappa(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2))\mathsf{w} \quad \text{und} \quad (1 - \mathrm{i}\,\kappa(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2))\mathsf{w}$$

in $\mathcal{W}$ liegen. Mit

$$\kappa(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \mathrm{i}\,T\mathbf{a}(\varepsilon_1) \otimes \mathbf{a}(\varepsilon_2) = \mathrm{i}\varepsilon_1\,\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$$

sehen wir

$$\begin{aligned}
(1 + \mathrm{i}\,\kappa(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2))\mathsf{w}(1,1) &= 0\ , \\
(1 + \mathrm{i}\,\kappa(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2))\mathsf{w}(-1,-1) &= 2\,\mathsf{w}(-1,-1)\ , \\
(1 - \mathrm{i}\,\kappa(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2))\mathsf{w}(1,1) &= 2\,\mathsf{w}(1,1)\ , \\
(1 - \mathrm{i}\,\kappa(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2))\mathsf{w}(-1,-1) &= 0
\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
(1 + \mathrm{i}\,\kappa(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2))\mathsf{w} &= 2z_2\,\mathsf{w}(-1,-1)\ , \\
(1 - \mathrm{i}\,\kappa(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2))\mathsf{w} &= 2z_1\,\mathsf{w}(1,1)\ .
\end{aligned}$$

Also ist $\mathsf{w}(1,1)$ oder $\mathsf{w}(-1,-1)$ in $\mathcal{W}$ enthalten. Wegen

$$U\mathbf{a}(\varepsilon) = \mathrm{i}\,\mathbf{a}(-\varepsilon)$$

ist

$$\begin{aligned}
\kappa_4(\mathbf{e}_1)\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) &= U\mathbf{a}(\varepsilon_1) \otimes \mathbf{a}(\varepsilon_2) = \mathrm{i}\,\mathbf{a}(-\varepsilon_1) \otimes \mathbf{a}(\varepsilon_2) = \mathrm{i}\,\mathsf{w}(-\varepsilon_1,\varepsilon_2)\ , \\
\kappa_4(\mathbf{e}_3)\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) &= T\mathbf{a}(\varepsilon_1) \otimes U\mathbf{a}(\varepsilon_2) = \mathrm{i}\varepsilon_1\,\mathbf{a}(\varepsilon_1) \otimes \mathbf{a}(-\varepsilon_2) = \mathrm{i}\varepsilon_1\,\mathsf{w}(\varepsilon_1,-\varepsilon_2)
\end{aligned}$$

und somit

$$\kappa(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = -\varepsilon_1\mathsf{w}(-\varepsilon_1,-\varepsilon_2)\ .$$

Folglich liegen $\mathsf{w}(1,1)$ und $\mathsf{w}(-1,-1)$ in $\mathcal{W}$ und damit ist $\mathcal{W} = \Delta_4^+$. Analog verifiziert man, dass κ^- irreduzibel ist. □

Wir müssen jetzt noch den Fall betrachten, dass n ungerade ist.

Satz 1.4.7 *Ist n ungerade, so ist die Spin-Darstellung $\kappa : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{GL}(\Delta_n)$ irreduzibel.*

Beweis: Man verfährt ähnlich wie beim Beweis von Satz 1.4.6. Ist z.B. $n = 3$, so benutzt man Folgendes. Der Raum der komplexen 3-Spinoren ist $\mathbb{C}_2$ und hat demzufolge $\{\mathbf{a}(1), \mathbf{a}(-1)\}$ als Basis. Wegen

$$\kappa(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{a}(\varepsilon) = \mathrm{i}\varepsilon\,\mathbf{a}(\varepsilon) \quad \text{für} \quad \varepsilon = \pm 1$$

ist

$$\begin{aligned}
(1 + \mathrm{i}\,\kappa(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2))\mathbf{a}(1) &= 0\ , \\
(1 + \mathrm{i}\,\kappa(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2))\mathbf{a}(-1) &= 2\,\mathbf{a}(-1)\ , \\
(1 - \mathrm{i}\,\kappa(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2))\mathbf{a}(1) &= 2\,\mathbf{a}(1)\ , \\
(1 - \mathrm{i}\,\kappa(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2))\mathbf{a}(-1) &= 0\ .
\end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\kappa(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)\mathbf{a}(\varepsilon) = \mathrm{i}\,UT\mathbf{a}(\varepsilon) = -\varepsilon\,\mathbf{a}(-\varepsilon)\ .$$

□

1.5 Die Clifford-Multiplikation

Wir nutzen den Algebrenhomomorphismus $\kappa_n : \mathcal{C}_n^{\mathbb{C}} \to \mathrm{End}(\Delta_n)$, um eine Multiplikationen von Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ mit komplexen n-Spinoren zu definieren.

Definition 1.5.1 *Die* **Clifford-Multiplikation** $\mu : \mathbb{R}^n \otimes \Delta_n \to \Delta_n$ *ist durch*

$$\mu(x \otimes \mathsf{w}) := \kappa_n(x)\mathsf{w} \quad \textit{für} \quad x \in \mathbb{R}^n \ \textit{und}\ \mathsf{w} \in \Delta_n$$

definiert.

Im Folgenden werden wir statt $\mu(x \otimes \mathsf{w})$ meistens $x \cdot \mathsf{w}$ schreiben. Außerdem sei

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m \cdot \mathsf{w} = x_1 \cdot (x_2 \cdot \dots \cdot x_m \cdot \mathsf{w}) \quad \text{für} \quad x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n \ .$$

Lemma 1.5.2 *Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und alle $\mathsf{w} \in \Delta_n$ gilt*

$$x \cdot y \cdot \mathsf{w} + y \cdot x \cdot \mathsf{w} = -2\langle x, y\rangle \mathsf{w} \ .$$

Beweis: Da κ_n ein Algebrenhomomorphismus ist, haben wir

$$\begin{aligned} x \cdot y \cdot \mathsf{w} + y \cdot x \cdot \mathsf{w} &= (\kappa_n(x)\kappa_n(y) + \kappa_n(y)\kappa_n(x))\mathsf{w} \\ &= \kappa_n(xy + yx)\mathsf{w} = \kappa_n(-2\,\langle x, y\rangle)\mathsf{w} = -2\langle x, y\rangle \mathsf{w} \ . \end{aligned}$$

□

Lemma 1.5.3 *Ist $x \cdot \mathsf{w} = 0$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $\mathsf{w} \in \Delta_n$ und ist $\mathsf{w} \neq 0$, so muss $x = 0$ sein.*

Beweis: Ist $x \cdot \mathsf{w} = 0$, so gilt nach Lemma 1.5.2 auch

$$0 = x \cdot x \cdot \mathsf{w} = -\|x\|^2 \mathsf{w} \ .$$

Ist $\mathsf{w} \neq 0$, so folgt $\|x\|^2 = 0$, d.h. $x = 0$. □

Entscheidend für die Konstruktion von Dirac-Operatoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist

Satz 1.5.4 *Die Clifford-Multiplikation ist äquivariant bezüglich der Spin-Darstellung. Das heißt, für alle $u \in \mathrm{Spin}(n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $\mathsf{w} \in \Delta_n$ gilt*

$$\kappa(u)(x \cdot \mathsf{w}) = (\rho(u)x) \cdot (\kappa(u)\mathsf{w}) \ .$$

Beweis: Wir schließen

$$\begin{aligned} \kappa(u)(x \cdot \mathsf{w}) &= \kappa_n(u)\kappa_n(x)\kappa_n\left(u^{-1}\right)\kappa_n(u)\mathsf{w} \\ &= \kappa_n\left(uxu^{-1}\right)\kappa_n(u)\mathsf{w} = (\rho(u)x) \cdot (\kappa(u)\mathsf{w}) \ . \end{aligned}$$

□

Satz 1.5.5 *Sei $n = 2m$ gerade und sei $\mathsf{w} \in \Delta_n^{\pm}$. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist dann $x \cdot \mathsf{w} \in \Delta_n^{\mp}$.*

Beweis: Wegen (1.4.2) gilt

$$x\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n = -\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n x \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n \ .$$

Damit haben wir

$$\phi \circ \kappa_n(x) = (-\mathrm{i})^m \kappa_n(\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n x) = -(-\mathrm{i})^m \kappa_n(x\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n) = -\kappa_n(x) \circ \phi \ .$$

Dies liefert die Behauptung. □

Satz 1.5.6 *Für das Differential* $\kappa_* : \mathfrak{spin}(n) \to \mathrm{End}(\Delta_n)$ *der Spin-Darstellung* $\kappa : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{GL}(\Delta_n)$ *gilt*

$$\kappa_* = \kappa_n\big|_{\mathfrak{spin}(n)} .$$

Insbesondere ist

$$\kappa_*(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l)\mathsf{w} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l \cdot \mathsf{w} .$$

für $1 \leq k < l \leq n$ *und* $\mathsf{w} \in \Delta_n$.

Beweis: Sei $v \in \mathfrak{spin}(n)$. Da κ_n linear ist, gilt dann

$$\kappa_*(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\kappa_n(\exp(tv))\bigg|_{t=0} = \kappa_n\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tv)\bigg|_{t=0}\right) = \kappa_n(v) .$$

□

Als Nächstes wollen wir die Spin-Darstellung κ als eine so genannte unitäre Darstellung beschreiben. Das heißt, wir werden auf Δ_n ein Skalarprodukt derart angeben, dass $\kappa(u)$ für jedes $u \in \mathrm{Spin}(n)$ unitär ist.

Bezeichne $\langle\ ,\ \rangle_2$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$. Wir definieren durch

$$\langle \mathbf{a}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_m \rangle := \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1\rangle_2 \cdots \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m\rangle_2$$

ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf Δ_n, wobei $n = 2m$ oder $n = 2m+1$. Da $\{\mathbf{a}(1), \mathbf{a}(-1)\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$ ist, bilden die Spinoren

$$\mathsf{w}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) := \mathbf{a}(\varepsilon_1) \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}(\varepsilon_m) , \quad \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m = \pm 1 ,$$

eine Orthonormalbasis von Δ_n. Sei $\mathrm{SU}(\Delta_n)$ die Menge aller $A \in \mathrm{GL}(\Delta_n)$ mit

$$\langle A\mathsf{w}_1, A\mathsf{w}_2\rangle = \langle \mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2\rangle \quad \text{für alle} \quad \mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2 \in \Delta_n$$

und $\det(A) = 1$. Dann ist $\mathrm{SU}(\Delta_n)$ eine Liesche Untergruppe von $\mathrm{GL}(\Delta_n)$ und die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(\Delta_n)$ von $\mathrm{SU}(\Delta_n)$ besteht aus allen $X \in \mathrm{End}(\Delta_n)$ mit

$$\langle X\mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2\rangle + \langle \mathsf{w}_1, X\mathsf{w}_2\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad \mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2 \in \Delta_n$$

und $\mathrm{Tr}(X) = 0$. Ist $n = 2m$, so wird Δ_n^+ von allen $\mathsf{w}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ mit $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m = 1$ und Δ_n^- von allen $\mathsf{w}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ mit $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m = -1$ erzeugt. Folglich ist in diesem Fall die Aufspaltung $\Delta_n = \Delta_n^+ \oplus \Delta_n^-$ orthogonal.

Satz 1.5.7 *Die Spin-Darstellung* $\kappa : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{GL}(\Delta_n)$ *ist unitär. Genauer gilt* $\kappa(u) \in \mathrm{SU}(\Delta_n)$ *für alle* $u \in \mathrm{Spin}(n)$.

Zum Beweis des letzten Satzes benutzen wir

Satz 1.5.8 *Sei* G *eine Liesche Untergruppe von* $\mathcal{A}^*$, *sei* H *eine zusammenhängende Liesche Untergruppe von* $\mathcal{B}^*$ *und seien* $\mathfrak{g}$ *und* $\mathfrak{h}$ *die Lie-Algebren von* G *bzw.* H. *Ist dann* $\lambda : G \to \mathcal{B}^*$ *ein glatter Gruppenhomomorphismus und gilt* $\lambda_*(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h}$ *(bzw.* $\lambda_*(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$*), so ist* $\lambda(G) \subset H$ *(bzw.* $\lambda(G) \subset H$*).*

Beweis: Siehe [2]. □

Beweis von Satz 1.5.7: Nach Satz 1.5.8 genügt es zu zeigen, dass

$$\kappa_*(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l) \in \mathfrak{su}(\Delta_n) \quad \text{für} \quad 1 \leq k < l \leq n . \tag{1.5.1}$$

Wir verifizieren hier nur, dass die letzte Beziehung für $n = 3$ und $n = 4$ gilt. Den allgemeinen Fall behandelt man analog. Seien E, U, V, T wieder wie im Beweis von Satz 1.1.6 und sei

$$W := \mathrm{i}T = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} .$$

Dann ist

$$\kappa_3(\mathbf{e}_1) = U \ , \quad \kappa_3(\mathbf{e}_2) = V \ , \quad \kappa_3(\mathbf{e}_3) = W \ .$$

Mit $U^2 = V^2 = W^2 = -E$ und $UV = W$ erhalten wir

$$\kappa_3(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = W \ , \quad \kappa_3(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) = -V \ , \quad \kappa_3(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = U \ .$$

Aufgrund von Satz 1.5.6 und der Tatsache, dass $\{U, V, W\}$ eine Basis von $\mathfrak{su}(2)$ ist, ist damit (1.5.1) für $n = 3$ gezeigt.

Weiter haben wir

$$\kappa_4(\mathbf{e}_1) = U \otimes E \ , \quad \kappa_4(\mathbf{e}_2) = V \otimes E \ , \quad \kappa_4(\mathbf{e}_3) = T \otimes U \ , \quad \kappa_4(\mathbf{e}_4) = T \otimes V \ .$$

Außerdem ist

$$U\mathbf{a}(\varepsilon) = \mathrm{i}\,\mathbf{a}(-\varepsilon) \ , \quad V\mathbf{a}(\varepsilon) = \varepsilon\,\mathbf{a}(-\varepsilon) \ , \quad T\mathbf{a}(\varepsilon) = \varepsilon\,\mathbf{a}(\varepsilon) \ .$$

Damit sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
\kappa_4(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) &= (\mathrm{i}T \otimes E)\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \mathrm{i}\varepsilon_1\,\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \ , \\
\kappa_4(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) &= (\mathrm{i}V \otimes U)\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = -\varepsilon_1\,\mathsf{w}(-\varepsilon_1,-\varepsilon_2) \ , \\
\kappa_4(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4)\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) &= (\mathrm{i}V \otimes V)\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \mathrm{i}\varepsilon_1\varepsilon_2\,\mathsf{w}(-\varepsilon_1,-\varepsilon_2) \ , \\
\kappa_4(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) &= (-\mathrm{i}U \otimes U)\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \mathrm{i}\,\mathsf{w}(-\varepsilon_1,-\varepsilon_2) \ , \\
\kappa_4(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4)\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) &= (-\mathrm{i}U \otimes V)\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \varepsilon_2\,\mathsf{w}(-\varepsilon_1,-\varepsilon_2) \ , \\
\kappa_4(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4)\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) &= (E \otimes \mathrm{i}T)\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \mathrm{i}\varepsilon_2\,\mathsf{w}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \ .
\end{aligned}$$

In der Basis $\{\mathsf{w}(1,1), \mathsf{w}(-1,-1), \mathsf{w}(1,-1), \mathsf{w}(-1,1)\}$ ist folglich

$$\begin{aligned}
&\kappa_4(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}, \quad \kappa_4(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}, \quad \kappa_4(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & -W \end{pmatrix}, \\
&\kappa_4(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}, \quad \kappa_4(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} -V & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}, \quad \kappa_4(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & -U \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Beziehung (1.5.1) auch für $n = 4$ gezeigt. □

Aus den letzten Überlegungen ergibt sich

Folgerung 1.5.9 (i) *Die Gruppe* Spin(3) *ist zu* SU(2) *isomorph.*

(ii) *Die Gruppe* Spin(4) *ist zu* SU(2) × SU(2) *isomorph.*

Beweis: (i) Wir betrachten den Gruppenhomomorphismus $\kappa : \mathrm{Spin}(3) \to \mathrm{GL}(\Delta_3)$. Nach Satz 1.4.4 ist κ injektiv. Außerdem erhalten wir aus dem Beweis von Satz 1.5.7, dass

$$\kappa_*(\mathfrak{spin}(3)) = \mathfrak{su}(\Delta_3) \ .$$

Mit Satz 1.5.8 folgt, dass

$$\kappa(\mathrm{Spin}(3)) = \mathrm{SU}(\Delta_3) = \mathrm{SU}(2) \ .$$

(ii) Nach dem Beweis von Satz 1.5.7 ist

$$\kappa_*(\mathfrak{spin}(4)) = \mathfrak{su}(\Delta_4^+) \oplus \mathfrak{su}(\Delta_4^-) \ .$$

Hieraus leitet man analog zu (i) ab, dass

$$\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{SU}(\Delta_4^+) \times \mathrm{SU}(\Delta_4^-) \cong \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \ .$$

□

Satz 1.5.10 *Die Clifford-Multiplikation ist schiefhermitesch. Das heißt, für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2 \in \Delta_n$ gilt*

$$\langle x \cdot \mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2 \rangle = -\langle \mathsf{w}_1, x \cdot \mathsf{w}_2 \rangle \ .$$

Beweis: Die Matrizen U und V sind schiefhermitesch, während T hermitesch ist. Das liefert die Behauptung. □

1.6 Reelle und quaternionische Strukturen auf dem Raum der komplexen Spinoren

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum.

Definition 1.6.1 *Eine* **reelle** *(bzw.* **quaternionische***)* **Struktur** *auf $\mathcal{V}$ ist eine konjugiert lineare Abbildung $J : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ mit $J^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$ (bzw. $J^2 = -\mathrm{id}_{\mathcal{V}}$).*

Lemma 1.6.2 *Sei J eine reelle Struktur auf $\mathcal{V}$ und sei $\mathcal{V}_+$ der Eigenraum von J zum Eigenwert 1. Dann ist*

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_+ \oplus \mathrm{i}\, \mathcal{V}_+ \ .$$

Das heißt, $\mathcal{V}$ ist die Komplexifizierung von $\mathcal{V}_+$.

Beweis: Sei $\mathcal{V}_-$ der Eigenraum von J zum Eigenwert -1. Wegen $J^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$ ist

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_- \ .$$

Da J konjugiert linear ist, gilt $J(\mathrm{i}\, \mathsf{v}) = -\mathrm{i}\, J(\mathsf{v})$ für alle $\mathsf{v} \in \mathcal{V}$. Folglich ist $\mathcal{V}_- = \mathrm{i}\, \mathcal{V}_+$. □

Jede reelle Struktur auf $\mathcal{V}$ kann folgendermaßen konstruiert werden. Sei $\{\mathsf{v}_1, \ldots, \mathsf{v}_m\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$ über $\mathbb{C}$. Dann ist die durch

$$J\left(\sum_{k=1}^{m} z_k \mathsf{v}_k\right) := \sum_{k=1}^{m} \bar{z}_k \mathsf{v}_k \quad \text{für} \quad z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$$

definierte Abbildung $J : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine reelle Struktur auf $\mathcal{V}$.

Ist J eine quaternionische Struktur auf $\mathcal{V}$, so wird $\mathcal{V}$ durch

$$(z_1 + \mathrm{j}\, z_2)\mathsf{v} := z_1 \mathsf{v} + J(z_2 \mathsf{v}) \quad \text{für} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

ein $\mathbb{H}$-Modul. Demzufolge besitzt ein komplexer Vektorraum nur dann eine quaternionische Struktur, wenn seine komplexe Dimension gerade ist.

Wir definieren auf $\Delta_3 = \mathbb{C}^2$ durch

$$J_{\mathrm{r}}(z_1, z_2) := (\bar{z}_1, -\bar{z}_2) \quad \text{und} \quad J_{\mathrm{q}}(z_1, z_2) := (-\bar{z}_2, \bar{z}_1)$$

eine reelle Struktur J_{r} und eine quaternionische Struktur J_{q}.

Lemma 1.6.3 (i) *Für alle $\mathsf{w} \in \Delta_3$ ist*

$$J_{\mathrm{r}}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathsf{w}) = -\mathbf{e}_1 \cdot J_{\mathrm{r}}(\mathsf{w}) \ , \quad J_{\mathrm{r}}(\mathbf{e}_2 \cdot \mathsf{w}) = -\mathbf{e}_2 \cdot J_{\mathrm{r}}(\mathsf{w}) \ , \quad J_{\mathrm{r}}(\mathbf{e}_3 \cdot \mathsf{w}) = \mathbf{e}_3 \cdot J_{\mathrm{r}}(\mathsf{w}) \ .$$

(ii) *Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ und alle $\mathsf{w} \in \Delta_3$ gilt*

$$J_{\mathrm{q}}(x \cdot \mathsf{w}) = x \cdot J_{\mathrm{q}}(\mathsf{w}) \ .$$

Beweis: Für U, V, T wie im Beweis von Satz 1.1.6 haben wir

$$J_{\mathrm{r}}U = -UJ_{\mathrm{r}}\ , \quad J_{\mathrm{r}}V = -VJ_{\mathrm{r}}\ , \quad J_{\mathrm{r}}T = -TJ_{\mathrm{r}} \tag{1.6.1}$$

und

$$J_{\mathrm{q}}U = UJ_{\mathrm{q}}\ , \quad J_{\mathrm{q}}V = VJ_{\mathrm{q}}\ , \quad J_{\mathrm{q}}T = -TJ_{\mathrm{q}}\ . \tag{1.6.2}$$

Das impliziert die Behauptungen. ☐

Wir definieren jetzt $J_n : \Delta_n \to \Delta_n$ für $n \geq 2$ wie folgt. Es sei

$$\begin{aligned}
J_n &:= \underbrace{(J_{\mathrm{q}} \otimes J_{\mathrm{r}}) \otimes \cdots \otimes (J_{\mathrm{q}} \otimes J_{\mathrm{r}})}_{2m} && \text{für} \quad n = 8m \text{ oder } n = 8m+1\ ,\\
J_n &:= J_{\mathrm{q}} \otimes \underbrace{(J_{\mathrm{r}} \otimes J_{\mathrm{q}}) \otimes \cdots \otimes (J_{\mathrm{r}} \otimes J_{\mathrm{q}})}_{2m} && \text{für} \quad n = 8m+2 \text{ oder } n = 8m+3\ ,\\
J_n &:= \underbrace{(J_{\mathrm{q}} \otimes J_{\mathrm{r}}) \otimes \cdots \otimes (J_{\mathrm{q}} \otimes J_{\mathrm{r}})}_{2m+1} && \text{für} \quad n = 8m+4 \text{ oder } n = 8m+5\ ,\\
J_n &:= J_{\mathrm{q}} \otimes \underbrace{(J_{\mathrm{r}} \otimes J_{\mathrm{q}}) \otimes \cdots \otimes (J_{\mathrm{r}} \otimes J_{\mathrm{q}})}_{2m+1} && \text{für} \quad n = 8m+6 \text{ oder } n = 8m+7
\end{aligned}$$

mit einer ganzen Zahl m.

Satz 1.6.4 (i) *In den Fällen $n = 8m$, $n = 8m+1$, $n = 8m+6$ und $n = 8m+7$ ist J_n eine reelle Struktur auf Δ_n. Andernfalls ist J_n eine quaternionische Struktur.*

(ii) *Ist $n = 8m$, $n = 8m+1$, $n = 8m+4$ oder $n = 8m+5$, so gilt*

$$J_n(x \cdot \mathsf{w}) = -x \cdot J_n(\mathsf{w})$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\mathsf{w} \in \Delta_n$. Andernfalls ist

$$J_n(x \cdot \mathsf{w}) = x \cdot J_n(\mathsf{w})$$

(iii) *Die Abbildung J_n ist* $\mathrm{Spin}(n)$*-äquivariant, d.h.*

$$J_n \circ \kappa(u) = \kappa(u) \circ J_n$$

für alle $u \in \mathrm{Spin}(n)$.

Beweis: Man rechnet das mit Hilfe der Vertauschungsrelationen (1.6.1) und (1.6.2) direkt nach. Dabei genügt es für (iii) zu zeigen, dass $J_n \circ \kappa_*(v) = \kappa_*(v) \circ J_n$ für alle $v \in \mathfrak{spin}(n)$. ☐

Für gerades n können wir wieder die Involution $\phi = (-\mathrm{i})^{n/2}\kappa(\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n) : \Delta_n \to \Delta_n$ betrachten.

Lemma 1.6.5 (i) *Ist $n = 8m$ oder $n = 8m+4$, so gilt $J_n \circ \phi = \phi \circ J_n$.*

(ii) *Ist $n = 8m+2$ oder $n = 8m+6$, so gilt $J_n \circ \phi = -\phi \circ J_n$.*

Beweis: Nach Satz 1.6.4 kommutiert oder antikommutiert J_n mit der Clifford-Multiplikation. Demnach haben wir

$$\begin{aligned}
J_n \circ \kappa(\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n) &= J_n \circ \kappa_n(\mathbf{e}_1) \circ \cdots \circ \kappa_n(\mathbf{e}_n)\\
&= \kappa_n(\mathbf{e}_1) \circ \cdots \circ \kappa_n(\mathbf{e}_n) \circ J_n = \kappa(\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n) \circ J_n\ .
\end{aligned}$$

In den Fällen $n = 8m$ und $n = 8m+4$ ist $(-\mathrm{i})^{n/2} = \pm 1$. Dagegen ist $(-\mathrm{i})^{n/2} = \pm\mathrm{i}$ für $n = 8m+2$ oder $n = 8m+6$. Da J_n konjugiert linear ist, folgen die Behauptungen. ☐

Definition 1.6.6 (i) *Ein Spinor* $\mathsf{w} \in \Delta_n$ *heißt* **Majorana-Spinor** $:\Longleftrightarrow$ J_n *ist eine reelle Struktur und* $J_n(\mathsf{w}) = \mathsf{w}$.

(ii) *Ein Majorana-Spinor heißt* **Majorana-Weyl-Spinor** $:\Longleftrightarrow$ n *ist gerade und* $\phi(\mathsf{w}) = \pm\mathsf{w}$.

Nach Satz 1.6.4 existieren Majorana-Spinoren, falls $n = 8m$, $n = 8m+1$, $n = 8m+6$ oder $n = 8m+7$ ist J_n. Weiter liefert Lemma 1.6.5, dass nichttriviale Majorana-Weyl-Spinoren dann und nur dann existieren, wenn n ein Vielfaches von 8 ist.

2 Der Dirac-Operator

2.1 Spin-Strukturen

Alle im Folgenden betrachteten Mannigfaltigkeiten und Abbildungen seien glatt, also von der Klasse C^∞. Sei G eine Liesche Untergruppe von $\mathcal{A}^*$, wobei $\mathcal{A}$ wieder eine endlich-dimensionale assoziative Algebra mit 1 ist.

Definition 2.1.1 *Sei P eine Mannigfaltigkeit.*

(i) *Eine* **Linkswirkung** *(bzw.* **Rechtswirkung***) von G auf P ist eine Abbildung*

$$(g,p) \in G \times P \mapsto gp \in P \qquad (\textit{bzw. } (p,g) \in P \times G \mapsto pg \in P)$$

mit den folgenden beiden Eigenschaften.

(1) *Für alle $p \in P$ ist $1p = p$ (bzw. $p1 = p$).*

(2) *Für alle $g, h \in G$ und $p \in P$ ist $g(hp) = (gh)p$ (bzw. $(pg)h = p(gh)$).*

Man sagt dann auch, dass G **von links** *(bzw.* **von rechts***) auf P* **wirkt**. *Die Abbildungen $L_g : p \in P \mapsto gp \in P$ (bzw. $R_g : p \in P \mapsto pg \in P$) für $g \in G$ heißen* **Linkstranslationen** *(bzw.* **Rechtstranslationen***).*

(ii) *Eine Linkswirkung (bzw. Rechtswirkung) von G auf P heißt* **frei** $:\Longleftrightarrow$ *Gilt $gp = p$ (bzw. $pg = p$) für ein $p \in P$ und ein $g \in G$, so ist $g = 1$. Sie heißt* **transitiv** $:\Longleftrightarrow$ *Für alle $p, q \in P$ existiert ein $g \in G$ mit $gp = q$ (bzw. $pg = q$). Sie heißt* **einfach transitiv** $:\Longleftrightarrow$ *Die Wirkung ist sowohl einfach als auch transitiv.*

Beispiel 2.1.2 Sei $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und sei $P(\mathcal{V})$ die Mannigfaltigkeit aller geordneten Basen von $\mathcal{V}$. Dann wirkt die Gruppe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ wie folgt von rechts auf $P(\mathcal{V})$. Ist $p = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in P(\mathcal{V})$ und ist $A = (A_{kl})_{k,l=1,\ldots,n} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, so sei

$$pA = \left(\sum_{k=1}^n A_{k1}\mathbf{a}_k, \ldots, \sum_{k=1}^n A_{kn}\mathbf{a}_k \right). \tag{2.1.1}$$

Offensichtlich gilt $pE_n = p$. Ist auch $B = (B_{kl})_{k,l=1,\ldots,n} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, so haben wir

$$\begin{aligned}(pA)B &= \left(\sum_{l=1}^n B_{l1} \sum_{k=1}^n A_{kl}\mathbf{a}_k, \ldots, \sum_{l=1}^n B_{ln} \sum_{k=1}^n A_{kl}\mathbf{a}_k \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n A_{kl}B_{l1}\mathbf{a}_k, \ldots, \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n A_{kl}B_{ln}\mathbf{a}_k \right) = p(AB) .\end{aligned}$$

Also ist durch (2.1.1) tatsächlich eine Rechtswirkung definiert. Wie man leicht sieht, ist diese Wirkung einfach transitiv. □

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Definition 2.1.3 *Ein G-**Hauptfaserbündel** über M besteht aus einer Mannigfaltigkeit P, einer Rechtswirkung von G auf P und einer Abbildung $\pi_P : P \to M$ mit folgenden Eigenschaften.*

(1) *π_P ist surjektiv.*

(2) *G wirkt frei auf P.*

(3) *Für $p, q \in P$ gilt $\pi_P(p) = \pi_P(q)$ genau dann, wenn es ein $g \in G$ mit $pg = q$ gibt.*

(4) *Zu jedem $x \in M$ existieren eine offene Umgebung $U \subset M$ von x und eine Abbildung $\mathsf{s} : U \to P$ mit $\pi_P \circ \mathsf{s} = \mathrm{id}_U$.*

Nach (2) und (3) wirkt G für alle $x \in M$ einfach transitiv auf $P_x := \pi_P^{-1}(\{x\})$. Eine Abbildung s wie in Bedingung (4) heißt ein (**lokaler**) **Schnitt** des G-Hauptfaserbündels.

Definition 2.1.4 *Seien P und Q zwei G-Hauptfaserbündel über M.*

(i) *Eine Abbildung $\Phi : P \to Q$ heißt **Hauptfaserbündelisomorphismus** $:\Longleftrightarrow$ Φ besitzt die folgenden beiden Eigenschaften.*

   (1) *$\pi_Q \circ \Phi = \pi_P$.*

   (2) *Für alle $p \in P$ und $g \in G$ ist $\Phi(pg) = \Phi(p)g$.*

(ii) *Die Hauptfaserbündel P und Q heißen **isomorph** $:\Longleftrightarrow$ Es existiert ein Hauptfaserbündelisomorphismus $\Phi : P \to Q$.*

Man überprüft leicht, dass jeder Hauptfaserbündelisomorphismus Φ invertierbar ist und dass die inverse Abbildung Φ^{-1} ebenfalls ein Hauptfaserbündelisomorphismus ist.

Beispiel 2.1.5 Die Produktmannigfaltigkeit $P = M \times G$ ist mit der durch

$$(x, g)h := (x, gh) \quad \text{für} \quad x \in M \text{ und } g, h \in G$$

definierten Rechtswirkung und der Projektion $\pi_P = \mathrm{pr}_1 : P \to M$ auf die erste Komponente ein G-Hauptfaserbündel über M. Dieses Hauptfaserbündel heißt das **triviale** G-Hauptfaserbündel über M. Durch $\mathsf{s}(x) := (x, 1)$ ist ein globaler Schnitt $\mathsf{s} : M \to P$ definiert. □

Lemma 2.1.6 *Ist P ein G-Hauptfaserbündel über M und existiert ein globaler Schnitt $\mathsf{s} : M \to P$, so ist P zum trivialen G-Hauptfaserbündel $M \times G$ isomorph.*

Beweis: Die durch

$$\Phi(x, g) := \mathsf{s}(x)g \quad \text{für} \quad x \in M \text{ und } g \in G$$

definierte Abbildung $\Phi : M \times G \to P$ ist ein Hauptfaserbündelisomorphismus. □

Beispiel 2.1.7 Sei $\mathbf{GL}(M)_x$ für $x \in M$ die Mannigfaltigkeit aller geordneten Basen des Tangentialraumes T_xM und sei $\mathbf{GL}(M)$ die disjunkte Vereinigung aller $\mathbf{GL}(M)_x$,

$$\mathbf{GL}(M) = \bigcup_{x \in M} \mathbf{GL}(M)_x \, .$$

Die in Beispiel 2.1.2 angegebene Wirkung von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ auf $\mathbf{GL}(M)_x$ induziert eine Rechtswirkung von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ auf $\mathbf{GL}(M)$. Sei $\pi_{\mathbf{GL}(M)} : \mathbf{GL}(M) \to M$ dadurch bestimmt, dass

$$\pi_{\mathbf{GL}(M)}^{-1}(\{x\}) = \mathbf{GL}(M)_x \quad \text{für alle} \quad x \in M \, .$$

Ist (U, φ) eine Karte von M, so ist das kanonische Reper $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ zu φ ein Schnitt von $\mathbf{GL}(M)$. Durch die Forderung, dass alle derartigen Schnitte glatt sind, verleihen wir $\mathbf{GL}(M)$ die Struktur einer Mannigfaltigkeit. Insgesamt haben wir damit $\mathbf{GL}(M)$ als ein $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-Hauptfaserbündel über M beschrieben. Dieses Hauptfaserbündel wird das **Reperbündel** von M genannt. □

Für die weiteren Betrachtungen sind gewisse Unterbündel des Reperbündels wesentlich. Um diese beschreiben zu können, erinnern wir an den folgenden Begriff.

Definition 2.1.8 *Ein* $(2,0)$*-Tensorfeld* $\mathbf{g}$ *auf* M*, d.h. eine Familie* $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_x)_{x\in M}$ *von bilinearen Abbildungen* $\mathbf{g}_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$*, heißt* **Riemannsche Metrik** $:\Longleftrightarrow$ *Für alle* $x \in M$ *ist* $\mathbf{g}_x$ *symmetrisch und positiv definit. Das Paar* $(M,\mathbf{g})$ *wird dann eine* **Riemannsche Mannigfaltigkeit** *genannt.*

Beispiel 2.1.9 Sei jetzt M mit einer Riemannschen Metrik $\mathbf{g}$ versehen. Bezeichne $\mathbf{O}(M)_x$ für $x \in M$ die Mannigfaltigkeit aller geordneten Orthonormalbasen von T_xM und sei $\mathbf{O}(M)$ die disjunkte Vereinigung aller $\mathbf{O}(M)_x$,

$$\mathbf{O}(M) = \bigcup_{x\in M} \mathbf{O}(M)_x \ .$$

Dann ist $\mathbf{O}(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbf{GL}(M)$. Indem wir die Rechtswirkung $\mathbf{GL}(M) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbf{GL}(M)$ auf $\mathbf{O}(M) \times \mathrm{O}(n)$ einschränken, erhalten wir eine Rechtswirkung von $\mathrm{O}(n)$ auf $\mathbf{O}(M)$. Mit dieser Rechtswirkung ist $\mathbf{O}(M)$ ein $\mathrm{O}(n)$-Hauptfaserbündel über M. Ist M orientiert, so haben wir analog das $\mathrm{SO}(n)$-Hauptfaserbündel

$$\mathbf{SO}(M) = \bigcup_{x\in M} \mathbf{SO}(M)_x \ .$$

Dabei ist $\mathbf{SO}(M)_x$ die Mannigfaltigkeit aller geordneten Orthonormalbasen von T_xM in der fixierten Orientierung. □

Im Weiteren sei $(M,\mathbf{g})$ eine n-dimensionale, orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit. Bezeichne $\rho : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ wieder die in Abschnitt 1.2 beschriebene Überlagerung.

Definition 2.1.10 (i) *Eine* **Spin-Struktur** *von* $(M,\mathbf{g})$ *ist ein Paar* (P,F) *bestehend aus einem* $\mathrm{Spin}(n)$*-Hauptfaserbündel* P *und einer Abbildung* $F : P \to \mathbf{SO}(M)$ *derart, dass*

(1) $\pi_{\mathbf{SO}(m)} \circ F = \pi_P$ *und*

(2) $F(pu) = F(p)\rho(u)$ *für alle* $p \in P$ *und* $u \in \mathrm{Spin}(n)$*.*

(ii) *Zwei Spin-Strukturen* (P_1,F_1) *und* (P_2,F_2) *von* $(M,\mathbf{g})$ *heißen isomorph* $:\Longleftrightarrow$ *Es existiert ein Hauptfaserbündelisomorphismus* $\Phi : P_1 \to P_2$ *mit* $F_2 \circ \Phi = F_1$*.*

Beispiel 2.1.11 Sei $T_x\mathbb{R}^n$ für $x \in \mathbb{R}^n$ wie üblich mit $\mathbb{R}^n$ identifiziert und sei $\mathbb{R}^n$ mit der **Euklidischen Metrik** $\mathbf{g}_\mathrm{E}$, d.h. der durch

$$(\mathbf{g}_\mathrm{E})_x(\mathbf{v},\mathbf{w}) := \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle \quad \text{für} \quad \mathbf{v},\mathbf{w} \in T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$$

definierten Riemannschen Metrik versehen. Dann ist durch

$$\mathsf{s}(x) := (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ein globaler Schnitt $s : \mathbb{R}^n \to \mathbf{SO}(\mathbb{R}^n)$ des $\mathrm{SO}(n)$-Hauptfaserbündels $\mathbf{SO}(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Dabei bezeichnet $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ wie bisher die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Wir setzen $P := \mathbb{R}^n \times \mathrm{Spin}(n)$ und definieren $F : P \to \mathbf{SO}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$F(x,u) := \mathsf{s}(x)\rho(u) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ und } u \in \mathrm{Spin}(n) \ .$$

Wie man sofort sieht, ist (P,F) eine Spin-Struktur von $(\mathbb{R}^n,\mathbf{g}_\mathrm{E})$. □

Beispiel 2.1.12 Sei die Einheitssphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit der Standardmetrik $\mathbf{g}_{\mathrm{st}}$, also der durch

$$(\mathbf{g}_{\mathrm{st}})_x(\mathbf{v},\mathbf{w}) := \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle \quad \text{für} \quad \mathbf{v},\mathbf{w} \in T_xS^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

definierten Riemannschen Metrik versehen. Wir zeigen zunächst, dass das Hauptfaserbündel $\mathbf{SO}(S^n)$ mit $\mathrm{SO}(n+1)$ identifiziert werden kann. Dazu betten wir die Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ durch

$$A \in \mathrm{SO}(n) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(n+1)$$

in $\mathrm{SO}(n+1)$ ein. Dies induziert eine Rechtswirkung von $\mathrm{SO}(n)$ auf $\mathrm{SO}(n+1)$. Zusammen mit der durch

$$\pi_{\mathrm{SO}(n+1)}(B) := B\mathbf{e}_{n+1} \quad \text{für} \quad B \in \mathrm{SO}(n+1)$$

definierten Projektion $\pi_{\mathrm{SO}(n+1)} : \mathrm{SO}(n+1) \to S^n$ erhält $\mathrm{SO}(n+1)$ die Struktur eines $\mathrm{SO}(n)$-Hauptfaserbündels über S^n. Wir definieren $\Phi : \mathrm{SO}(n+1) \to \mathbf{SO}(S^n)$ durch

$$\Phi(B) := (B\mathbf{e}_1, \ldots, B\mathbf{e}_n) .$$

Dann ist Φ ein Hauptfaserbündelisomorphismus. Aus

$$T_xS^n = \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle \mathbf{v}, x\rangle = 0\right\} \quad \text{für alle} \quad x \in S^n$$

folgt nämlich, dass $\pi_{\mathbf{SO}(S^n)} \circ \Phi = \pi_{\mathrm{SO}(n+1)}$. Für $A = (A_{kl})_{k,l=1,\ldots,n} \in \mathrm{SO}(n)$ und $B \in \mathrm{SO}(n+1)$ haben wir außerdem

$$\begin{aligned}
\Phi(BA) &= (BA\mathbf{e}_1, \ldots, BA\mathbf{e}_n) \\
&= \left(B\sum_{k=1}^n A_{k1}\mathbf{e}_k, \ldots, B\sum_{k=1}^n A_{kn}\mathbf{e}_k\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^n A_{k1}B\mathbf{e}_k, \ldots, \sum_{k=1}^n A_{kn}B\mathbf{e}_k\right) \\
&= \Phi(B)A .
\end{aligned}$$

Indem man benutzt, dass die Einschränkung von $\rho : \mathrm{Spin}(n+1) \to \mathrm{SO}(n+1)$ auf $\mathrm{Spin}(n)$ mit der Überlagerung $\rho : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ übereinstimmt, überprüft man nun leicht, dass $\mathrm{Spin}(n+1)$ zusammen mit der Abbildung $\Phi \circ \rho : \mathrm{Spin}(n+1) \to \mathbf{SO}(S^n)$ eine Spin-Struktur von $(S^n, \mathbf{g}_{\mathrm{st}})$ ist. □

Nicht jede orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit $(M, \mathbf{g})$ besitzt eine Spin-Struktur. Darüberhinaus müssen diese im Falle ihrer Existenz nicht eindeutig bestimmt sein. Genauer hat man folgendes Resultat.

Satz 2.1.13 *Eine orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit $(M, \mathbf{g})$ besitzt genau dann eine Spin-Struktur, wenn die 2. Stiefel-Whitney-Klasse $w_2(M) \in H^2(M;\mathbb{Z}_2)$ verschwindet. In diesem Fall wird die Menge aller Isomorphieklassen von Spin-Strukturen von $(M, \mathbf{g})$ durch die 1. Kohomologiegruppe $H^1(M;\mathbb{Z}_2)$ von M mit Werten in $\mathbb{Z}_2$ klassifiziert.*

Beweis: Für einen Beweis verweisen wir auf [3]. □

Bemerkung 2.1.14 In den Beispielen 2.1.11 und 2.1.12 haben wir Spin-Strukturen von $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g}_{\mathrm{E}})$ und $(S^n, \mathbf{g}_{\mathrm{st}})$ angegeben. Da $H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{Z}_2)$ und $H^1(S^n;\mathbb{Z}_2)$ trivial sind, besitzen $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g}_{\mathrm{E}})$ und $(S^n, \mathbf{g}_{\mathrm{st}})$ nach Satz 2.1.13 bis auf Isomorphie genau eine Spin-Struktur. □

2.2 Das Spinorbündel

Definition 2.2.1 *Ein* **reelles** *(bzw.* **komplexes***)* **Vektorbündel** *über M vom* **Rang** *m besteht aus einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{E}$ und einer Abbildung $\pi_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to M$ mit folgenden Eigenschaften.*

(1) *$\pi_{\mathcal{E}}$ ist surjektiv.*

(2) *Für jedes $x \in M$ ist $\mathcal{E}_x := \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(\{x\})$ ein m-dimensionaler reeller (bzw. komplexer) Vektorraum.*

(3) *Zu jedem $x \in M$ existieren eine offene Umgebung $U \subset M$ von x und Abbildungen $\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_m : U \to \mathcal{E}$ derart, dass*

  (a) *$\pi_{\mathcal{E}} \circ \mathsf{e}_j = \mathrm{id}_U$ für $j = 1, \ldots, m$ und*

  (b) *$\{\mathsf{e}_1(x), \ldots, \mathsf{e}_m(x)\}$ für jedes $x \in U$ eine Basis von $\mathcal{E}_x$ ist.*

Eine Abbildung $\mathsf{e} : U \to \mathcal{E}$ mit $\pi_{\mathcal{E}} \circ \mathsf{e} = \mathrm{id}_U$, wobei $U \subset M$ offen ist, heißt ein (**lokaler**) **Schnitt** des Vektorbündels $\mathcal{E}$. Den Raum aller dieser Schnitte bezeichnen wir mit $\Gamma(\mathcal{E}, U)$. Außerdem setzen wir $\Gamma(\mathcal{E}) := \Gamma(\mathcal{E}, M)$. Sind $\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_m$ wie in (3), so nennt man die Abbildung $\mathsf{s} := (\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_m) : U \to \mathcal{E}^m$ ein (**lokales**) **Reper** von $\mathcal{E}$.

Definition 2.2.2 *Seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ zwei Vektorbündel über M.*

(i) *Eine Abbildung $\Psi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ heißt* **Vektorbündelhomomorphismus** *$:\Longleftrightarrow$ Ψ besitzt die folgenden beiden Eigenschaften.*

  (1) *$\pi_{\mathcal{F}} \circ \Psi = \pi_{\mathcal{E}}$.*

  (2) *Für alle $x \in M$ ist die Abbildung $\Psi_x := \Psi\big|_{\mathcal{E}_x} : \mathcal{E}_x \to \mathcal{F}_x$ linear.*

(ii) *$\Psi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ heißt* **Vektorbündelisomorphismus** *$:\Longleftrightarrow$ Für alle $x \in M$ ist Ψ_x ein Isomorphismus.*

(iii) *Die Vektorbündel $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ heißen* **isomorph** *$:\Longleftrightarrow$ Es existiert ein Vektorbündelisomorphismus $\Psi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$.*

Beispiel 2.2.3 Sei $\mathcal{V}$ ein m-dimensionaler reeller (bzw. komplexer) Vektorraum. Dann ist die Produktmannigfaltigkeit $\mathcal{E} = M \times \mathcal{V}$ mit der Projektion $\pi_{\mathcal{E}} = \mathrm{pr}_1 : \mathcal{E} \to M$ auf die erste Komponente und den Operationen

$$(x, \mathbf{v}) + (x, \mathbf{w}) := (x, \mathbf{v} + \mathbf{w})$$

und

$$z(x, \mathbf{v}) = (x, z\mathbf{v})$$

für $x \in M$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ und $z \in \mathbb{R}$ (bzw. $z \in \mathbb{C}$) ein reelles (bzw. komplexes) Vektorbündel über M vom Rang m. Solche Vektorbündel heißen **triviale** Vektorbündel. Ist $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$, so ist durch $\mathsf{s}(x) := ((x, \mathbf{a}_1), \ldots, (x, \mathbf{a}_m))$ ein globales Reper $\mathsf{s} : M \to \mathcal{E}^m$ definiert. □

Lemma 2.2.4 *Sei $\mathcal{E}$ ein reelles (bzw. komplexes) Vektorbündel über M vom Rang m und existiere ein globales Reper $\mathsf{s} : M \to \mathcal{E}^m$. Dann ist $\mathcal{E}$ zum trivialen Vektorbündel $M \times \mathbb{R}^m$ (bzw. $M \times \mathbb{C}^m$) isomorph.*

Beweis: Schreiben wir $\mathsf{s} = (\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_m)$, so definiert

$$\Psi(x, y) := \sum_{k=1}^{m} y^k \mathsf{e}_k(x)$$

für $x \in M$ und $y \in \mathbb{R}^m$ (bzw. $y \in \mathbb{C}^m$) einen Vektorbündelisomorphismus $\Psi : M \times \mathbb{R}^m \to \mathcal{E}$ (bzw. $\Psi : M \times \mathbb{C}^m \to \mathcal{E}$). □

Beispiel 2.2.5 Das Tangentialbündel TM und das Kotangentialbündel T^*M einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit sind reelle Vektorbündel vom Rang n. Das kanonische Reper $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ zu einer Karte (U, φ) von M ist eine Reper von TM, dessen Dual $\left(\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^n\right)$ eines von T^*M. □

Wir beschreiben jetzt ein Konstruktionsverfahren für Vektorbündel. Sei P ein G-Hauptfaserbündel über M und sei $\tau : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ eine Darstellung von G über einem reellen (bzw. komplexen) Vektorraum $\mathcal{V}$. Dann wirkt G durch

$$(p, \mathbf{v})g := \left(pg, \tau\left(g^{-1}\right)\mathbf{v}\right) \quad \text{für} \quad (p, \mathbf{v}) \in P \times \mathcal{V} \text{ und } g \in G$$

von rechts auf $P \times \mathcal{V}$. Wir definieren, dass $(p, \mathbf{v}) \sim (q, \mathbf{w})$ für $(p, \mathbf{v}), (q, \mathbf{w}) \in P \times \mathcal{V}$, falls es ein $g \in G$ mit $(q, \mathbf{w}) = (p, \mathbf{v})g$ gibt, und erhalten so eine Äquivalenzrelation auf $P \times \mathcal{V}$. Sei

$$P \times_\tau \mathcal{V} := (P \times \mathcal{V})/\!\sim$$

der zugehörige Faktorraum und bezeichne $[p, \mathbf{v}] \in P \times_\tau \mathcal{V}$ die Äquivalenzklasse von $(p, \mathbf{v}) \in P \times \mathcal{V}$. Sei $\pi_{P,\tau} : P \times_\tau \mathcal{V} \to M$ durch

$$\pi_{P,\tau}([p, \mathbf{v}]) := \pi_P(p)$$

definiert. Außerdem setzen wir

$$[p, \mathbf{v}] + [p, \mathbf{w}] := [p, \mathbf{v} + \mathbf{w}] \quad \text{und} \quad z[p, \mathbf{v}] := [p, z\mathbf{v}] \ ,$$

wobei wieder $z \in \mathbb{R}$ (bzw. $z \in \mathbb{C}$). Man überprüft leicht, dass diese Definitionen unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sind und dass $P \times_\tau \mathcal{V}$ auf diese Weise die Struktur eines Vektorbündels über M erhält. Ist $\mathsf{s} : U \to P$ ein Schnitt von P und ist $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$, so bilden die durch

$$\mathsf{e}_j(x) := [\mathsf{s}(x), \mathbf{a}_j]$$

definierten Abbildungen $\mathsf{e}_j : U \to P \times_\tau \mathcal{V}$, $j = 1, \ldots, m$, ein Reper von $P \times_\tau \mathcal{V}$.

Definition 2.2.6 *Das Vektorbündel $P \times_\tau \mathcal{V}$ heißt das zu P bezüglich τ* **assoziierte Vektorbündel**.

Sei im Weiteren $(M, \mathbf{g})$ wieder eine n-dimensionale, orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei (P, F) eine Spin-Struktur von $(M, \mathbf{g})$.

Beispiel 2.2.7 Sei $\imath : \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ die Inklusion. Dann ist

$$\Psi : [(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n), y] \in \mathbf{SO}(M) \times_\imath \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{j=1}^n y^j \mathbf{a}_j \in TM$$

ein kanonischer Isomorphismus vom assoziierten Vektorbündel $\mathbf{SO}(M) \times_\imath \mathbb{R}^n$ auf das Tangentialbündel TM. Wir müssen zeigen, dass Ψ korrekt definiert ist. Sei also $A = (A_{kl})_{k,l=1,\ldots,n} \in \mathrm{SO}(n)$ und sei $A^{-1} = \left(A^{kl}\right)_{k,l=1,\ldots,n}$. Dann ist

$$((\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n), y)A = \left(\left(\sum_{k=1}^n A_{k1}\mathbf{a}_k, \ldots, \sum_{k=1}^n A_{kn}\mathbf{a}_k\right), \left(\sum_{l=1}^n A^{1l}y^l, \ldots, \sum_{l=1}^n A^{nl}y^l\right)\right)$$

und

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{l=1}^n A^{jl}y^l\right)\left(\sum_{k=1}^n A_{kj}\mathbf{a}_k\right) = \sum_{k,l=1}^n \sum_{j=1}^n A_{kj}A^{jl}y^l\mathbf{a}_k = \sum_{k=1}^n y^k\mathbf{a}_k \ ,$$

was die gewünschte Aussage liefert. Wie man sofort sieht, ist

$$\mathbf{g}_x(\Psi([(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n), y_1]), \Psi([(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n), y_2])) = \langle y_1, y_2 \rangle \ ,$$

wobei $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in \mathbf{SO}(M)_x$ und $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$. □

Beispiel 2.2.8 Die Abbildung

$$[p, y] \in P \times_{\imath \circ \rho} \mathbb{R}^n \mapsto [F(p), y] \in \mathbf{SO}(M) \times_\imath \mathbb{R}^n$$

ist ein kanonischer Isomorphismus vom assoziierten Vektorbündel $P \times_{\imath\circ\rho} \mathbb{R}^n$ auf $\mathbf{SO}(M) \times_\imath \mathbb{R}^n$. Wegen

$$\left[F(pu), \rho\left(u^{-1}\right) y\right] = \left[F(p)\rho(u), \rho\left(u^{-1}\right) y\right] = [F(p), y]$$

für $p \in P$, $y \in \mathbb{R}^n$ und $u \in \mathrm{Spin}(n)$ ist die obige Abbildung korrekt definiert. Mit Beispiel 2.2.7 folgt, dass auch das Vektorbündel $P \times_{\imath\circ\rho} \mathbb{R}^n$ kanonisch isomorph zum Tangentialbündel TM ist. Ist $\mathsf{s} : U \to P$ ein Schnitt des $\mathrm{Spin}(n)$-Hauptfaserbündels P, so ist längs dieses Isomorphismus

$$F \circ \mathsf{s} = ([\mathsf{s}, \mathbf{e}_1], \ldots, [\mathsf{s}, \mathbf{e}_n]) \ .$$

□

Definition 2.2.9 *Das zu P bezüglich der Spin-Darstellung $\kappa : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{GL}(\Delta_n)$ assoziierte komplexe Vektorbündel*

$$\mathcal{S} := P \times_\kappa \Delta_n$$

heißt das **Spinorbündel** *von $(M, \mathbf{g})$ bezüglich der Spin-Struktur (P, F). Die Schnitte von $\mathcal{S}$ werden* **Spinorfelder** *genannt.*

Beispiel 2.2.10 Sei (P, F) die in Beispiel 2.1.11 angegebene Spin-Struktur von $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g}_{\mathrm{E}})$. Dann definiert

$$[(x, u), \mathsf{w}] \mapsto (x, \kappa(u)\mathsf{w})$$

für $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathrm{Spin}(n)$ und $\mathsf{w} \in \Delta_n$ einen Isomorphismus vom Spinorbündel $\mathcal{S}$ auf das triviale Bündel $\mathbb{R}^n \times \Delta_n$. □

Wir definieren wie folgt eine so genannte Fasermetrik $(\langle\ ,\ \rangle_x)_{x\in M}$ im Spinorbündel $\mathcal{S}$. Sei $\langle\ ,\ \rangle$ das in Abschnitt 1.5 konstruierte Skalarprodukt auf Δ_n. Ist $x \in M$ und sind $[p, \mathsf{w}_1], [p, \mathsf{w}_2] \in \mathcal{S}_x$, d.h. $p \in P_x$ und $\mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2 \in \Delta_n$, so setzen wir

$$\langle [p, \mathsf{w}_1], [p, \mathsf{w}_2] \rangle_x := \langle \mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2 \rangle \ .$$

Dies definiert ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle_x$ in $\mathcal{S}_x$. Ist nämlich auch $q \in P_x$, so ist $q = pu$ für ein $u \in \mathrm{Spin}(n)$ und folglich

$$[p, \mathsf{w}_i] = \left[pu, \kappa\left(u^{-1}\right) \mathsf{w}_i\right] = \left[q, \kappa\left(u^{-1}\right) \mathsf{w}_i\right] \quad \text{für} \quad i = 1, 2 \ .$$

Da κ nach Satz 1.5.7 unitär ist, gilt außerdem

$$\left\langle \kappa\left(u^{-1}\right) \mathsf{w}_1, \kappa\left(u^{-1}\right) \mathsf{w}_2 \right\rangle = \langle \mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2 \rangle \ .$$

Sind φ_1, φ_2 zwei Spinorfelder auf $U \subset M$, d.h. $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma(\mathcal{S}, U)$, so sei die Funktion $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \in C^\infty(U, \mathbb{C})$ durch

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle(x) := \langle \varphi_1(x), \varphi_2(x) \rangle_x$$

bestimmt.

Wir benutzen die Clifford-Multiplikation $\mu : \mathbb{R}^n \otimes \Delta_n \to \Delta_n$ und Beispiel 2.2.8, um eine Clifford-Multiplikation auf Bündelebene zu erklären.

Definition 2.2.11 *Die* **Clifford-Multiplikation** *$\mu_x : T_xM \otimes \mathcal{S}_x \to \mathcal{S}_x$ für $x \in M$ ist durch*

$$\mu_x([p, y] \otimes [p, \mathsf{w}]) := [p, \mu(y \otimes \mathsf{w})]$$

definiert, wobei $p \in P_x$, $[p, y] \in P \times_{\imath\circ\rho} \mathbb{R}^n \cong TM$ und $[p, \mathsf{w}] \in \mathcal{S}$. Ist X ein Vektorfeld und φ ein Spinorfeld auf $U \subset M$, d.h. $X \in \Gamma(TM, U)$ und $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S}, U)$, so sei $X \cdot \varphi \in \Gamma(\mathcal{S}, U)$ das durch

$$(X \cdot \varphi)(x) = \mu_x(X(x) \otimes \varphi(x))$$

gegebene Spinorfeld.

Die Korrektheit der Definition von μ_x folgt aus Satz 1.5.4. Für $u \in \mathrm{Spin}(n)$ haben wir nämlich

$$\begin{aligned}\mu_x([p,y]\otimes[p,\mathsf{w}]) &= \mu_x\left(\left[pu,\rho\left(u^{-1}\right)y\right]\otimes\left[pu,\kappa\left(u^{-1}\right)\mathsf{w}\right]\right)\\ &= \left[pu,\mu\left(\left(\rho\left(u^{-1}\right)y\right)\otimes\left(\kappa\left(u^{-1}\right)\mathsf{w}\right)\right)\right]\\ &= \left[pu,\kappa\left(u^{-1}\right)\mu(y\otimes\mathsf{w})\right]\\ &= [p,\mu(y\otimes\mathsf{w})]\ .\end{aligned}$$

Sind $X_1,\ldots,X_m \in \Gamma(TM,U)$ und ist $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S},U)$, so sei

$$X_1\cdot X_2\cdot\dots\cdot X_m\cdot\varphi = X_1\cdot(X_2\cdot\dots\cdot X_m\cdot\varphi)\ .$$

Lemma 2.2.12 *Für alle $X,Y \in \Gamma(TM,U)$ und alle $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S},U)$ gilt*

$$X\cdot Y\cdot\varphi + Y\cdot X\cdot\varphi = -2\,\mathbf{g}(X,Y)\varphi\ .$$

Dabei ist die Funktion $\mathbf{g}(X,Y) \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ durch

$$\mathbf{g}(X,Y)(x) := \mathbf{g}_x(X(x),Y(x))$$

gegeben.

Beweis: Das folgt aus Lemma 1.5.2 und Beispiel 2.2.7. □

Lemma 2.2.13 *Für alle $X \in \Gamma(TM,U)$ und alle $\varphi_1,\varphi_2 \in \Gamma(\mathcal{S},U)$ ist*

$$\langle X\cdot\varphi_1,\varphi_2\rangle = -\langle\varphi_1,X\cdot\varphi_2\rangle\ .$$

Beweis: Das ist eine Konsequenz aus Satz 1.5.10. □

2.3 Kovariante Ableitungen im Spinorbündel

Sei $\mathcal{E}$ ein reelles (bzw. komplexes) Vektorbündel über M.

Definition 2.3.1 *Eine* **kovariante Ableitung** ∇ *in $\mathcal{E}$ ist eine Abbildung*

$$(X,\varphi) \in \Gamma(TM)\times\Gamma(\mathcal{E}) \mapsto \nabla_X\varphi \in \Gamma(\mathcal{E})$$

mit den folgenden Eigenschaften.

(1) *Für alle $f_1,f_2 \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, $X_1,X_2 \in \Gamma(TM)$ und $\varphi \in \Gamma(\mathcal{E})$ ist*

$$\nabla_{f_1X_1+f_2X_2}\varphi = f_1\nabla_{X_1}\varphi + f_2\nabla_{X_2}\varphi\ .$$

(2) *Für alle $X \in \Gamma(TM)$ und $\varphi_1,\varphi_2 \in \Gamma(\mathcal{E})$ ist*

$$\nabla_X(\varphi_1+\varphi_2) = \nabla_X\varphi_1 + \nabla_X\varphi_2\ .$$

(3) *Für alle $X \in \Gamma(TM)$, $h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ (bzw. $h \in C^\infty(M,\mathbb{C})$) und $\varphi \in \Gamma(\mathcal{E})$ ist*

$$\nabla_X(h\varphi) = X(h)\varphi + h\nabla_X\varphi\ .$$

Dabei ist $X(h) \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ (bzw. $X(h) \in C^\infty(M,\mathbb{C})$) die Ableitung von h in Richtung X, d.h.

$$X(h)(x) = (\mathrm{d}h)_x(X(x)) \quad \textit{für} \quad x \in M\ .$$

Eine kovariante Ableitung nennt man auch einen **Zusammenhang**. Nach Definition 2.3.1 braucht man zur Berechnung von $(\nabla_X \varphi)(x)$ nur den Tangentialvektor $X(x) \in T_x M$ und den Schnitt φ auf einer Umgebung von x zu kennen. Folglich ist $\nabla_X \varphi$ auch für lokale Schnitte φ wohldefiniert.

Beispiel 2.3.2 Sei wieder $\mathcal{V}$ irgendein Vektorraum. Durch die Bedingung

$$\varphi(x) = (x, \tilde{\varphi}(x)) \quad \text{für} \quad x \in M$$

können wir jeden Schnitt $\varphi \in \Gamma(M \times \mathcal{V})$ des trivialen Vektorbündels $M \times \mathcal{V}$ in kanonischer Weise mit einer Abbildung $\tilde{\varphi} : M \to \mathcal{V}$ identifizieren. Durch

$$\nabla_X \varphi := X(\tilde{\varphi})$$

ist dann eine kovariante Ableitung ∇ in $M \times \mathcal{V}$ definiert. $\square$

Wir benutzen die Riemannsche Metrik $\mathbf{g}$ und den Kommutator $[X, Y]$ zweier Vektorfelder X, Y, um gewisse kovariante Ableitungen im Tangentialbündel TM auszuzeichnen.

Definition 2.3.3 *Eine kovariante Ableitung ∇ in TM heißt* **metrisch** $:\Longleftrightarrow$ *Für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ gilt*

$$X(\mathbf{g}(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \; .$$

Sie heißt **torsionsfrei** $:\Longleftrightarrow$ *Für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$ ist*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \; .$$

Bekanntlich gilt

Satz 2.3.4 *Es gibt genau eine kovariante Ableitung in TM, die sowohl metrisch als auch torsionsfrei ist.* $\square$

Die durch Satz 2.3.4 bestimmte kovariante Ableitung in TM wird der **Levi-Civita-Zusammenhang** von $(M, \mathbf{g})$ genannt.

Einer metrischen kovarianten Ableitung ∇ in TM ordnen wir folgendermaßen eine auch mit ∇ bezeichnete kovariante Ableitung im Spinorbündel $\mathcal{S}$ zu. Sei $X \in \Gamma(TM)$, sei $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ und sei $\mathsf{s} : U \to P$ ein Schnitt des $\mathrm{Spin}(n)$-Hauptfaserbündels P der Spin-Struktur (P, F). Wir definieren $\varphi_{\mathsf{s}} : U \to \Delta_n$ durch

$$\varphi(x) = [\mathsf{s}(x), \varphi_{\mathsf{s}}(x)] \quad \text{für} \quad x \in U \; ,$$

schreiben $F \circ \mathsf{s} = (\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n)$ und setzen

$$\nabla_X \varphi := [\mathsf{s}, X(\varphi_{\mathsf{s}})] + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \nabla_X \mathsf{e}_j \cdot \varphi \tag{2.3.1}$$

auf U.

Bevor wir überprüfen, dass durch die Gleichung (2.3.1) tatsächlich eine kovariante Ableitung in $\mathcal{S}$ definiert ist, wollen wir diesen Ansatz durch die folgende Betrachtung motivieren. Wir nehmen für den Moment an, dass ein globaler Schnitt $\mathsf{s} : M \to P$ derart existiert, dass

$$\nabla_X Y = [\mathsf{s}, X(Y_{\mathsf{s}})]$$

für $X, Y \in \Gamma(TM)$, wobei $Y_{\mathsf{s}} : M \to \mathbb{R}^n$ dadurch bestimmt ist, dass das Vektorfeld Y längs des kanonischen Isomorphismus von TM mit $P \times_{\imath \circ \rho} \mathbb{R}^n$ mit dem Schnitt $[\mathsf{s}, Y_{\mathsf{s}}]$ korrespondiert. Zum Beispiel ist das der Fall, wenn wir den Euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g}_{\mathrm{E}})$ mit dem Levi-Civita-Zusammenhang und der in Beispiel 2.1.11 angegebenen Spin-Struktur betrachten und als s einen in der zweiten Komponente konstanten Schnitt wählen. In der beschriebenen Situation ist es naheliegend die kovariante Ableitung im Spinorbündel $\mathcal{S}$ durch

$$\nabla_X \varphi := [\mathsf{s}, X(\varphi_{\mathsf{s}})]$$

zu definieren. Wir wollen jetzt sehen, wie sich diese Formel transformiert, wenn wir s durch einen anderen globalen Schnitt von P ersetzen. Sei also auch $\tilde{\mathsf{s}} : M \to P$ ein Schnitt von P und sei $\sigma : M \to \mathrm{Spin}(n)$ durch

$$\tilde{\mathsf{s}} = \mathsf{s}\sigma$$

gegeben. Dann ist

$$\varphi_{\tilde{\mathsf{s}}} = \kappa\left(\sigma^{-1}\right)\varphi_{\mathsf{s}} = \kappa_n\left(\sigma^{-1}\right)\varphi_{\mathsf{s}} \; .$$

Mit

$$X\left(\sigma^{-1}\right) = -\sigma^{-1}X(\sigma)\sigma^{-1}$$

folgt

$$X(\varphi_{\tilde{\mathsf{s}}}) = \kappa_n\left(X\left(\sigma^{-1}\right)\right)\varphi_{\mathsf{s}} + \kappa_n\left(\sigma^{-1}\right)X(\varphi_{\mathsf{s}}) = -\kappa\left(\sigma^{-1}\right)\kappa_n\left(X(\sigma)\sigma^{-1}\right)\varphi_{\mathsf{s}} + \kappa\left(\sigma^{-1}\right)X(\varphi_{\mathsf{s}})$$

und weiter

$$\nabla_X \varphi = [\tilde{\mathsf{s}}, X(\varphi_{\tilde{\mathsf{s}}})] + \left[\mathsf{s}, \kappa_n\left(X(\sigma)\sigma^{-1}\right)\varphi_{\mathsf{s}}\right] \; . \tag{2.3.2}$$

Sei andererseits $(\tilde{\mathsf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathsf{e}}_n) := F \circ \tilde{\mathsf{s}}$. Dann ist (vgl. Beispiel 2.2.8)

$$\tilde{\mathsf{e}}_j = [\tilde{\mathsf{s}}, \mathbf{e}_j] = [\mathsf{s}, \rho(\sigma)\mathbf{e}_j] = \left[\mathsf{s}, \sigma\mathbf{e}_j\sigma^{-1}\right]$$

und demzufolge

$$\nabla_X \tilde{\mathsf{e}}_j = \left[\mathsf{s}, X\left(\sigma\mathbf{e}_j\sigma^{-1}\right)\right] = \left[\mathsf{s}, X(\sigma)\mathbf{e}_j\sigma^{-1} - \sigma\mathbf{e}_j\sigma^{-1}X(\sigma)\sigma^{-1}\right] \; .$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \tilde{\mathsf{e}}_j \cdot \nabla_X \tilde{\mathsf{e}}_j \cdot \varphi &= \left[\mathsf{s}, \sum_{j=1}^n \kappa_n\left(\sigma\mathbf{e}_j\sigma^{-1}\right)\kappa_n\left(X(\sigma)\mathbf{e}_j\sigma^{-1} - \sigma\mathbf{e}_j\sigma^{-1}X(\sigma)\sigma^{-1}\right)\varphi_{\mathsf{s}}\right] \\
&= \left[\mathsf{s}, \kappa_n\left(\sum_{j=1}^n \sigma\mathbf{e}_j\sigma^{-1}X(\sigma)\mathbf{e}_j\sigma^{-1} - \sum_{j=1}^n \sigma\mathbf{e}_j^2\sigma^{-1}X(\sigma)\sigma^{-1}\right)\varphi_{\mathsf{s}}\right] \\
&= \left[\mathsf{s}, \kappa_n\left(\sum_{j=1}^n \sigma\mathbf{e}_j\sigma^{-1}X(\sigma)\mathbf{e}_j\sigma^{-1}\right)\varphi_{\mathsf{s}} + n\kappa_n\left(X(\sigma)\sigma^{-1}\right)\varphi_{\mathsf{s}}\right] \; .
\end{aligned}$$

Wir benutzen jetzt

Lemma 2.3.5 *Für alle $v \in \mathfrak{spin}(n)$ gilt*

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{e}_j v \mathbf{e}_j = (4-n)v \; .$$

Beweis: Es genügt, die Gleichung für die Erzeugenden $\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$, $k \neq l$, zu verifizieren. Wir haben

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\mathbf{e}_k &= -\mathbf{e}_l\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k\mathbf{e}_l \; , \\
\mathbf{e}_l\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\mathbf{e}_l &= -\mathbf{e}_l\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k\mathbf{e}_l
\end{aligned}$$

und

$$\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_k\mathbf{e}_j\mathbf{e}_l\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\mathbf{e}_j^2 = -\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$$

für $j \neq k, l$. Folglich ist

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \mathbf{e}_j = 2\mathbf{e}_k \mathbf{e}_l - (n-2)\mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = (4-n)\mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \ .$$

$\square$

Da $\sigma(x)^{-1} X(\sigma)(x) \in \mathfrak{spin}(n)$ für alle $x \in M$, impliziert Lemma 2.3.5, dass

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma \mathbf{e}_j \sigma^{-1} X(\sigma) \mathbf{e}_j \sigma^{-1} = (4-n)\sigma\sigma^{-1} X(\sigma)\sigma^{-1} = (4-n) X(\sigma)\sigma^{-1} \ .$$

Also ist

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\mathsf{e}}_j \cdot \nabla_X \tilde{\mathsf{e}}_j \cdot \varphi = 4\left[\mathsf{s}, \kappa_n \left(X(\sigma)\sigma^{-1}\right) \varphi_{\mathsf{s}}\right] \ ,$$

woraus sich mit (2.3.2) die Beziehung

$$\nabla_X \varphi = [\tilde{\mathsf{s}}, X(\varphi_{\tilde{\mathsf{s}}})] + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \tilde{\mathsf{e}}_j \cdot \nabla_X \tilde{\mathsf{e}}_j \cdot \varphi$$

ergibt.

Wir kehren jetzt zum allgemeinen Fall zurück und zeigen

Satz 2.3.6 *Die Gleichung (2.3.1) definiert eine kovariante Ableitung ∇ im Spinorbündel $\mathcal{S}$.*

Beweis: Man sieht leicht ein, dass die so beschriebene Abbildung alle Eigenschaften einer kovarianten Ableitung besitzt. Zu überprüfen bleibt, dass die Gleichung (2.3.1) nicht von der Wahl des Schnittes s abhängt. Dabei verfahren wir analog zur oben angestellten Betrachtung. Sei also $\tilde{\mathsf{s}} : U \to P$ ein weiterer Schnitt von P und sei $\sigma : U \to \mathrm{Spin}(n)$ durch $\tilde{\mathsf{s}} = \mathsf{s}\sigma$ bestimmt. Wie oben sehen wir, dass

$$[\tilde{\mathsf{s}}, X(\varphi_{\tilde{\mathsf{s}}})] = [\mathsf{s}, X(\varphi_{\mathsf{s}})] - \left[\mathsf{s}, \kappa_n \left(X(\sigma)\sigma^{-1}\right) \varphi_{\mathsf{s}}\right] \ . \tag{2.3.3}$$

Wir setzen $\theta := (\theta_{kl})_{k,l=1,\ldots,n} := \rho \circ \sigma : U \to \mathrm{SO}(n)$ und berechnen $X(\sigma)\sigma^{-1}$. Zunächst stellen wir fest, dass

$$\rho_* \left(X(\sigma)\sigma^{-1}\right) = X(\theta)\theta^{\mathrm{T}} \ .$$

Ist nämlich c eine Kurve in M mit $c(0) = x$ und $\dot{c}(0) = X(x)$, so ist

$$\begin{aligned} \rho_* \left(X(\sigma)(x)\sigma(x)^{-1}\right) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \rho\left((\sigma \circ c)(t)\sigma(x)^{-1}\right)\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\rho \circ \sigma \circ c)(t)(\rho \circ \sigma)(x)^{-1}\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\theta \circ c)(t)\theta(x)^{-1}\right|_{t=0} \\ &= X(\theta)(x)\theta(x)^{\mathrm{T}} \ . \end{aligned}$$

Demzufolge haben wir

$$\begin{aligned} \rho_* \left(X(\sigma)\sigma^{-1}\right) &= \left(\sum_{j=1}^{n} X(\theta_{kj})\theta_{lj}\right)_{k,l=1,\ldots,n} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k<l} \sum_{j=1}^{n} X(\theta_{kj})\theta_{lj}(E_{kl} - E_{lk}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l,j=1}^{n} \theta_{kj} X(\theta_{lj}) E_{kl} \ . \end{aligned}$$

Das impliziert mit Folgerung 1.3.18, dass

$$X(\sigma)\sigma^{-1} = \frac{1}{4}\sum_{k,l,j=1}^{n} \theta_{kj} X(\theta_{lj}) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \ . \tag{2.3.4}$$

Wie oben sei $(\tilde{\mathsf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathsf{e}}_n) := F \circ \tilde{\mathsf{s}}$. Dann gilt

$$\tilde{\mathsf{e}}_j = [\tilde{\mathsf{s}}, \mathbf{e}_j] = [\mathsf{s}, \theta \mathbf{e}_j] = \sum_{k=1}^{n} \theta_{kj} [\mathsf{s}, \mathbf{e}_k] = \sum_{k=1}^{n} \theta_{kj} \mathsf{e}_k$$

und somit

$$\nabla_X \tilde{\mathsf{e}}_j = \sum_{k=1}^{n} X(\theta_{kj}) \mathsf{e}_k + \sum_{k=1}^{n} \theta_{kj} \nabla_X \mathsf{e}_k \ .$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \tilde{\mathsf{e}}_j \cdot \nabla_X \tilde{\mathsf{e}}_j \cdot \varphi &= \sum_{k,l,j=1}^{n} \theta_{kj} \mathsf{e}_k \cdot \left(X(\theta_{lj}) \mathsf{e}_l + \theta_{lj} \nabla_X \mathsf{e}_l \right) \cdot \varphi \\
&= \sum_{k,l,j=1}^{n} \theta_{kj} X(\theta_{lj}) \mathsf{e}_k \cdot \mathsf{e}_l \cdot \varphi + \sum_{k,l,j=1}^{n} \theta_{kj} \theta_{lj} \mathsf{e}_k \cdot \nabla_X \mathsf{e}_l \cdot \varphi \\
&= \left[\mathsf{s}, \kappa_n \left(\sum_{k,l,j=1}^{n} \theta_{kj} X(\theta_{lj}) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \right) \varphi_{\mathsf{s}} \right] + \sum_{k,l,j=1}^{n} \theta_{kj} \theta_{lj} \mathsf{e}_k \cdot \nabla_X \mathsf{e}_l \cdot \varphi \ .
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (2.3.4) und

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_{kj} \theta_{lj} = \delta_{kl}$$

erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\mathsf{e}}_j \cdot \nabla_X \tilde{\mathsf{e}}_j \cdot \varphi = 4 \left[\mathsf{s}, \kappa_n \left(X(\sigma) \sigma^{-1} \right) \varphi_{\mathsf{s}} \right] + \sum_{k=1}^{n} \mathsf{e}_k \cdot \nabla_X \mathsf{e}_k \cdot \varphi \ . \tag{2.3.5}$$

Die Gleichungen (2.3.3) und (2.3.5) liefern schließlich, dass

$$[\tilde{\mathsf{s}}, X(\varphi_{\tilde{\mathsf{s}}})] + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} \tilde{\mathsf{e}}_j \cdot \nabla_X \tilde{\mathsf{e}}_j \cdot \varphi = [\mathsf{s}, X(\varphi_{\mathsf{s}})] + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \nabla_X \mathsf{e}_j \cdot \varphi \ .$$

□

Definition 2.3.7 *Die durch Gleichung (2.3.1) definierte kovariante Ableitung im Spinorbündel $\mathcal{S}$ wird* **Spinorableitung** *genannt.*

Die Spinorableitung ist im folgenden Sinne mit der Clifford-Multiplikation und der Fasermetrik von $\mathcal{S}$ verträglich.

Satz 2.3.8 *Für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$ und alle $\varphi, \hat{\varphi} \in \Gamma(\mathcal{S})$ gilt*

$$\nabla_X (Y \cdot \varphi) = (\nabla_X Y) \cdot \varphi + Y \cdot \nabla_X \varphi \tag{2.3.6}$$

und

$$X(\langle \varphi, \hat{\varphi} \rangle) = \langle \nabla_X \varphi, \hat{\varphi} \rangle + \langle \varphi, \nabla_X \hat{\varphi} \rangle \ . \tag{2.3.7}$$

Beweis: Wir wählen einen Schnitt $\mathsf{s} : U \to P$ von P, setzen $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n) := F \circ \mathsf{s}$ und rechnen dann wie folgt auf der offenen Menge $U \subset M$. Wir schreiben

$$Y = [\mathsf{s}, Y_\mathsf{s}] \quad \text{und} \quad Y_\mathsf{s} = \sum_{j=1}^{n} Y_\mathsf{s}^j \mathbf{e}_j$$

sowie

$$\varphi = [\mathsf{s}, \varphi_\mathsf{s}] \quad \text{und} \quad \hat{\varphi} = [\mathsf{s}, \hat{\varphi}_\mathsf{s}] \ .$$

Dann ist

$$Y_\mathsf{s}^j = \mathbf{g}(\mathsf{e}_j, Y) \ .$$

Außerdem ist

$$Y \cdot \varphi = [\mathsf{s}, \kappa_n(Y_\mathsf{s})\varphi_\mathsf{s}]$$

und somit

$$\nabla_X(Y \cdot \varphi) = [\mathsf{s}, X(\kappa_n(Y_\mathsf{s})\varphi_\mathsf{s})] + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \nabla_X \mathsf{e}_j \cdot Y \cdot \varphi \ . \tag{2.3.8}$$

Wir formen die beiden Summanden auf der rechten Seite um. Zunächst haben wir

$$\begin{aligned} X(\kappa_n(Y_\mathsf{s})\varphi_\mathsf{s}) &= \kappa_n(X(Y_\mathsf{s}))\varphi_\mathsf{s} + \kappa_n(Y_\mathsf{s})X(\varphi_\mathsf{s}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} X\left(Y_\mathsf{s}^j\right)\kappa_n(\mathbf{e}_j)\varphi_\mathsf{s} + \kappa_n(Y_\mathsf{s})X(\varphi_\mathsf{s}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} X(\mathbf{g}(\mathsf{e}_j, Y))\kappa_n(\mathbf{e}_j)\varphi_\mathsf{s} + \kappa_n(Y_\mathsf{s})X(\varphi_\mathsf{s}) \end{aligned}$$

und damit

$$[\mathsf{s}, X(\kappa_n(Y_\mathsf{s})\varphi_\mathsf{s})] = \sum_{j=1}^{n} X(\mathbf{g}(\mathsf{e}_j, Y))\mathsf{e}_j \cdot \varphi + Y \cdot [\mathsf{s}, X(\varphi_\mathsf{s})] \ . \tag{2.3.9}$$

Mit Lemma 2.2.12 schließen wir

$$\begin{aligned} \mathsf{e}_j \cdot \nabla_X \mathsf{e}_j \cdot Y \cdot \varphi &= -\mathsf{e}_j \cdot Y \cdot \nabla_X \mathsf{e}_j \cdot \varphi - 2\mathbf{g}(\nabla_X \mathsf{e}_j, Y)\mathsf{e}_j \cdot \varphi \\ &= Y \cdot \mathsf{e}_j \cdot \nabla_X \mathsf{e}_j \cdot \varphi + 2\mathbf{g}(\mathsf{e}_j, Y)\nabla_X \mathsf{e}_j \cdot \varphi - 2\mathbf{g}(\nabla_X \mathsf{e}_j, Y)\mathsf{e}_j \cdot \varphi \ . \end{aligned}$$

Da die kovariante Ableitung ∇ in TM nach Voraussetzung metrisch ist, haben wir

$$\begin{aligned} \mathbf{g}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}(\mathsf{e}_j, Y)\nabla_X \mathsf{e}_j, \mathsf{e}_k\right) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}(\mathsf{e}_j, Y)\mathbf{g}(\nabla_X \mathsf{e}_j, \mathsf{e}_k) = -\sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}(\mathsf{e}_j, Y)\mathbf{g}(\mathsf{e}_j, \nabla_X \mathsf{e}_k) \\ &= -\mathbf{g}(\nabla_X \mathsf{e}_k, Y) = -\mathbf{g}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}(\nabla_X \mathsf{e}_j, Y)\mathsf{e}_j, \mathsf{e}_k\right) \end{aligned}$$

und folglich

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}(\mathsf{e}_j, Y)\nabla_X \mathsf{e}_j = -\sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}(\nabla_X \mathsf{e}_j, Y)\mathsf{e}_j \ .$$

Also ist

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \nabla_X \mathsf{e}_j \cdot Y \cdot \varphi = \frac{1}{4} Y \cdot \sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \nabla_X \mathsf{e}_j \cdot \varphi + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}(\mathsf{e}_j, Y)\nabla_X \mathsf{e}_j \cdot \varphi \ . \tag{2.3.10}$$

Aus (2.3.8), (2.3.9) und (2.3.10) erhalten wir

$$\nabla_X(Y \cdot \varphi) = \sum_{j=1}^{n} X(\mathbf{g}(\mathsf{e}_j, Y))\mathsf{e}_j \cdot \varphi + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}(\mathsf{e}_j, Y)\nabla_X \mathsf{e}_j \cdot \varphi + Y \cdot \nabla_X \varphi \ ,$$

was zusammen mit

$$\nabla_X Y = \sum_{j=1}^{n} \nabla_X(\mathbf{g}(\mathsf{e}_j, Y)\mathsf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} X(\mathbf{g}(\mathsf{e}_j, Y))\mathsf{e}_j + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}(\mathsf{e}_j, Y)\nabla_X \mathsf{e}_j$$

die Gleichung (2.3.6) liefert.

Zum Beweis der Gleichung (2.3.7) bemerken wir zunächst, dass

$$X(\langle\varphi, \hat{\varphi}\rangle) = X(\langle\varphi_{\mathsf{s}}, \hat{\varphi}_{\mathsf{s}}\rangle) = \langle X(\varphi_{\mathsf{s}}), \hat{\varphi}_{\mathsf{s}}\rangle + \langle\varphi_{\mathsf{s}}, X(\hat{\varphi}_{\mathsf{s}})\rangle \; .$$

Wegen

$$0 = X(\mathbf{g}(\mathsf{e}_j, \mathsf{e}_j)) = 2\,\mathbf{g}(\mathsf{e}_j, \nabla_X \mathsf{e}_j)$$

und der Lemmas 2.2.12 und 2.2.13 haben wir außerdem

$$\begin{aligned} \langle \mathsf{e}_j \cdot \nabla_X \mathsf{e}_j \cdot \varphi, \hat{\varphi}\rangle + \langle\varphi, \mathsf{e}_j \cdot \nabla_X \mathsf{e}_j \cdot \hat{\varphi}\rangle &= \langle \mathsf{e}_j \cdot \nabla_X \mathsf{e}_j \cdot \varphi + \nabla_X \mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_j \cdot \varphi, \hat{\varphi}\rangle \\ &= -2\,\mathbf{g}(\mathsf{e}_j, \mathsf{e}_j)\langle\varphi, \hat{\varphi}\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

und der Satz ist bewiesen. □

Wir wollen jetzt noch eine wesentliche Beziehung zwischen der metrischen kovarianten Ableitung ∇ in TM und der zugeordneten Spinorableitung angeben. Dazu erinnern wir an

Definition 2.3.9 *Sei $\mathcal{E}$ ein Vektorbündel über M und sei ∇ eine kovariante Ableitung in $\mathcal{E}$. Die* **Krümmung** *R von ∇ ist die durch*

$$R(X,Y)\varphi = \nabla_X\nabla_Y\varphi - \nabla_Y\nabla_X\varphi - \nabla_{[X,Y]}\varphi$$

für $X, Y \in \Gamma(TM)$ und $\varphi \in \Gamma(\mathcal{E})$ definierte Abbildung $R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(\mathcal{E}) \to \Gamma(\mathcal{E})$.

Wie man leicht verifiziert, ist die Krümmung R einer kovarianten Ableitung ∇ ein Tensorfeld. Das heißt, der Ausdruck $R(X,Y)\varphi$ ist in jedem seiner Argumente X, Y und φ linear über dem Ring der glatten Funktionen. Damit hängt $(R(X,Y)\varphi)(x) \in \mathcal{E}_x$ nur von $X(x), Y(x)$ und $\varphi(x)$ ab.

Satz 2.3.10 *Sei ∇ eine metrische kovariante Ableitung in TM, sei R die Krümmung von ∇ und sei $R^{\mathcal{S}}$ die Krümmung der zugeordneten Spinorableitung. Dann gilt*

$$R^{\mathcal{S}}(X,Y)\varphi = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot R(X,Y)\mathsf{e}_j \cdot \varphi$$

für $X, Y \in \Gamma(TM)$ und $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$, wobei $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n)$ ein (lokales) Orthonormalreper von M ist.

Beweis: Es kann o.B.d.A. angenommen werden, dass $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n)$ ein Schnitt von $\mathbf{SO}(M)$ ist, d.h. in der Orientierung von M liegt. Man wähle einen Schnitt s von P mit $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n) = F \circ \mathsf{s}$, nutze Gleichung (2.3.1) und wende Lemma 2.2.12 und Satz 2.3.8 an. □

2.4 Definition und grundlegende Eigenschaften des Dirac-Operators

Wir betrachten weiterhin die folgende Situation. Es sei $(M, \mathbf{g})$ eine n-dimensionale, orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit, (P, F) eine Spin-Struktur von $(M, \mathbf{g})$ und $\mathcal{S}$ das zugehörige Spinorbündel. Außerdem sei eine metrische kovariante Ableitung ∇ in TM fixiert. Die zugeordnete Spinorableitung ist dann eine Abbildung

$$\nabla : \Gamma(\mathcal{S}) \to \Gamma(T^*M \otimes \mathcal{S}) \; .$$

Weiter haben wir die Clifford-Multiplikation

$$\mu : \Gamma(TM \otimes \mathcal{S}) \to \Gamma(\mathcal{S}) \ .$$

Wir identifizieren das Tangentialbündel TM mit dem Kotangentialbündel T^*M längs

$$\mathbf{v} \in T_xM \mapsto \mathbf{g}_x(\mathbf{v}, \cdot\,) \in T_x^*M$$

und erhalten so einen Isomorphismus

$$\mathbf{g} : T^*M \otimes \mathcal{S} \to TM \otimes \mathcal{S} \ .$$

Definition 2.4.1 *Der* **Dirac-Operator** $D : \Gamma(\mathcal{S}) \to \Gamma(\mathcal{S})$ *ist die Verknüpfung der Abbildungen*

$$\Gamma(\mathcal{S}) \quad \overset{\nabla}{\to} \quad \Gamma(T^*M \otimes \mathcal{S}) \quad \overset{\mathbf{g}}{\to} \quad \Gamma(TM \otimes \mathcal{S}) \quad \overset{\mu}{\to} \quad \Gamma(\mathcal{S}) \ .$$

Der Dirac-Operator D ist somit ein linearer Differentialoperator erster Ordnung. Lokal kann er wie folgt beschrieben werden.

Satz 2.4.2 *Sei* $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n)$ *ein Orthonormalreper von* M*. Für jedes* $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ *gilt*

$$D\varphi = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi \ .$$

Beweis: Für $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ und $X \in \Gamma(TM)$ ist

$$\nabla_X \varphi = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}(\mathsf{e}_j, X) \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi \ .$$

Also ist

$$\nabla \varphi = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}(\mathsf{e}_j, \cdot\,) \otimes \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi$$

und folglich

$$(\mathbf{g} \circ \nabla)\varphi = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \otimes \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi \ ,$$

was sofort die Behauptung liefert. □

Beispiel 2.4.3 Nach Beispiel 2.2.10 können wir Spinorfelder über $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g}_{\mathrm{E}})$ mit Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \Delta_n$ identifizieren. Die Spinorableitung zum Levi-Civita-Zusammenhang von $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g}_{\mathrm{E}})$ ist dann durch

$$\nabla_X \varphi = X(\varphi)$$

gegeben. Folglich hat nach Satz 2.4.2 der Dirac-Operator D in diesem Fall die Gestalt

$$D\varphi = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \ .$$

□

Von jetzt an sei die betrachtete kovariante Ableitung in TM stets der Levi-Civita-Zusammenhang. Außerdem bezeichne im Weiteren $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n)$ immer ein (lokales) Orthonormalreper von M.

Wir erinnern an

Definition 2.4.4 *Die* **Divergenz** *eines Vektorfeldes* $X \in \Gamma(TM)$ *ist die durch*

$$\mathrm{div}(X) := \sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}\left(\nabla_{\mathsf{e}_j} X, \mathsf{e}_j\right)$$

gegebene Funktion $\mathrm{div}(X) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Bezeichne $\mathrm{d}M$ die Volumenform von M. Bekanntlich gilt

Satz 2.4.5 *Ist* M *geschlossen, d.h. kompakt und ohne Rand, so ist*

$$\int_M \mathrm{div}(X)\,\mathrm{d}M = 0$$

für alle $X \in \Gamma(TM)$. □

Sei $TM^{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung des Tangentialbündels TM. Die Schnitte $Z \in \Gamma\left(TM^{\mathbb{C}}\right)$ können als

$$Z = Z_1 + \mathrm{i}\, Z_2$$

mit eindeutig bestimmten $Z_1, Z_2 \in \Gamma(TM)$ geschrieben werden. Durch

$$\mathrm{div}(Z) := \mathrm{div}(Z_1) + \mathrm{i}\,\mathrm{div}(Z_2)$$

dehnen wir den Divergenzoperator auf $\Gamma\left(TM^{\mathbb{C}}\right)$ aus. Ebenso setzen wir die Riemannsche Metrik $\mathbf{g}$ und den Levi-Civita-Zusammenhang ∇ in beiden Argumenten $\mathbb{C}$-linear fort.

Lemma 2.4.6 *Seien* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma(\mathcal{S})$. *Dann gilt*

$$\langle D\varphi_1, \varphi_2\rangle = \langle \varphi_1, D\varphi_2\rangle - \mathrm{div}(Z)\ ,$$

wobei $Z \in \Gamma\left(TM^{\mathbb{C}}\right)$ *durch*

$$\mathbf{g}(Z, X) = \langle \varphi_1, X \cdot \varphi_2\rangle \quad \textit{für alle} \quad X \in \Gamma(TM)$$

bestimmt ist.

Beweis: Wir berechnen, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(Z) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}\left(\nabla_{\mathsf{e}_j} Z, \mathsf{e}_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\mathsf{e}_j(\mathbf{g}(Z, \mathsf{e}_j)) - \mathbf{g}\left(Z, \nabla_{\mathsf{e}_j}\mathsf{e}_j\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\mathsf{e}_j(\langle \varphi_1, \mathsf{e}_j \cdot \varphi_2\rangle) - \left\langle \varphi_1, \nabla_{\mathsf{e}_j}\mathsf{e}_j \cdot \varphi_2\right\rangle\right)\ .\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 2.2.13 und Satz 2.3.8 schließen wir

$$\begin{aligned}\left\langle \mathsf{e}_j \cdot \nabla_{\mathsf{e}_j}\varphi_1, \varphi_2\right\rangle &= -\left\langle \nabla_{\mathsf{e}_j}\varphi_1, \mathsf{e}_j \cdot \varphi_2\right\rangle \\ &= -\mathsf{e}_j(\langle \varphi_1, \mathsf{e}_j \cdot \varphi_2\rangle) + \left\langle \varphi_1, \nabla_{\mathsf{e}_j}(\mathsf{e}_j \cdot \varphi_2)\right\rangle \\ &= -\mathsf{e}_j(\langle \varphi_1, \mathsf{e}_j \cdot \varphi_2\rangle) + \left\langle \varphi_1, \nabla_{\mathsf{e}_j}\mathsf{e}_j \cdot \varphi_2\right\rangle + \left\langle \varphi_1, \mathsf{e}_j \cdot \nabla_{\mathsf{e}_j}\varphi_2\right\rangle\ .\end{aligned}$$

Indem wir jetzt über $j = 1, \ldots, n$ summieren und Satz 2.4.2 benutzen, erhalten wir die Behauptung. □

Satz 2.4.7 *Ist M geschlossen, so ist der Dirac-Operator D formal selbstadjungiert, d.h.*

$$\int_M \langle D\varphi_1, \varphi_2 \rangle \, \mathrm{d}M = \int_M \langle \varphi_1, D\varphi_2 \rangle \, \mathrm{d}M$$

für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma(\mathcal{S})$.

Beweis: Das ist eine unmittelbare Konsequenz von Satz 2.4.5 und Lemma 2.4.6. □

Folgerung 2.4.8 *Sei M geschlossen. Dann sind die Eigenwerte von D reell.*

Beweis: Sei ξ ein Eigenwert von D und $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ ein nichttriviales Spinorfeld mit $D\varphi = \xi\varphi$. Dann haben wir

$$\|\varphi\|^2 := \int_M \langle \varphi, \varphi \rangle \, \mathrm{d}M \neq 0$$

und wegen Satz 2.4.7

$$\xi\|\varphi\|^2 = \int_M \langle D\varphi, \varphi \rangle \, \mathrm{d}M = \int_M \langle \varphi, D\varphi \rangle \, \mathrm{d}M = \bar{\xi}\|\varphi\|^2 \ ,$$

was $\xi = \bar{\xi}$, d.h. $\xi \in \mathbb{R}$ impliziert. □

3 Beziehungen zur Geometrie des zu Grunde liegenden Raumes

3.1 Krümmungsgleichungen

Eine erste Beziehung zwischen der Krümmung in TM und der in $\mathcal{S}$ haben wir bereits im Satz 2.3.10 kennen gelernt. Bevor wir eine weitere Identität von diesem Typ angeben werden, stellen wir einige Fakten zur Krümmung R des Levi-Civita-Zusammenhangs ∇ zusammen. Da ∇ torsionsfrei ist, haben wir

Satz 3.1.1 (Erste Bianchi-Identität) *Für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ gilt*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0 \ .$$

□

Durch

$$R(X_1, X_2, Y_1, Y_2) = \mathbf{g}(R(X_1, X_2)Y_2, Y_1)$$

für $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \Gamma(TM)$ verstehen wir die Krümmung R im Folgenden auch als ein $(4,0)$-Tensorfeld auf M. Dieses $(4,0)$-Tensorfeld nennt man den **Riemannschen Krümmungstensor** von $(M, \mathbf{g})$.

Aus der Tatsache, dass ∇ metrisch ist, und Satz 3.1.1 folgert man

Satz 3.1.2 *Für alle $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \Gamma(TM)$ ist*

$$R(X_1, X_2, Y_1, Y_2) = -R(X_2, X_1, Y_1, Y_2) = -R(X_1, X_2, Y_2, Y_1) = R(Y_1, Y_2, X_1, X_2)$$

und

$$R(X_1, X_2, Y_1, Y_2) + R(X_2, Y_1, X_1, Y_2) + R(Y_1, X_1, X_2, Y_2) = 0 \ .$$

□

Definition 3.1.3 *Der* **Ricci-Tensor** Ric *von* $(M, \mathbf{g})$ *ist das durch*

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{j=1}^{n} R(\mathsf{e}_j, X, \mathsf{e}_j, Y)$$

definierte $(2,0)$*-Tensorfeld auf* M*. Die durch*

$$\mathrm{Scal} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}(\mathsf{e}_j, \mathsf{e}_j)$$

definierte Funktion Scal *auf* M *wird die* **Skalarkrümmung** *von* $(M, \mathbf{g})$ *genannt.*

Mit Hilfe von Satz 3.1.2 rechnet man leicht nach, dass Ric symmetrisch ist. Es gilt also

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X) \tag{3.1.1}$$

für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$. Durch die Bedingung

$$\mathbf{g}(\mathrm{Ric}(X), Y) = \mathrm{Ric}(X,Y)$$

verstehen wir den Ricci-Tensor auch als einen Endomorphimus $\mathrm{Ric} : TM \to TM$. Offensichtlich gilt

$$\mathrm{Ric}(X) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}(X, \mathsf{e}_j)\mathsf{e}_j \, . \tag{3.1.2}$$

Zwischen der Ricci-Krümmung Ric und der Krümmung $R^{\mathcal{S}}$ der dem Levi-Civita-Zusammenhang zugeordneten Spinorableitung besteht die folgende Beziehung.

Satz 3.1.4 *Für alle* $X \in \Gamma(TM)$ *und alle* $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ *gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot R^{\mathcal{S}}(\mathsf{e}_j, X)\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ric}(X) \cdot \varphi \, .$$

Beweis: Wir nutzen die Sätze 2.3.10 und 3.1.2, Lemma 2.2.12 und die Gleichung (3.1.2) und schließen

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot R^{\mathcal{S}}(\mathsf{e}_j, X)\varphi &= \frac{1}{4} \sum_{j,k=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_k \cdot R(\mathsf{e}_j, X)\mathsf{e}_k \cdot \varphi \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j,k,l=1}^{n} R(\mathsf{e}_j, X, \mathsf{e}_l, \mathsf{e}_k)\mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_k \cdot \mathsf{e}_l \cdot \varphi \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j,k,l=1}^{n} R(X, \mathsf{e}_j, \mathsf{e}_l, \mathsf{e}_k)\mathsf{e}_k \cdot \mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_l \cdot \varphi + \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^{n} \delta_{kj} R(\mathsf{e}_j, X, \mathsf{e}_k, \mathsf{e}_l)\mathsf{e}_l \cdot \varphi \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j,k,l=1}^{n} R(X, \mathsf{e}_j, \mathsf{e}_l, \mathsf{e}_k)\mathsf{e}_k \cdot \mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_l \cdot \varphi + \frac{1}{2}\,\mathrm{Ric}(X) \cdot \varphi \, .
\end{aligned}$$

Eine längliche Rechnung, die die erste Bianchi-Identität benutzt, liefert

$$\sum_{j,k,l=1}^{n} R(X, \mathsf{e}_j, \mathsf{e}_l, \mathsf{e}_k)\mathsf{e}_k \cdot \mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_l \cdot \varphi = 0$$

und damit die Behauptung. □

Satz 3.1.5 *Für alle $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \mathrm{Ric}(\mathsf{e}_j) \cdot \varphi = -\mathrm{Scal}\,\varphi \ .$$

Beweis: Mit Hilfe von (3.1.1) und (3.1.2) folgern wir, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \mathrm{Ric}(\mathsf{e}_j) \cdot \varphi &= \sum_{j,k=1}^{n} \mathrm{Ric}(\mathsf{e}_j, \mathsf{e}_k)\mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_k \cdot \varphi \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \mathrm{Ric}(\mathsf{e}_j, \mathsf{e}_k)\mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_k \cdot \varphi + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \mathrm{Ric}(\mathsf{e}_k, \mathsf{e}_j)\mathsf{e}_k \cdot \mathsf{e}_j \cdot \varphi \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \mathrm{Ric}(\mathsf{e}_j, \mathsf{e}_k)(\mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_k \cdot \varphi + \mathsf{e}_k \cdot \mathsf{e}_j \cdot \varphi) \\
&= - \sum_{j,k=1}^{n} \mathrm{Ric}(\mathsf{e}_j, \mathsf{e}_k)\delta_{jk}\varphi \\
&= -\mathrm{Scal}\,\varphi \ .
\end{aligned}$$

□

Definition 3.1.6 *Ein Spinorfeld $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ heißt* **parallel** $:\Longleftrightarrow \nabla\varphi = 0$*, d.h.*

$$\nabla_X \varphi = 0$$

für alle $X \in \Gamma(TM)$.

Bemerkung 3.1.7 Die Gleichung $\nabla\varphi = 0$ ist ein einfaches Beispiel einer so genannten **spinoriellen Feldgleichung**. □

Satz 3.1.8 *Ist M zusammenhängend und ist $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ parallel, so ist die Funktion $|\varphi| := \sqrt{\langle\varphi, \varphi\rangle}$ konstant.*

Beweis: Sei $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ parallel. Nach Satz 2.3.8 gilt dann

$$X\left(|\varphi|^2\right) = \langle\nabla_X\varphi, \varphi\rangle + \langle\varphi, \nabla_X\varphi\rangle = 0$$

für alle $X \in \Gamma(TM)$, was sofort die Behauptung liefert. □

Der nächste Satz stellt eine erste Beziehung zwischen der Existenz von Lösungen gewisser Differentialgleichungen über M und der Geometrie von M her.

Satz 3.1.9 *Sei M zusammenhängend. Existiert ein nichttriviales paralleles Spinorfeld $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$, so ist M* **Ricci-flach***, d.h.* $\mathrm{Ric} = 0$.

Beweis: Sei $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ parallel und nichttrivial. Dann gilt

$$R^{\mathcal{S}}(X, Y)\varphi = 0$$

für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$. Mit Satz 3.1.4 sehen wir, dass

$$\mathrm{Ric}(X)\varphi = 0 \quad \text{für alle} \quad X \in \Gamma(TM) \ . \tag{3.1.3}$$

Außerdem gilt nach Satz 3.1.8, dass

$$\varphi(x) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in M \ . \tag{3.1.4}$$

Aus (3.1.3), (3.1.4) und Lemma 1.5.3 folgt die Behauptung. □

3.2 Die Lichnerowicz-Formel und Eigenwertabschätzungen

Sei $\mathcal{E}$ ein komplexes Vektorbündel über der Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M, \mathbf{g})$ und sei ∇ eine kovariante Ableitung in $\mathcal{E}$.

Definition 3.2.1 *Der durch*

$$\Delta^{\mathcal{E}}\varphi := \sum_{j=1}^{n} \left(-\nabla_{\mathsf{e}_j}\nabla_{\mathsf{e}_j}\varphi + \nabla_{\nabla_{\mathsf{e}_j}\mathsf{e}_j}\varphi \right)$$

definierte Operator $\Delta^{\mathcal{E}} : \Gamma(\mathcal{E}) \to \Gamma(\mathcal{E})$ *heißt der* **zu ∇ assoziierte Laplace-Operator**.

Man überzeugt sich leicht davon, dass die Definition von $\Delta^{\mathcal{E}}$ unabhängig von der Wahl des Orthonormalrepers $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n)$ ist.

Satz 3.2.2 *Sei M geschlossen, sei $\mathcal{E}$ mit einer Fasermetrik $(\langle\ ,\ \rangle_x)_{x\in M}$ versehen und sei die kovariante Ableitung ∇ derart, dass*

$$X(\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle) = \langle\nabla_X\varphi_1, \varphi_2\rangle + \langle\varphi_1, \nabla\varphi_2\rangle$$

für alle $X \in \Gamma(TM)$ und alle $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma(\mathcal{E})$. Dann gilt

$$\int_M \left\langle\Delta^{\mathcal{E}}\varphi_1, \varphi_2\right\rangle \mathrm{d}M = \int_M \langle\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2\rangle \,\mathrm{d}M = \int_M \left\langle\varphi_1, \Delta^{\mathcal{E}}\varphi_2\right\rangle \mathrm{d}M \tag{3.2.1}$$

für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma(\mathcal{E})$. Dabei ist die Funktion $\langle\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2\rangle \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ durch

$$\langle\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2\rangle = \sum_{j=1}^{n} \left\langle\nabla_{\mathsf{e}_j}\varphi_1, \nabla_{\mathsf{e}_j}\varphi_2\right\rangle$$

gegeben.

Beweis: Offensichtlich genügt es, die erste Gleichung von (3.2.1) zu zeigen. Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma(\mathcal{E})$ und sei $Z \in \Gamma\left(TM^{\mathbb{C}}\right)$ durch

$$\mathbf{g}(Z, X) = \langle\nabla_X\varphi_1, \varphi_2\rangle \quad \text{für alle} \quad X \in \Gamma(TM)$$

bestimmt. Wir fixieren jetzt einen Punkt $x \in M$ und wählen ein auf einer Umgebung von x definiertes Orthonormalreper $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n)$ mit der Eigenschaft, dass

$$(\nabla\mathsf{e}_j)(x) = 0 \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n\ .$$

Im Punkt x haben wir dann

$$\operatorname{div}(Z) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}\left(\nabla_{\mathsf{e}_j}Z, \mathsf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j(\mathbf{g}(Z, \mathsf{e}_j)) = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j\left(\left\langle\nabla_{\mathsf{e}_j}\varphi_1, \varphi_2\right\rangle\right)$$

und

$$\begin{aligned}\left\langle\Delta^{\mathcal{E}}\varphi_1, \varphi_2\right\rangle &= -\sum_{j=1}^{n} \left\langle\nabla_{\mathsf{e}_j}\nabla_{\mathsf{e}_j}\varphi_1, \varphi_2\right\rangle \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j\left(\left\langle\nabla_{\mathsf{e}_j}\varphi_1, \varphi_2\right\rangle\right) + \sum_{j=1}^{n} \left\langle\nabla_{\mathsf{e}_j}\varphi_1, \nabla_{\mathsf{e}_j}\varphi_2\right\rangle\ .\end{aligned}$$

Also gilt

$$\left\langle\Delta^{\mathcal{E}}\varphi_1, \varphi_2\right\rangle = -\operatorname{div}(Z) + \langle\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2\rangle$$

auf M und mit Satz 2.4.5 folgt die Behauptung. □

Definition 3.2.3 *Der zur Spinorableitung assoziierte Laplace-Operator* $\Delta^{\mathcal{S}} : \Gamma(\mathcal{S}) \to \Gamma(\mathcal{S})$ *wird* **Spinor-Laplace-Operator** *genannt.*

Die Lichnerowicz-Formel setzt den Spinor-Laplace-Operator $\Delta^{\mathcal{S}}$ mit dem Quadrat des Dirac-Operators in Beziehung und ist ein Beispiel für eine so genannte Weitzenböck-Formel. Bevor wir dazu kommen, beweisen wir noch

Lemma 3.2.4 *Für alle* $X \in \Gamma(TM)$ *und alle* $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ *ist*

$$D(X \cdot \varphi) = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \nabla_{\mathsf{e}_j} X \cdot \varphi - X \cdot D\varphi - 2\nabla_X \varphi \,.$$

Beweis: Mit Hilfe der Sätze 2.3.8 und 2.4.2 leiten wir

$$\begin{aligned}
D(X \cdot \varphi) &= \sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \nabla_{\mathsf{e}_j} (X \cdot \varphi) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \nabla_{\mathsf{e}_j} X \cdot \varphi + \sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot X \cdot \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \nabla_{\mathsf{e}_j} X \cdot \varphi - \sum_{j=1}^{n} X \cdot \mathsf{e}_j \cdot \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi - 2 \sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}(X, \mathsf{e}_j) \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \nabla_{\mathsf{e}_j} X \cdot \varphi - X \cdot D\varphi - 2\nabla_X \varphi
\end{aligned}$$

ab. □

Satz 3.2.5 (Lichnerowicz) *Für alle* $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ *ist*

$$D^2 \varphi = \Delta^{\mathcal{S}} \varphi + \frac{\mathrm{Scal}}{4} \varphi \,.$$

Beweis: Wir fixieren ein $x \in M$ und wählen $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n)$ wie im Beweis von Satz 3.2.2. Im Punkt x gelten dann nach Satz 2.4.2 und Lemma 3.2.4 die Identitäten

$$\begin{aligned}
D^2 \varphi &= \sum_{j=1}^{n} D\left(\mathsf{e}_j \cdot \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi\right) \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot D\left(\nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi\right) - 2 \sum_{j=1}^{n} \nabla_{\mathsf{e}_j} \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi \\
&= 2\Delta^{\mathcal{S}} \varphi - \sum_{j,k=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_k \cdot \nabla_{\mathsf{e}_k} \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi \\
&= 2\Delta^{\mathcal{S}} \varphi - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_k \cdot \nabla_{\mathsf{e}_k} \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \mathsf{e}_k \cdot \mathsf{e}_j \cdot \nabla_{\mathsf{e}_j} \nabla_{\mathsf{e}_k} \varphi \\
&= 2\Delta^{\mathcal{S}} \varphi - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_k \cdot \nabla_{\mathsf{e}_k} \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_k \cdot \nabla_{\mathsf{e}_j} \nabla_{\mathsf{e}_k} \varphi + \sum_{j,k=1}^{n} \delta_{jk} \nabla_{\mathsf{e}_j} \nabla_{\mathsf{e}_k} \varphi \\
&= \Delta^{\mathcal{S}} \varphi - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_k \cdot \left(\nabla_{\mathsf{e}_k} \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi - \nabla_{\mathsf{e}_j} \nabla_{\mathsf{e}_k} \varphi\right) \\
&= \Delta^{\mathcal{S}} \varphi - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_k \cdot R^{\mathcal{S}}(\mathsf{e}_k, \mathsf{e}_j) \varphi \,.
\end{aligned}$$

Nach den Sätzen 3.1.4 und 3.1.5 haben wir außerdem

$$\sum_{j,k=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_k \cdot R^{\mathcal{S}}(\mathsf{e}_k, \mathsf{e}_j)\varphi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \mathrm{Ric}(\mathsf{e}_j) \cdot \varphi = -\frac{1}{2}\mathrm{Scal}\,\varphi$$

und der Satz ist bewiesen. □

Für die restlichen Betrachtungen in diesem Abschnitt setzen wir voraus, dass die Mannigfaltigkeit M geschlossen ist.

Folgerung 3.2.6 *Für alle $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ gilt*

$$\int_M \left\langle D^2\varphi, \varphi\right\rangle \mathrm{d}M = \int_M \langle \nabla\varphi, \nabla\varphi\rangle \,\mathrm{d}M + \frac{1}{4}\int_M \mathrm{Scal}\,\langle \varphi, \varphi\rangle \,\mathrm{d}M \;.$$

Beweis: Das ist eine Konsequenz aus den Sätzen 3.2.2 und 3.2.5. □

Aus dem letzten Resultat leiten wir jetzt Abschätzungen für die Eigenwerte des Dirac-Operators ab. Dabei bezeichne Scal_0 das Minimum der Skalarkrümmung von M,

$$\mathrm{Scal}_0 := \min_{x\in M} \mathrm{Scal}(x) \;.$$

Satz 3.2.7 *Für jeden Eigenwert ξ des Dirac-Operators D gilt*

$$\xi^2 \geq \frac{\mathrm{Scal}_0}{4} \;.$$

Beweis: Für alle $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ gilt

$$\int_M \langle \nabla\varphi, \nabla\varphi\rangle \,\mathrm{d}M \geq 0 \tag{3.2.2}$$

und

$$\int_M \mathrm{Scal}\,\langle \varphi, \varphi\rangle \,\mathrm{d}M \geq \int_M \mathrm{Scal}_0\,\langle \varphi, \varphi\rangle \,\mathrm{d}M = \mathrm{Scal}_0 \int_M \langle \varphi, \varphi\rangle \,\mathrm{d}M \;. \tag{3.2.3}$$

Ist nun ξ ein Eigenwert von D und ist $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ ein nichttriviales Spinorfeld mit $D\varphi = \xi\varphi$, so impliziert Folgerung 3.2.6 zusammen mit (3.2.2) und (3.2.3), dass

$$\xi^2 \int_M \langle \varphi, \varphi\rangle \,\mathrm{d}M = \int_M \langle \nabla\varphi, \nabla\varphi\rangle \,\mathrm{d}M + \frac{1}{4}\int_M \mathrm{Scal}_0\,\langle \varphi, \varphi\rangle \,\mathrm{d}M \geq \frac{\mathrm{Scal}_0}{4}\int_M \langle \varphi, \varphi\rangle \,\mathrm{d}M \;,$$

woraus sich wegen

$$\int_M \langle \varphi, \varphi\rangle \,\mathrm{d}M > 0$$

bereits die Behauptung ergibt. □

Wie der nächste Satz zeigt, ist diese Abschätzung jedoch nicht optimal.

Satz 3.2.8 (Friedrich) *Für jeden Eigenwert ξ des Dirac-Operators D gilt*

$$\xi^2 \geq \frac{n}{n-1}\,\frac{\mathrm{Scal}_0}{4} \;. \tag{3.2.4}$$

Beweis: Zum Beweis dieser Abschätzung modifizieren wir die Spinorableitung ∇ wie folgt. Sei $s \in \mathbb{R}$. Für $X \in \Gamma(TM)$ und $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ setzen wir

$$\nabla^s_X\varphi := \nabla_X\varphi + sX \cdot \varphi \;.$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass dadurch eine kovariante Ableitung ∇^s im Spinorbündel $\mathcal{S}$ definiert ist. Für diese berechnen wir

$$\begin{aligned}
\langle \nabla^s \varphi, \nabla^s \varphi \rangle &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \nabla^s_{\mathsf{e}_j} \varphi, \nabla^s_{\mathsf{e}_j} \varphi \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi + s\mathsf{e}_j \cdot \varphi, \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi + s\mathsf{e}_j \cdot \varphi \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\left\langle \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi, \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi \right\rangle + s \left\langle \mathsf{e}_j \cdot \varphi, \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi \right\rangle + s \left\langle \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi, \mathsf{e}_j \cdot \varphi \right\rangle + s^2 \langle \mathsf{e}_j \cdot \varphi, \mathsf{e}_j \cdot \varphi \rangle \right) \\
&= \langle \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle - \sum_{j=1}^{n} \left(s \left\langle \varphi, \mathsf{e}_j \cdot \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi \right\rangle + s \left\langle \mathsf{e}_j \cdot \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi, \varphi \right\rangle + s^2 \left\langle \mathsf{e}_j^2 \cdot \varphi, \varphi \right\rangle \right) \ ,
\end{aligned}$$

also

$$\langle \nabla^s \varphi, \nabla^s \varphi \rangle = \langle \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle - s \langle \varphi, D\varphi \rangle - s \langle D\varphi, \varphi \rangle + ns^2 \langle \varphi, \varphi \rangle \ . \tag{3.2.5}$$

Außerdem betrachten wir den Operator $D - s : \Gamma(\mathcal{S}) \to \Gamma(\mathcal{S})$. Für dessen Quadrat haben wir

$$(D-s)^2 \varphi = (D-s)(D\varphi - s\varphi) = D^2\varphi - sD\varphi - D(s\varphi) + s^2\varphi = D^2\varphi - 2sD\varphi + s^2\varphi \ ,$$

was mit Folgerung 3.2.6 auf

$$\int_M \left\langle (D-s)^2 \varphi, \varphi \right\rangle \mathrm{d}M = \int_M \langle \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle \,\mathrm{d}M - 2s \int_M \langle D\varphi, \varphi \rangle \,\mathrm{d}M + \int_M \left(\frac{\mathrm{Scal}}{4} + s^2 \right) \langle \varphi, \varphi \rangle \,\mathrm{d}M \tag{3.2.6}$$

führt. Sei nun ξ ein Eigenwert von D und sei $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ ein nichttriviales Spinorfeld mit $D\varphi = \xi\varphi$. Nach Folgerung 2.4.8 ist ξ reell. Die Gleichungen (3.2.5) und (3.2.6) mit $s = \xi/n$ ergeben

$$\left\langle \nabla^{\xi/n} \varphi, \nabla^{\xi/n} \varphi \right\rangle = \langle \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle - \frac{\xi^2}{n} \langle \varphi, \varphi \rangle$$

und

$$\begin{aligned}
\left(\xi - \frac{\xi}{n} \right)^2 \int_M \langle \varphi, \varphi \rangle \,\mathrm{d}M &= \int_M \langle \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle \,\mathrm{d}M - 2\frac{\xi^2}{n} \int_M \langle \varphi, \varphi \rangle \,\mathrm{d}M + \int_M \left(\frac{\mathrm{Scal}}{4} + \frac{\xi^2}{n^2} \right) \langle \varphi, \varphi \rangle \,\mathrm{d}M \\
&= \int_M \left\langle \nabla^{\xi/n} \varphi, \nabla^{\xi/n} \varphi \right\rangle \mathrm{d}M + \left(\frac{\xi^2}{n^2} - \frac{\xi^2}{n} \right) \int_M \langle \varphi, \varphi \rangle \,\mathrm{d}M \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_M \mathrm{Scal} \, \langle \varphi, \varphi \rangle \,\mathrm{d}M \ .
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
\xi^2 \frac{n-1}{n} \int_M \langle \varphi, \varphi \rangle \,\mathrm{d}M &= \int_M \left\langle \nabla^{\xi/n} \varphi, \nabla^{\xi/n} f \varphi \right\rangle \mathrm{d}M + \frac{1}{4} \int_M \mathrm{Scal} \, \langle \varphi, \varphi \rangle \,\mathrm{d}M \\
&\geq \frac{\mathrm{Scal}_0}{4} \int_M \langle \varphi, \varphi \rangle \,\mathrm{d}M \ ,
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

was die Behauptung liefert. □

Bemerkung 3.2.9 Die Eigenwertabschätzung (3.2.4) ist scharf. Im Fall $(M, \mathbf{g}) = (S^n, \mathbf{g}_{\mathrm{st}})$ wird nämlich die angegebene untere Schranke angenommen. □

3.3 Killing- und Twistor-Spinoren

Definition 3.3.1 *Ein Spinorfeld $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ heißt* **Killing-Spinor** $:\Longleftrightarrow$ *Es existiert eine komplexe Zahl ζ derart, dass*

$$\nabla_X \varphi = \zeta X \cdot \varphi$$

für alle $X \in \Gamma(\varphi)$. Die Zahl ζ wird dann die **Killing-Zahl** *von φ genannt.*

Zwischen Killing-Spinoren und dem Dirac-Operator D bestehen die folgenden Beziehungen.

Satz 3.3.2 *Sei $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ ein Killing-Spinor mit Killing-Zahl ζ. Dann gilt*

$$D\varphi = -n\zeta\varphi \ .$$

Somit ist jeder nichttriviale Killing-Spinor ein Eigenspinor von D.

Beweis: Es ist

$$D\varphi = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j \cdot \nabla_{\mathsf{e}_j} \varphi = \zeta \sum_{j=1}^{n} \mathsf{e}_j^2 \cdot \varphi = -n\zeta\varphi \ .$$

□

Umgekehrt liefert der Grenzfall in der Ungleichung (3.2.4) Killing-Spinoren.

Satz 3.3.3 *Sei M geschlossen, sei ξ ein Eigenwert des Dirac-Operators D und gelte*

$$\xi^2 = \frac{n}{n-1} \frac{\mathrm{Scal}_0}{4} \ . \tag{3.3.1}$$

Dann ist jeder Eigenspinor $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ von D zum Eigenwert ξ ein Killing-Spinor mit Killing-Zahl $-\xi/n$ und die Skalarkrümmung Scal *von $(M, \mathbf{g})$ ist konstant.*

Beweis: Sei $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ und gelte $D\varphi = \xi\varphi$. Nach (3.2.7) und (3.3.1) ist dann $\nabla^{\xi/n}\varphi = 0$, d.h.

$$\nabla_X \varphi + \frac{\xi}{n} X \cdot \varphi = 0 \quad \text{für alle} \quad X \in \Gamma(TM) \ ,$$

und $\mathrm{Scal} = \mathrm{Scal}_0$, womit die Behauptung bereits gezeigt ist. □

Die Aussage zur Skalarkrümmung im Satz 3.3.3 werden wir weiter unten verallgemeinern (vgl. Satz 3.3.8). Bevor wir dazu kommen, stellen wir eine Überlegung an, in der der Name Killing-Spinor seinen Ursprung hat.

Definition 3.3.4 *Ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ heißt* **Killing-Vektorfeld** $:\Longleftrightarrow \mathcal{L}_X \mathbf{g} = 0$.

Dabei bezeichnet $\mathcal{L}$ die Lie-Ableitung. Bekanntlich gilt

$$(\mathcal{L}_X \mathbf{g})(Y, Z) = \mathbf{g}(\nabla_Y X, Z) + \mathbf{g}(Y, \nabla_Z X) \tag{3.3.2}$$

für $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, wobei in dieser Formel ∇ wieder der Levi-Civita-Zusammenhang von $(M, \mathbf{g})$ ist.

Satz 3.3.5 *Sei $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ ein Killing-Spinor mit Killing-Zahl $\zeta \in \mathbb{R}$. Dann ist das durch*

$$X_\varphi := \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi, \mathsf{e}_j \cdot \varphi \rangle \mathsf{e}_j$$

definierte Vektorfeld $X_\varphi \in \Gamma(TM)$ ein Killing-Vektorfeld.

Beweis: Wir fixieren ein $x \in M$ und wählen ein Orthonormalreper $(\mathsf{e}_1, \dots, \mathsf{e}_n)$ mit $(\nabla \mathsf{e}_j)(x) = 0$ für $j = 1, \dots, n$. Im Punkt x haben wir dann

$$\begin{aligned}
\nabla_Y X_\varphi &= \mathrm{i} \sum_{j=1}^n (\langle \nabla_Y \varphi, \mathsf{e}_j \cdot \varphi \rangle + \langle \varphi, \nabla_Y (\mathsf{e}_j \cdot \varphi) \rangle) \mathsf{e}_j \\
&= \mathrm{i} \sum_{j=1}^n (\langle \nabla_Y \varphi, \mathsf{e}_j \cdot \varphi \rangle + \langle \varphi, \mathsf{e}_j \cdot \nabla_Y \varphi \rangle) \mathsf{e}_j \\
&= \mathrm{i}\zeta \sum_{j=1}^n (\langle Y \cdot \varphi, \mathsf{e}_j \cdot \varphi \rangle + \langle \varphi, \mathsf{e}_j \cdot Y \cdot \varphi \rangle) \mathsf{e}_j \\
&= \mathrm{i}\zeta \sum_{j=1}^n \langle \varphi, (\mathsf{e}_j \cdot Y - Y \cdot \mathsf{e}_j) \cdot \varphi \rangle \mathsf{e}_j
\end{aligned}$$

für alle $Y \in \Gamma(TM)$, wobei wir hier benutzen, dass die Killing-Zahl ζ reell ist. Also gilt

$$\mathbf{g}(\nabla_Y X_\varphi, Z) = \mathrm{i}\zeta \langle \varphi, (Z \cdot Y - Y \cdot Z) \cdot \varphi \rangle$$

für alle $Y, Z \in \Gamma(TM)$. Mit (3.3.2) sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}_{X_\varphi} \mathbf{g}\right)(Y, Z) &= \mathbf{g}(\nabla_Y X_\varphi, Z) + \mathbf{g}(Y, \nabla_Z X_\varphi) \\
&= \mathrm{i}\zeta \langle \varphi, (Z \cdot Y - Y \cdot Z) \cdot \varphi \rangle + \mathrm{i}\zeta \langle \varphi, (Y \cdot Z - Z \cdot Y) \cdot \varphi \rangle \\
&= 0 \, .
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.3.6 *Sei M zusammenhängend. Dann ist jeder nichttriviale Killing-Spinor $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ nirgends* 0.

Beweis: Sei $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ ein Killing-Spinor mit Killing-Zahl ζ. Dann erfüllt φ für jedes $X \in \Gamma(TM)$ die lineare Differentialgleichung

$$\nabla_X \varphi - \zeta X \cdot \varphi = 0 \, ,$$

was mit Hilfe der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen die Behauptung liefert. □

Definition 3.3.7 *Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $(M, \mathbf{g})$ heißt* **Einstein-Mannigfaltigkeit** $:\Longleftrightarrow$ *Es existiert eine Funktion $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ derart, dass*

$$\mathrm{Ric}(X) = fX$$

für alle $X \in \Gamma(TM)$.

Satz 3.3.8 (Friedrich) *Sei M zusammenhängend und sei $\varphi \in \Gamma(\mathcal{S})$ ein nichttrivialer Killing-Spinor. Dann ist $(M, \mathbf{g})$ eine Einstein-Mannigfaltigkeit und die Skalarkrümmung von $(M, \mathbf{g})$ ist*

$$\mathrm{Scal} = 4n(n-1)\zeta^2 \, , \tag{3.3.3}$$

wobei ζ die Killing-Zahl von φ ist.

Beweis: Für $X, Y \in \Gamma(TM)$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
R^{\mathcal{S}}(X, Y)\varphi &= \nabla_X \nabla_Y \varphi - \nabla_Y \nabla_X \varphi - \nabla_{[X,Y]} \varphi \\
&= \zeta(\nabla_X (Y \cdot \varphi) - \nabla_Y (X \cdot \varphi) - [X, Y] \cdot \varphi) \\
&= \zeta(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \cdot \varphi + \zeta(Y \cdot \nabla_X \varphi - X \cdot \nabla_Y \varphi) \\
&= \zeta^2 (Y \cdot X \cdot \varphi - X \cdot Y \cdot \varphi) \\
&= -2\zeta^2 (X \cdot Y \cdot \varphi + \mathbf{g}(X, Y)\varphi) \, .
\end{aligned}$$

Mit Satz 3.1.4 erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X)\cdot\varphi &= 2\sum_{j=1}^{n}\mathsf{e}_j\cdot R^{\mathcal{S}}(\mathsf{e}_j,X)\varphi\\ &= -4\zeta^2\sum_{j=1}^{n}\big(\mathsf{e}_j^2\cdot X\cdot\varphi+\mathbf{g}(\mathsf{e}_j,X)\mathsf{e}_j\cdot\varphi\big)\\ &= 4\zeta^2(n-1)X\cdot\varphi\ .\end{aligned}$$

Nach den Lemmas 1.5.3 und 3.3.6 haben wir damit

$$\mathrm{Ric}(X)=4\zeta^2(n-1)X\ ,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Folgerung 3.3.9 *Die Killing-Zahl eines Killing-Spinors ist reell oder rein imaginär.*

Beweis: Das ist eine Konsequenz von Gleichung (3.3.3). □

Definition 3.3.10 *Ein Spinorfeld $\varphi\in\Gamma(\mathcal{S})$ heißt* **Twistor-Spinor** $:\Longleftrightarrow$ *Für alle $X\in\Gamma(TM)$ ist*

$$\nabla_X\varphi+\frac{1}{n}X\cdot D\varphi=0\ . \tag{3.3.4}$$

Lemma 3.3.11 *Jeder Killing-Spinor $\varphi\in\Gamma(\mathcal{S})$ ist ein Twistor-Spinor.*

Beweis: Man benutze Satz 3.3.2. □

Lemma 3.3.12 *Ein Spinorfeld $\varphi\in\Gamma(\mathcal{S})$ ist genau dann ein Twistor-Spinor, wenn*

$$X\cdot\nabla_Y\varphi+Y\cdot\nabla_X\varphi=\frac{2}{n}\mathbf{g}(X,Y)D\varphi \tag{3.3.5}$$

für alle $X,Y\in\Gamma(TM)$

Beweis: Sei $\varphi\in\Gamma(\mathcal{S})$ ein Twistor-Spinor. Indem man (3.3.4) mit einem Vektorfeld $Y\in\Gamma(TM)$ multipliziert, erhält man

$$Y\cdot\nabla_X\varphi+\frac{1}{n}Y\cdot X\cdot D\varphi=0\ .$$

Damit gilt auch

$$X\cdot\nabla_Y\varphi+\frac{1}{n}X\cdot Y\cdot D\varphi=0\ .$$

Die Addition der letzten beiden Gleichungen ergibt (3.3.5).

Gelte nun umgekehrt (3.3.5). Diese Gleichung liefert für $Y=\mathsf{e}_j$

$$\begin{aligned}\frac{2}{n}X\cdot D\varphi &= \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{g}(X,\mathsf{e}_j)\mathsf{e}_j\cdot D\varphi\\ &= \sum_{j=1}^{n}\mathsf{e}_j\cdot X\cdot\nabla_{\mathsf{e}_j}\varphi+\sum_{j=1}^{n}\mathsf{e}_j^2\cdot\nabla_X\varphi\\ &= -\sum_{j=1}^{n}X\cdot\mathsf{e}_j\cdot\nabla_{\mathsf{e}_j}\varphi-2\sum_{j=1}^{n}\mathbf{g}(X,\mathsf{e}_j)\mathsf{e}_j\cdot\varphi+\sum_{j=1}^{n}\mathsf{e}_j^2\cdot\nabla_X\varphi\\ &= -X\cdot D\varphi-(n+2)\nabla_X\varphi\ ,\end{aligned}$$

womit (3.3.4) gezeigt ist. □

Literatur

[1] H. Baum: *Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren über pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten.* Teubner, Leipzig (1981)

[2] L. Habermann: *Liesche Gruppen und homogene Räume.* Vorlesungsskript. http://fizban.math.uni-hannover.de/~habermann/skripte/lie.pdf

[3] Th. Friedrich: *Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie.* Vieweg, Braunschweig Wiesbaden (1997)

[4] R. Sulanke, P. Wintgen: *Differentialgeometrie und Faserbündel.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1972)